УДК 517.928: 533.6.013.2

©2012. **Б. И. Басок, А. А. Авраменко, В. В. Гоцуленко**

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРИ НАПОРНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ГАЗА, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ СГОРАНИЯ

В динамической системе, являющейся математической моделью автоколебаний вибрационного горения в приближении одной степени свободы, рассматривается задача самовозбуждения автоколебаний механизмом запаздывания сгорания. С помощью приближенного метода малого параметра, адаптированного для дифференциально-разностных уравнений, получены асимптотические соотношения для автоколебательных периодических решений в рассматриваемой динамической системе.

Ключевые слова: *запаздывание сгорания, асимптотический метод, неустойчивость, квазилинейная система, вибрационное горение, автоколебания.*

1. Введение. Периодические автоколебательные процессы в детерминированных нелинейных диссипативных системах – одна из фундаментальных проблем современного естествознания. Значительные проблемы возникают перед практиками, когда они сталкиваются с явлением возбуждения термоакустических автоколебаний и автоколебаний вибрационного горения, соответственно возникающих при конвективном теплоподводе или при сжигании топливных смесей в самых разных тепловых агрегатах – от простейших топочных устройств до камер горения воздухонагревателей доменных печей и камер сгорания мощных современных ракетных двигателей. С большим сомнением этот процесс сегодня можно назвать управляемым [1]. Неустойчивость возникает при сжигании и угольной пыли, и нефти, и бензина, и пропан – бутановой смеси, и водорода. Так что исходное агрегатное состояние и состав горючего не имеет принципиального значения. Автоколебания давления не только создают большую знакопеременную механическую нагрузку на конструкцию топочного устройства, нередко приводящую к ее механическому разрушению, но и изменяют условия теплообмена. В камерах сгорания, надежно работающих в стационарном режиме, при возникновении автоколебаний резко возрастает поток тепла в стенки, что нередко приводит к их термическому разрушению.

Математическая формализация рассмотренных выше задач приводит к нелинейным уравнениям гидродинамического типа [2, 8]. Однако в случае, когда длина волны периодических распределенных по пространству автоколебаний существенно больше размеров системы, в которой они возбуждаются, можно перейти от исходной распределенной математической модели к динамической системе, определяемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений (модель с сосредоточенными параметрами) [3].

2. Постановка задачи. Математические модели с сосредоточенными параметрами рассмотренных выше задач термогидрогазодинамики в приближении одной степени свободы, с учетом процессов запаздывания сгорания топлива, сводятся к следующей динамической системе [9-13]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha\left(\mathbb{H}\left(x\right) - y\right), \\ \\ \frac{dy}{dt} = \beta\left(x(t-\Delta) - \xi\left|\frac{\mathbb{H}_0 - y}{\mathbb{H}_0 - \eta}\right|^a\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbb{H}\left(x\right) = \eta - \gamma\Psi\left(x - \xi\right)$; $\Psi\left(x\right) = x\left(x - b_1\right)\left(x - b_2\right)$; $b_1 \cdot b_2 < 0$, $\mathbb{H}_0$, $\eta = \text{const}$; γ, Δ, $\xi > 0$; $0 \leq a < 1$. Асимптотический анализ автоколебаний в системе (1) при отсутствии запаздывания $\Delta = 0$ рассматривался в [10], а стабилизация неустойчивого положения равновесия системы (1) параметрическими колебаниями – изучалась в [11]. В данной работе рассматривается асимптотический анализ периодических решений системы (1) при $\Delta > 0$ и одновременном стремлении параметров γ и a к нулю.

3. Построение асимптотических разложений автоколебаний. Согласно выше приведенным предположениям, полагаем, что

$$\gamma = \sum_{k\geq 0}\gamma_k\varepsilon^{k+1},\ a = \sum_{k\geq 0}a_k\varepsilon^{k+1};\ \gamma_0,\ a_0 > 0. \tag{2}$$

Однородная часть линейной порождающей системы, соответствующей системе (1), имеет следующий характеристический квазиполином

$$\lambda^2 + \alpha\beta\exp\left(-\Delta\lambda\right) = 0. \tag{3}$$

Несложно проверить, что квазиполином (3) имеет резонансные корни (т.е. корни вида $\lambda = \pm\mathrm{i}\omega$) лишь при выполнении соотношения

$$\Delta = 2\pi n/\sqrt{\alpha\beta}\ \ (n \geq 1, n \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

