УДК 517.51 + 519.21

©2011. **М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков**

ПРО ОДИН КЛАС НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ЗІ СКЛАДНОЮ ЛОКАЛЬНОЮ БУДОВОЮ, БІЛЬШІСТЬ З ЯКИХ СИНГУЛЯРНІ АБО НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНІ

Досліджується скінченнопараметрична сім'я функцій, які є або сингулярними, або звивистими, зокрема, ніде не диференційовними. Вказано систему функціональних рівнянь, що визначає кожну з таких функцій в класі визначених та обмежених на $[0, 1]$ функцій. Вивчаються інтегральні, диференціальні та фрактальні властивості функцій даної сім'ї.

Ключові слова: *сингулярна функція, звивиста функція, недиференційовна функція, самоафінна множина, розмірність Хаусдорфа-Безиковича, s-кова система числення, перетворення, що зберігають фрактальну розмірність.*

1. Вступ. Неперервні функції за своїми локальними властивостями часто принципово різняться. Мова йде не про гладкі функції, а про функції зі складною локальною будовою, які мають "особливості" в кожному як завгодно малому інтервалі. До цієї "категорії" функцій відносять звивисті та сингулярні функції. Перші не мають проміжків монотонності, але в кожному як завгодно малому відрізку мають найбільше та найменше значення. Теореми Банаха-Мазуркевича [8] та Замфіреску [15] свідчать про те, що сім'ї таких функцій "немалі" , а отже, заслуговують на увагу . В останній час інтерес до таких функцій посилюється, їм присвячено чимало робіт, зокрема [4, 10, 1, 2, 3, 5]. Для них існує спільна проблема – проблема наявності ефективного "апарату" задання та дослідження. Слідуючи принципу "від простого до складного", до цих пір були вивчені функції, які мають відносно прості локальні властивості, а саме: володіють властивостями самоподібності та самоафінності. Для цього класу функцій ми шукаємо альтернативні шляхи задання та вивчення, вбачаючи в теорії функціональних рівнянь деякий потенціал.

Відмінна від сталої неперервна функція, похідна якої рівна нулю майже скрізь (у розумінні міри Лебега) називається *сингулярною*. Простим прикладом такої є функція Кантора – неперервна функція розподілу на відрізку $[0, 1]$, яка зростає в точках класичної множини Кантора і є постійною на інтервалах, суміжних з нею (її графіком є канторівські сходи).

Чи існують строго зростаючі сингулярні функції? Мало відомо, що ствердну відповідь на це, в свій час непросте, запитання ще на початку 20-го століття дав Хелінгер. Пізніше вони фігурували в роботах Мінковського [13], Серпінського [7] та ін. Вважається, що найпростіший приклад строго зростаючої сингулярної функції належить Салему [14]. Сьогодні існують десятки робіт, в яких такі функції вивчаються (див. [4, 9]).

Тривалий час сингулярні функції відносилися до класу математичної екзотики, їх до цих пір практично не можна зустріти в університетському курсі математичного аналізу, тоді як добре відома теорема Лебега стверджує, що кожну монотонну функцію f можна розкласти в лінійну комбінацію $\alpha_1 f_d + \alpha_2 f_{ac} + \alpha_3 f_s$ ($\alpha_i \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$) трьох монотонних функцій: дискретної f_d, абсолютно неперервної f_{ac} та сингулярної f_s. Більше того, в 1981 році Т. Замфіреску [15] довів, що "більшість" неперервних монотонних функцій є сингулярними, оскільки останні в метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій з супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера. Більш як за 100 років розвитку теорія сингулярних функцій збагачувалась в основному за рахунок індивідуальних теорій (досліджувались окремі функції або скінченнопараметричні сім'ї функцій), загальна ж теорія до цих пір є слабко розвинутою, вона містить невелику кількість розрізнених фактів. Разом з цим дослідження сингулярних функцій в останній час активізувалось завдяки їх зв'язку з теорією фракталів.