Предполагая (4) выполненным, получим, что линейная порождающая система (т.е. система (1) при $\varepsilon = 0$) имеет двухпараметрическое семейство периодических решений с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$

$$\begin{aligned} x_0\left(t\right) &= \xi + C_0\left[\varphi_1\exp\left\{\mathrm{i}\left(\omega_0 t + C_1\right)\right\} + \bar{\varphi}_1\exp\left\{-\mathrm{i}\left(\omega_0 t + C_1\right)\right\}\right], \\ y_0\left(t\right) &= \eta + C_0\left[\varphi_2\exp\left\{\mathrm{i}\left(\omega_0 t + C_1\right)\right\} + \bar{\varphi}_2\exp\left\{-\mathrm{i}\left(\omega_0 t + C_1\right)\right\}\right], \end{aligned} \tag{5}$$

где C_0, C_1 – произвольные вещественные постоянные; $\varphi_1 = \mathrm{i}\sqrt{\alpha}$, $\varphi_2 = \sqrt{\beta}$ – компоненты собственного вектора однородной части линейной порождающей системы, соответствующие корню $\lambda = \mathrm{i}\omega_0$; $\omega_0 = \sqrt{\alpha\beta}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Нам необходимо найти периодические решения основной системы (1), близкие к периодическим решениям порождающей системы (5), такие, чтобы при $\varepsilon \to 0$ они стремились к (5). Периодические решения системы (1), если они существуют, имеют, вообще говоря, период T, отличный от T_0. Но при достаточно малых значениях

$\varepsilon > 0$ это отличие будет иметь порядок $O(\varepsilon)$. Поэтому правомерно представить T в следующем виде:

$$T = T_0\left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...\right).$$

Чтобы упростить решение задачи, сделаем в системе (1) замену переменных

$$X = \sqrt{\beta}\,(x-\xi)\,,\ Y = \sqrt{\alpha}\,(y-\eta)\,,\ \tau = \omega_0\left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...\right)^{-1} t. \qquad (6)$$

Тогда решение системы (1), близкое к одному из порождающих периодических решений (5) будет иметь период 2π, не зависящий от ε. Постоянные h_1, h_2,... подлежат определению. После замены (6) система (1) запишется в форме

$$\begin{cases} dX/d\tau = \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k\varepsilon^k\right)\left[-Y - \gamma(\varepsilon)\sqrt{\alpha}\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right)\right], \\ dY/d\tau = \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k\varepsilon^k\right)\left[X\left(\tau - \Delta'\left(\varepsilon\right)\right) + \xi\sqrt{\beta}\left(1 - \left|1 - \frac{Y}{\sqrt{\alpha}(\mathbb{H}_0 - \eta)}\right|^{a(\varepsilon)}\right)\right], \end{cases} \qquad (7)$$

где $\Delta'\left(\varepsilon\right) = \omega_0\Delta\left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...\right)^{-1}$.

Периодические решения системы (7) периода 2π ищем в виде асимптотических рядов

$$X\left(\tau\right) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k\left(\tau\right)\varepsilon^k,\ Y\left(\tau\right) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k\left(\tau\right)\varepsilon^k. \qquad (8)$$

Подставив разложения (8) в уравнения (7), разложив обе части полученных равенств по степеням ε и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, придем к бесконечной рекуррентной системе линейных дифференциально – разностных уравнений относительно неизвестных 2π – периодических коэффициентов $X_k(\tau)$ и $Y_k(\tau)$ $(k \geq 0)$ разложений (8). Однако для этого необходимо выполнить ряд промежуточных выкладок. Рассмотрим формальный степенной ряд $z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k\varepsilon^k$, тогда

$$z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{nk}\left(z_0, z_1, ..., z_k\right)\varepsilon^k, (\text{при } n \in \mathbb{N})\ \psi_{n0}\left(z_0\right) = z_0^n,\ \psi_{n1}\left(z_0, z_1\right) = nz_0^{n-1}z_1, ...,$$

$$\begin{aligned} &z\left(z - s_0\right)\left(z - s_1\right) = \sum_{k\geq 0} \sigma_k\left(z_0, z_1, ..., z_k; s_0, s_1\right)\varepsilon^k, \\ &\sigma_0\left(z_0; s_0, s_1\right) = z_0\left(z_0 - s_0\right)\left(z_0 - s_1\right), \\ &\sigma_1\left(z_0, z_1; s_0, s_1\right) = z_0\left(z_0 - s_0\right)z_1 + z_0z_1\left(z_0 - s_1\right) + z_1\left(z_0 - s_0\right)\left(z_0 - s_1\right), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\prod_{k=0}^{r}\left(z - k\right) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{v}_{r,k}\left(z_0, z_1, ..., z_k\right)\varepsilon^k, \text{ где } \mathrm{v}_{r,0}(z_0) = z_0\left(z_0 - 1\right)...\left(z_0 - r\right), ...$$

Для дальнейших построений систему (7) удобно представить в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{Z}}{d\tau}=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}h_k\varepsilon^k\right)\left(\mathbf{A}_1\mathbf{Z}\left(\tau\right)+\mathbf{A}_2\mathbf{Z}\left(\tau-\Delta'\left(\varepsilon\right)\right)+\varepsilon\Phi\left(\mathbf{Z},\varepsilon\right)\right), \qquad (9)$$

где $\mathbf{Z}(\tau)=\begin{bmatrix}X(\tau)\\Y(\tau)\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0&-1\\0&0\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\Phi\left(\mathbf{Z},\varepsilon\right)=\begin{bmatrix}\varphi_1\left(\mathbf{Z},\varepsilon\right)\\\varphi_2\left(\mathbf{Z},\varepsilon\right)\end{bmatrix}$, $\varphi_1\left(\mathbf{Z},\varepsilon\right)=-\sqrt{\alpha}\frac{\gamma(\varepsilon)}{\varepsilon}\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right)$, $\varphi_2\left(\mathbf{Z},\varepsilon\right)=\frac{\xi\sqrt{\beta}}{\varepsilon}\left(1-\left|1-\frac{Y}{\sqrt{\alpha}(\mathbb{H}_0-\eta)}\right|^{a(\varepsilon)}\right)$.

С учетом приведенных выше соотношений относительно арифметических операций над формальными степенными рядами получаем, что

$$\tau-\Delta'\left(\varepsilon\right)=\left(\tau-\omega_0\Delta\right)-\omega_0\Delta\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{-1,k}\left(1,h_1,...,h_k\right)\varepsilon^k,\ \text{откуда}$$

$$\mathbf{Z}\left(\tau-\Delta'\left(\varepsilon\right)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{k!}\mathbf{Z}_j^{(k)}\left(\tau-\omega_0\Delta\right)d_{ki}\left(h_1,...,h_{i+1}\right)\varepsilon^{i+j+k},$$

где $d_{ki}\left(h_1,...,h_{i+1}\right)=\psi_{ki}\left(\psi_{-1,1}\left(1,h_1\right),\psi_{-1,2}\left(1,h_1,h_2\right),...,\psi_{-1,i+1}\left(1,h_1,...,h_{i+1}\right)\right)$.

Таким образом, окончательно приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{d\mathbf{Z}_m}{d\tau}=\mathbf{A}_1\mathbf{Z}_m\left(\tau\right)+\mathbf{A}_2\mathbf{Z}_m\left(\tau-\omega_0\Delta\right)+\mathbf{F}_m\left(\tau\right),\quad\left(m\geq 0\right), \qquad (10)$$

где (при $m\geq 1$) $\mathbf{F}_m(\tau)=\sum\limits_{i=0}^{m-1}h_{m-i}(\mathbf{A}_1\mathbf{Z}_i\left(\tau\right)+\Phi_{i-1}+\mathbf{A}_2\mathbf{E}_i)+\mathbf{A}_2\sum\limits_{\substack{i+j+k=m\\ i\geq 0,j\cdot k>0}}\mathbf{e}_{ijk}+\Phi_{m-1}$, $\mathbf{F}_0=0$, $\Phi_{-1}=0$, $\mathbf{E}_r=\sum\limits_{\substack{i+j+k=r\\ i,j,k\geq 0}}\mathbf{e}_{ijk}$ (при $r\geq 0$), $\mathbf{e}_{ijk}=d_{kj}\frac{(-1)^k}{k!}\mathbf{Z}_i^{(k)}\left(\tau-\omega_0\Delta\right)$, $\Phi\left(\mathbf{Z},\varepsilon\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Phi_k\varepsilon^k$, $\Phi_k=\Phi_k\left(\mathbf{Z}_0,\mathbf{Z}_1,...,\mathbf{Z}_k\right)$, $\mathbf{Z}\left(\tau\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathbf{Z}_k\left(\tau\right)\varepsilon^k$.