Похідна строго зростаючої сингулярної функції на довільному, як завгодно малому, проміжку області визначення принаймні в одній точці є нескінченною. Тому інтуїтивно здавалось, що перетворення під дією такої функції "сильно трансформують" простір. Ця наївна думка спростована в [6, 10], де доведено, що існують строго зростаючі сингулярні функції, які зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича, тоді коли деякі абсолютно неперервні – ні.

Труднощі розвитку загальної та індивідуальної теорії сингулярних функцій пов'язані з відсутністю ефективного апарату для їх задання та дослідження. В останній час для цього використовують різні системи зображення дійсних чисел і теорію рядів. Часто сингулярні функції виникають в дослідженнях з теорії ймовірностей, при вивченні розподілів випадкових величин типу Джессена-Вінтнера та їх аналогів [4], зокрема, нескінченних згорток Бернуллі. Зазначимо, що сингулярні функції домінують в класах функцій розподілу випадкових величин, цифри яких в тій чи іншій системі зображення є незалежними.

Одній сім'ї вказаних функцій присвячена дана робота.

2. Визначення функцій системою функціональних рівнянь. Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $A = \{0, 1, ..., s-1\}$, $p_0, p_1, ..., p_{s-1}$ – дійсні числа такі, що $p_0 + p_1 + ... + p_{s-1} = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_i > 0$, $p_* = \max\limits_i |p_i| < 1$, $k = 1, ..., s-1$.

Розглядається система з s функціональних рівнянь

$$f\left(\frac{i+x}{s}\right) = \beta_i + p_i f(x), i = 0, 1, ..., s-1. \tag{1}$$

Якщо $x = \alpha_1 \cdot s + \alpha_2 \cdot s^{-2} + ... + \alpha_n \cdot s^{-n} + ... \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$, то $\frac{i+x}{s} = \Delta^s_{i\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$. І тому система (1) може бути записана у вигляді

$$f\left(\Delta^s_{i\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}\right) = \beta_i + p_i f\left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}\right). \tag{2}$$

Знайдемо функції, які задовольняють систему (1), визначені на $[0, 1]$ і обмежені.

Теорема 1. *Існує лише одна функція f, яка задовольняє систему (1), є визначеною в кожній точці $[0,1]$ і обмеженою, причому її можна подати у вигляді:*

$$f(x) = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j} \right), \text{ де } x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \qquad (3)$$

Доведення. Використовуючи рівності (2) m разів, отримаємо розклад

$$f(x) = f(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \beta_{\alpha_1} + p_{\alpha_1} f(\Delta^s_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}) =$$

$$= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} p_{\alpha_1} + p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} f(\Delta^s_{\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n\ldots}) = \ldots =$$

$$= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} p_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_m} \prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j} + \left(\prod_{j=1}^{m} p_{\alpha_j} \right) f(\Delta^s_{\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{m+k}\ldots}).$$

Цей процес можна продовжувати до нескінченності, оскільки функція визначена в усіх точках $[0,1]$, а отже, має зміст вираз $f(\Delta^s_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+k}\ldots})$. Оскільки

$$\left| \prod_{j=1}^{m} p_{\alpha_j} \right| \leqslant p_*^m \to 0 (m \to \infty), \quad \left| f(\Delta^s_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+k}\ldots}) \right| \leqslant C = const,$$

то залишковий член

$$\left(\prod_{j=1}^{m} p_{\alpha_j} \right) f(\Delta^s_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+k}\ldots})$$

прямує до нуля, коли $m \to \infty$. Тому послідовність

$$B_m = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} p_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_m} (p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \ldots p_{\alpha_{m-1}})$$

має границю, що є значенням функції f в точці x. Отже, має місце розклад (3). □

Доведемо *коректність* визначення функції f рівністю (3), тобто що її значення від двох різних зображень s-ково раціонального числа $x = \Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)} = \Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n-1)((s-1))}$ співпадають. З цією метою розглянемо різницю

$$\delta = f\left(\Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)}\right) - f\left(\Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n-1)((s-1))}\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n-1} p_{\alpha_j} \right) \left(\beta_{\alpha_n} - \beta_{\alpha_n-1} - \beta_{s-1} p_{\alpha_n-1} \left(1 + p_{s-1} + p_{s-1}^2 + \ldots + p_{s-1}^k + \ldots \right) \right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n-1} p_{\alpha_j} \right) (\beta_{\alpha_n} - (\beta_{\alpha_n-1} + p_{\alpha_n-1})) = 0.$$

Отже, значення співпадають і функція визначена коректно.