Далее получим выражения для компонент $\varphi_{1,k}\left(\mathbf{Z}\right)$ и $\varphi_{2,k}\left(\mathbf{Z}\right)$ вектора Φ_k. Имеем, т.к.

$$\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right)=\beta^{-3/2}\sum_{k\geq 0}\sigma_k\left(X_0,X_1,...,X_k;b_1\sqrt{\beta},b_2\sqrt{\beta}\right)\varepsilon^k,$$

то $\varphi_{1,k}\left(\mathbf{Z}\right)=-\alpha^{1/2}\beta^{-3/2}\mu_k$, где $\mu_k=\sum\limits_{i=0}^{k}\gamma_{k-i}\sigma_i\left(X_0,X_1,...,X_i;b_1\sqrt{\beta},b_2\sqrt{\beta}\right)$.

Также с помощью разложения

$$\left|1-h\right|^a\left(\varepsilon\right)=1+\sum_{n\geq 1}h^n\frac{\left(-1\right)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(a(\varepsilon)-k\right)=\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}h^n}{n!}\mathrm{v}_{n-1,k}\varepsilon^k,$$

где $\mathrm{v}_{n-1,k} = \mathrm{v}_{n-1,k}\left(0, a_0, ..., a_{k-1}\right)$, получается представление

$$\varphi_{2,k}\left(\mathbf{Z}\right) = \xi\sqrt{\beta} \sum_{\substack{m+i-1=k\\ m\geq 1, i\geq 0}} \sum_{n\geq 1} \frac{\left(-1\right)^{n+1} \mathrm{v}_{n-1,m}\left(0, a_0, ..., a_{m-1}\right) \psi_{ni}\left(Y_0, Y_1, ..., Y_i\right)}{n! \alpha^{\frac{n}{2}} \left|\mathbb{H}_0 - \eta\right|^n}.$$

Полученные соотношения показывают, что $\mathbf{F}_0 = 0$ и при $m \geq 1$

$$\mathbf{F}_m\left(\tau\right) = \mathbf{F}_m\left(\left\{h_k\right\}_{k=1}^{m}; \left\{\mathbf{Z}_j^{(k)}\left(\tau - \omega_0\Delta\right)\right\}_{j,k\geq 0}^{j+k\leq m-1}; \left\{\mathbf{Z}_k\left(\tau\right)\right\}_{k=0}^{m-1}\right). \tag{11}$$

Из (11) следует, что если функции $\left\{\mathbf{Z}_k\left(\tau\right)\right\}_{k=0}^{m-1}$ уже вычислены, то $\mathbf{F}_m\left(\tau\right)$ – известная 2π – периодическая функция, зависящая от параметров $\left\{h_k\right\}_{k=1}^{m}$, и система (10) является линейной неоднородной относительно $\mathbf{Z}_m\left(\tau\right)$. Т.к. характеристическое уравнение системы (10) имеет корень $\lambda = \mathrm{i}$, а функция $\mathbf{F}_m\left(\tau\right)$ имеет период 2π, то мы имеем резонансный случай. Поэтому, чтобы система (10) имела 2π – периодическое решение, необходимо коэффициенты $\left\{h_k\right\}_{k=1}^{m}$ выбрать специальным образом. Для этого нам понадобится следующий результат [4].

Теорема 1. *Рассмотрим линейную неоднородную систему с постоянным запаздыванием $\Delta > 0$, причем $\mathbf{F}\left(\tau + 2\pi\right) = \mathbf{F}\left(\tau\right)$*

$$\frac{d\mathbf{Z}}{d\tau} = \mathbf{A}_1\mathbf{Z}\left(\tau\right) + \mathbf{A}_2\mathbf{Z}\left(\tau - \Delta\right) + \mathbf{F}\left(\tau\right),$$

предполагая также, что характеристический квазиполином ее однородной части имеет резонансный корень $\lambda = \mathrm{i}\omega$. Тогда для отсутствия вековых членов (т.е. слагаемых вида $\tau^m \exp\left(\mathrm{i}\omega\tau\right)$ при $m \geq 1$) в решении данной системы необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$\int\limits_0^{2\pi/\omega} \mathbf{F}\left(\tau\right) \cdot \mathbf{Z}^*\left(\tau\right) d\tau = 0,$$

где $\mathbf{Z}^*\left(\tau\right)$ – периодическое решение с периодом $T = 2\pi/\omega$ сопряженной системы

$$-\frac{d\mathbf{Z}^*}{d\tau} = \mathbf{A}_1^T\mathbf{Z}^*\left(\tau\right) + \mathbf{A}_2^T\mathbf{Z}^*\left(\tau + \Delta\right).$$

Причем собственные значения характеристических квазиполиномов исходной и сопряженной системы являются попарно комплексно сопряженными. Таким образом, множества их резонансных собственных значений совпадают.

Вещественное 2π – периодическое решение однородной части системы (10), как нетрудно проверить, можно записать в форме

$$\mathbf{Z}_m\left(\tau\right) = C_{0,m}\left[\Gamma_0 \exp\left\{\mathrm{i}\left(\tau + C_{1,m}\right)\right\} + \overline{\Gamma}_0 \exp\left\{-\mathrm{i}\left(\tau + C_{1,m}\right)\right\}\right],$$

где $C_{0,m}$, $C_{1,m}$ – вещественные произвольные постоянные, $\Gamma_0 = \left[\begin{array}{cc} \mathrm{i} & 1 \end{array}\right]^T$.

Следовательно, обозначив через $\mathbf{R}_m(\tau)$ произвольное частное 2π – периодическое решение системы (10), в случае его существования, можно исходя из этого, получить двухпараметрическое семейство периодических решений

$$\mathbf{Z}_m(\tau) = C_{0,m}\left[\Gamma_0 \exp\{\mathrm{i}(\tau + C_{1,m})\} + \overline{\Gamma}_0 \exp\{-\mathrm{i}(\tau + C_{1,m})\}\right] + \mathbf{R}_m(\tau). \qquad (12)$$

Обозначим через $\mathbf{Z}_m^*(\tau)$ периодическое решение сопряженной для (10) системы. Тогда, как нетрудно проверить $\mathbf{Z}_m^*(\tau) = -\mathrm{i}\overline{\Gamma_0}\exp(-\mathrm{i}\tau)$.

Согласно приведенной теореме 1, необходимое и достаточное условие существования в системе (10) 2π – периодического решения, имеет вид

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathbf{F}_m(\tau)\cdot\mathbf{Z}_m^*(\tau)d\tau = 0 \ (m \geq 1). \qquad (13)$$

Покажем с помощью метода математической индукции, что выбором параметров h_k, $C_{0,k}$ и $C_{1,k}$ условие (13) действительно можно удовлетворить. При $m = 0$ условие (13) выполняется автоматически. Допустим, что (13) уже удовлетворено при $m = n-1$, тогда при $m = n$ согласно (12) имеем $\mathbf{F}_n(\tau) = \mathbf{F}_n(\tau) = (\tau, h_n, C_{0,n-1}, C_{1,n-1})$. Условие (13), записанное в комплексной форме, распадается на два вещественных, где $\mathbf{F}_n = \left[\begin{array}{cc} f_{1,n} & f_{2,n}\end{array}\right]^T$

$$\left\{\begin{array}{l} \int\limits_0^{2\pi}[f_{2,n}(\tau, h_n, C_{0,n-1}, C_{1,n-1})\cos\tau + f_{1,n}(\tau, h_n, C_{0,n-1}, C_{1,n-1})\sin\tau]d\tau = 0, \\ \int\limits_0^{2\pi}[f_{2,n}(\tau, h_n, C_{0,n-1}, C_{1,n-1})\cos\tau - f_{1,n}(\tau, h_n, C_{0,n-1}, C_{1,n-1})\sin\tau]d\tau = 0. \end{array}\right. \qquad (14)$$

В системе (14) два уравнения и три неизвестных, поэтому полагая например $C_{1,n-1} = 0$, из (14) можно определить $C_{0,n-1}$ и h_n.