Лема 1. *Функція f, визначена рівністю (3), є неперервною в усіх точках* $[0,1]$.

Доведення. Розглянемо довільне $x_0 \in [0,1]$ і різницю

$$f(x) - f(x_0) = \left(\prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j}\right)\left(f\left(\Delta^s_{\alpha_m(x)\alpha_{m+1}(x)\ldots\alpha_{m+k}(x)\ldots}\right) - f\left(\Delta^s_{\alpha_m(x_0)\ldots\alpha_{m+k}(x_0)\ldots}\right)\right),$$

де $m \in N$ таке, що $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ при $i < m$ і $\alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0)$.

1) Якщо x_0 – s-ково ірраціональна точка, то $x \to x_0$, що рівносильно $m \to \infty$, і

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant C \prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j} \ \to \ 0 \ (m \ \to \ \infty),$$

тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ і функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0 за означенням.

2) Якщо $x_0 = \Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)} = \Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n-1)((s-1))}$ – s-ково раціональне число, то можна скористатись міркуваннями пункту 1), але при розгляді випадку, коли x прямує до x_0 зліва досить використати друге зображення числа x_0, а коли x прямує до x_0 справа – перше. □

Наслідок 1. *Система функціональних рівнянь (1) в класі неперервних функцій на* $[0,1]$ *має єдиний розв'язок – функцію, визначену рівністю (3).*

3. Умови монотонності та звивистості функцій.

Означення 1. Відрізок $[\Delta^s_{c_1\ldots c_m(0)}; \Delta^s_{c_1\ldots c_m((s-1))}]$ називається циліндром (або циліндричним відрізком) рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$. Його коротко позначатимемо: $\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m}$, а приріст функції f на цьому відрізку через $\mu_f(\Delta^s_{c_1\ldots c_m})$, тобто

$$\mu_f(\Delta^s_{c_1\ldots c_m}) := f(\Delta^s_{c_1\ldots c_m((s-1))}) - f(\Delta^s_{c_1\ldots c_m(0)}).$$

Лема 2. *Має місце рівність* $\mu_f(\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m}) = \prod\limits_{i=1}^{m} p_{c_i}$.

Справді, використовуючи означення 1 і вираз значення функції (3), маємо

$$\mu_f(\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m}) = \left(\prod_{i=1}^{m} p_{c_i}\right)\left(\beta_{s-1} - \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{s-1}p^k_{s-1}\right) = \prod_{i=1}^{m} p_{c_i}.$$

Наслідок 2. *Функція f є сталою на $\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m}$ лише тоді, коли існує $p_{c_k} = 0$, де $k \leqslant m$.*

Наслідок 3. *Якщо всі $p_i \geqslant 0$, то f є неспадною, а при $p_i > 0$ – строго зростаючою.*

Лема 3. *Якщо серед чисел $p_0, \ldots, p_{s-1}$ не існує нуля і знайдеться $p_i < 0$, то функція не має жодного проміжку монотонності (є звивистою [1]).*

Доведення. Припустимо, що при виконанні умов леми знайдеться інтервал $(a,b) \subset [0,1]$ монотонності функції f. Тоді існує s-ковий циліндр $\Delta^s_{c_1\ldots c_m}$, який повністю належить (a,b), а отже, є проміжком монотонності f.

Оскільки $p_0p_1...p_{s-1} \neq 0$, то $\mu_f(\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m}) \neq 0$ і $\mu_f(\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m0}) \cdot \mu_f(\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_mi}) < 0$, тобто на одному з циліндрів $\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m0}, \Delta^s_{c_1c_2\ldots c_mi}$ функція має додатній, а на іншому – від'ємний приріст, що суперечить монотонності f на $\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m}$. □

4. Самоафінні властивості. Нагадаємо, що перетворення (бієктивне відображення множини на себе) простору R^2 називається *афінним*, якщо воно кожні три точки, які лежать на одній прямій переводить в три точки, що теж лежать на одній прямій.