Таким образом, все системы из (10) для определения $\mathbf{Z}_m(\tau)$ $(m \geq 1)$ представляют собой линейные неоднородные дифференциально – разностные системы с одинаковой однородной частью и неоднородностями периода 2π. Так как в нашем случае, как выше уже отмечалось, имеет место резонанс, то для существования периодического решения в (10) необходимо удовлетворить условие (13). После чего частное 2π – периодическое решение $\mathbf{R}_m(\tau)$ системы (10) может быть найдено методом неопределенных коэффициентов [4] с предварительным разложением функции $\mathbf{F}_m(\tau)$ в ряд Фурье.

4. Анализ автоколебаний в случае бесконечно малого запаздывания. В рассматриваемом случае в системе (1) при $\varepsilon \to 0$ запаздывание $\Delta = k\varepsilon$, $k > 0$. Тогда воспользовавшись разложением Тейлора

$$x(t-\Delta) = x(t) - k\varepsilon\frac{dx(t)}{dt} + O\left(\varepsilon^2\right) \ \text{при } \varepsilon \to 0,$$

выполнив также в системе (1) замену переменных (6) при $h_k = 0\ \forall k \geq 1$, она с точностью до $O\left(\varepsilon^2\right)$ запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} dX/d\tau = -Y - \varepsilon\gamma_0\sqrt{\alpha}\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right), \\ dY/d\tau = X + \varepsilon\left[k\omega_0 Y - \xi a_0\sqrt{\beta}\ln\left|1 - \frac{Y}{\sqrt{\alpha}(\mathbb{H}_0-\eta)}\right|\right]. \end{cases} \tag{15}$$

При $\varepsilon = 0$ система (15) является консервативной. Известно, что определенными возмущениями консервативную систему можно превратить в автоколебательную, причем предельный цикл которой будет близким к одной из замкнутых фазовых траекторий исходной невозмущенной консервативной системы. В этом отношении имеет место следующий результат [5].

Теорема 2. *Рассматривается система при* $\varepsilon \to 0$

$$\frac{dx}{dt} = -y + \varepsilon f_1(x,y), \ \frac{dy}{dt} = x + \varepsilon f_2(x,y).$$

Положим $\ell_A = \{(x,y) : x = A\cos(t), y = A\sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, ℓ_A *– окружность с центром в начале координат и радиусом* A. *Пусть также* $F(A) = \oint\limits_{\ell_A} f_1(x,y)dy - f_2(x,y)\,dx$. *Тогда если функция* $F(A)$ *имеет простой положительный корень* A^*, *то при малых* $\varepsilon > 0$ *рассматриваемая система имеет предельный цикл* $\Gamma_\varepsilon \simeq \ell_{A^*}$, *устойчивый при* $\frac{dF}{dA}\big|_{A=A^*} < 0$ *и неустойчивый, если* $\frac{dF}{dA}\big|_{A=A^*} > 0$.

В нашем случае:

$$f_1(X,Y) = -\gamma_0\sqrt{\alpha}\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right), \ f_2(X,Y) = k\omega_0 Y - \xi a_0\sqrt{\beta}\ln\left|1 - \frac{Y}{\sqrt{\alpha}\left(\mathbb{H}_0-\eta\right)}\right|,$$

и, как нетрудно проверить

$$F(A) = \pi A^2\left[k\omega_0 - \gamma_0\alpha^{1/2}\beta^{-3/2}\left(\frac{3}{4}A^2 + \beta b_1 b_2\right)\right] + \tag{16}$$

$$+a_0\xi\sqrt{\beta}A\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|1 - \frac{A\sin\tau}{\sqrt{\alpha}\left(H_0-\eta\right)}\right|\sin\tau d\tau.$$

Вычислим интеграл, зависящий от параметра $I(r) = \int\limits_0^{2\pi}\ln(1 + r\sin\tau)\sin\tau d\tau$, воспользовавшись для этого правилом Лейбница дифференцирования под знаком интеграла. Имеем,

$$I(0) = 0, \ \frac{dI}{dr} = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin^2\tau}{1 + r\sin\tau}d\tau = \frac{2\pi}{r^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - 1\right] \Rightarrow$$

$$I\left(r\right)=\int\limits_0^r \frac{dI}{dr}dr=2\pi\int\limits_0^r \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}-1\right]dr=\frac{2\pi}{r}\left[1-\sqrt{1-r^2}\right].$$

Таким образом, (16) окончательно можно записать в следующем виде:

$$F(A)=A^2\left(q_0-q_1A^2\right)+q_2\left(1-\sqrt{1-q_3A^2}\right), \tag{17}$$

где

$$q_0=\pi\left[k\omega_0-\gamma_0\alpha^{1/2}\beta^{-1/2}b_1b_2\right],\ q_1=\frac{3\pi}{4}\gamma_0\alpha^{1/2}\beta^{-3/2}, \tag{18}$$

$$q_2=2\pi\omega_0a_0\xi\left(\mathbb{H}_0-\eta\right),\ q_3=\frac{1}{\alpha\left(\mathbb{H}_0-\eta\right)^2}.$$

Отметим, что согласно теореме 2, при анализе условий разрешимости уравнения $F(A)=0$ нужно рассматривать лишь случай положительных корней. Можно показать, что необходимым и достаточным условием существования у функции (17) при $q_i>0$ $(\forall i=\overline{0;3})$ положительного корня $A^*>0$ является выполнение следующего неравенства $q_1-q_0q_3\geq q_3^2q_2$, при этом

$$0<A^*\leq\left(q_3+q_0^{-1}q_2q_3^2\right)^{-1/2}, \tag{19}$$

причем равенство $A^*=A^*_{\max}=\left(q_3+q_0^{-1}q_2q_3^2\right)^{-1/2}$ достигается при $q_1=q_0q_3+q_3^2q_2$. Также непосредственной проверкой устанавливается, что в рассматриваемой задаче $\frac{dF}{dA}\Big|_{A=A^*}<0$. Следовательно, используя теорему 2, приходим к следующему результату. Динамическая система (1) при условиях (2) и $\Delta=k\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$ имеет орбитально асимптотически устойчивое периодическое решение, амплитуда которого определяется соотношениями (18) – (19).

В [10] было доказано существование автоколебательных решений в системе (1) при отсутствии запаздывания ($\Delta=0$). В этом случае с физической точки зрения единственным механизмом возбуждения автоколебаний является "отрицательное" сопротивление [7], накладывающее известные дополнительные условия [9-10] на вид функции $\mathbb{H}(x)$. Однако, согласно (18)-(19), запаздывание $\Delta=k\varepsilon$ увеличивает амплитуду автоколебаний и является самостоятельным механизмом возбуждения автоколебаний. Даже при отсутствии положительной обратной связи в виде "отрицательного" сопротивления, запаздывание может приводить к возбуждению автоколебаний. Проиллюстрируем это на примере уравнения Ван дер Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\operatorname{sign}\left(\varepsilon\right)\left|\varepsilon\right|\left(1-x^2\left(t\right)\right)\frac{dx}{dt}+x\left(t-\Delta\right)=0,\ \Delta=k\left|\varepsilon\right|,\ k\geq 0. \tag{20}$$

Хорошо известно, что уравнение (20) при $\varepsilon<0$, $\varepsilon\to -0$ и $\Delta=0$ периодического решения не имеет (отсутствует "отрицательное" сопротивление и запаздывание). Однако введение даже сколь угодно малого запаздывания $(0<k<1)$ приводит к появлению периодического решения с амплитудой $A^*=2\sqrt{1-k}$. Однако, согласно теореме 2, данное решение является неустойчивым. В этом случае в уравнении

(20) механизм запаздывания приводит к жесткой потери устойчивости [6] нулевого положения равновесия.

При $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to +0$ и $\Delta > 0$ в (20) действуют два механизма автоколебаний: "отрицательное" сопротивление и запаздывание. В этом случае соотношения (17)-(19) позволяют вычислить амплитуду $A^* = 2\sqrt{k+1}$ установившихся периодических автоколебаний, определяемых уравнением (20).

5. Заключение. В системе обыкновенных дифференциально-разностных уравнений, являющейся математической моделью автоколебаний вибрационного горения в приближении одной степени свободы, рассмотрена задача асимптотического анализа автоколебаний.

В случае конечного запаздывания установлено, что автоколебания в рассматриваемой системе (1) возбуждаются лишь при условии существования резонансных корней у характеристического квазиполинома соответствующей порождающей линейной системы. С помощью метода Линдштедта-Пуанкаре, адаптированного для дифференциально-разностных уравнений, получены асимптотические разложения для периодических автоколебательных решений.

При бесконечно малом запаздывании динамическая система (1) приводится к системе, близкой к консервативной. В этом случае ее предельный цикл аппроксимируется одной из замкнутых фазовых траекторий порождающей консервативной системы. При этом, даже при отсутствии механизма "отрицательного" сопротивления, проявляющегося в известных ограничениях [9-10] на вид функции $\mathbb{H}(x)$, периодические решения в системе (1) возникают из-за наличия запаздывания $\Delta = k\varepsilon > 0$.

1. *Гладышев В.Н.* Автоколебания при горении и термоядерных взаимодействиях. – Новосибирск: НИЦ ОИГГМ, Изд-во СО РАН, 1999. – 135 с.
2. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». – 2010. – 552 с.
3. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
4. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 287 с.
5. *Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 2000. – 149 с.
6. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
7. *Харкевич А.А.* Автоколебания. – М.: Гостехиздат, 1954. – 172 с.
8. *Басок Б.И., Гоцуленко В.В.* Автоколебания в распределенной модели трубы Рийке // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. XIV, № 4(48). – С. 3-13.
9. *Гоцуленко В.В.* Математическое моделирование снижения амплитуд колебаний вибрационного горения в крупных промышленных агрегатах // Математическое моделирование, РАН. – 2005. – Т. 17. – № 11. – С. 16-24.
10. *Гоцуленко В.В.* Асимптотический анализ автоколебаний при напорном перемещении жидкостей или газов в пневмо или гидросистеме // Труды ИПММ. – 2007. – Т. 14. – С. 56-62.
11. *Басок Б.И., Гоцуленко В.В.* Стабилизация неустойчивого положения равновесия при теплоподводе параметрическими колебаниями // Труды ИПММ. – 2010. – Т. 21. – С. 19-31.
12. *Басок Б.И., Гоцуленко В.В.* Теория феномена Рийке в системе с сосредоточенными параметрами // Акустический вестник. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 3-8.
13. *Басок Б.И., Авраменко А.А., Гоцуленко В.В.* Динамическое демпфирование автоколебаний в модели регенеративного воздухонагревателя с сотовыми камерами горения // Доповіді НАНУ. – 2011. – № 4. – С. 73-79.

B. I. Basok, A. A. Avramenko, V. V. Gotsulenko

Asymptotic analysis of oscillations in the pressure moving the gas excited by the combustion delay.

In a dynamic system is a mathematical model vibrational combustion oscillations in the approximation of one degree freedom, the problem of self oscillation mechanism of retardation of combustion. With the help an approximate method small parameter, adjusted for the differential-difference equations, we obtain asymptotic relations for oscillatory periodic solutions in this dynamic system.

Keywords: *delay of combustion, the asymptotic method instability, the quasi-linear system vibration combustion, self-oscillations.*

Б. І. Басок, А. О. Авраменко, В. В. Гоцуленко

Асимптотичний аналіз автоколивань при напірному переміщенні газу, збуджених запізненням згорання.

У динамічній системі, що є математичною моделлю автоколивань вібраційного горіння в наближенні одного ступеня волі, розглядається задача самозбудження автоколивань механізмом запізнення згорання. За допомогою наближеного методу малого параметра, адаптованого для диференціально-різницевих рівнянь, одержано асимптотичні співвідношення для автоколивальних періодичних розв'язків розглянутої динамічної системи.

Ключові слова: *запізнення згорання, асимптотичний метод, нестійкість, квазілінійна система, вібраційне горіння, автоколивання.*

Ин-т технической теплофизики НАН Украины, Киев
`gosul@ukr.net`

Получено 22.12.11