Означення 2. Множина $E \subset R^2$ називається *самоафінною*, якщо існує набір φ_1, φ_2, ..., φ_n $(n > 1)$ афінних перетворень R^2 таких, що

$$E = \varphi_1(E) \cup \varphi_2(E) \cup \ldots \cup \varphi_n(E), \text{ де } \varphi_i(E) \neq \varphi_j(E) \text{ при } i \neq j. \tag{4}$$

Як відомо, кожне афінне перетворення φ_i аналітично задається формулами

$$\begin{cases} x' = a^{(i)}_{11}x + a^{(i)}_{12}y + x^{(i)}_0, \\ y' = a^{(i)}_{21}x + a^{(i)}_{22}y + y^{(i)}_0; \end{cases} \quad \text{причому} \quad \begin{vmatrix} a^{(i)}_{11} & a^{(i)}_{12} \\ a^{(i)}_{21} & a^{(i)}_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Означення 3. *Самоафінною розмірністю* самоафінної множини (4)-(5) називається число, яке є розв'язком рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} \left| a^{(i)}_{11}a^{(i)}_{22} - a^{(i)}_{21}a^{(i)}_{12} \right|^{\frac{x}{2}} = 1.$$

Легко бачити, що самоафінність множини є узагальненням самоподібності [4]. Можна довести, що самоафінна розмірність є числом не меншим розмірності Хаусдорфа-Безиковича, а при деяких умовах співпадає з нею. Якщо самоафінна множина є самоподібною, то її самоафінна розмірність співпадає з самоподібною розмірністю.

Теорема 2. *Якщо $p_0p_1\ldots p_{s-1} \neq 0$, то графік Γ функції (3) є самоафінною множиною простору $\mathbb{R}^2$, причому*

$$\Gamma = \varphi_0(\Gamma) \cup \varphi_1(\Gamma) \cup ... \cup \varphi_{s-1}(\Gamma), \tag{6}$$

де

$$\varphi_i : \begin{cases} x' &= \frac{1}{s}x + \frac{i}{s}, \\ y' &= \beta_i + p_i y; \end{cases}$$

$$\varphi_i(\Gamma) \cap \varphi_{i+1}(\Gamma) = C_{i+1}\left(\frac{i+1}{s}; \beta_{i+1}\right). \tag{7}$$

Самоафінна розмірність графіка Γ є розв'язком рівняння

$$\sum_{i=0}^{s-1} \left| \frac{p_i}{s} \right|^{\frac{x}{2}} = 1.$$

Доведення. Для доведення рівності (6) спочатку покажемо, що

$$\varphi_0(\Gamma) \cup \varphi_1(\Gamma) \cup ... \cup \varphi_{s-1}(\Gamma) \equiv G \subset \Gamma.$$

Справді, розглянемо довільну точку M графіка Γ

$$\Gamma \ni M(x; f(x)) \xrightarrow{\varphi_i} M_i\left(\frac{1}{s}x + \frac{i}{s}; \beta_i + p_i f(x)\right) = \varphi_i(M) \in \Gamma.$$

Тепер покажемо, що $\Gamma \subset G$. Нехай $M(x; f(x)) \in \Gamma$. Розглянемо число $x_1 = \Delta^2_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)...}$. Оскільки $\alpha_1(x) \in A$, то $f(x) = \beta_i + p_i f(x_1)$ і з того, що $\overline{M}(x_1; f(x_1)) \in \Gamma$ випливає, що $\varphi_i(\overline{M}) = M(x; f(x)) \in G$. Рівність (6) доведено.

Оскільки

$$O(0;0) \xrightarrow{\varphi_i} C_i\left(\frac{i}{s}; \beta_i\right),\ C(1;1) \xrightarrow{\varphi_i} C_{i+1}\left(\frac{i+1}{s}; \beta_{i+1}\right), i \in A,$$

то має місце рівність (7). Самоафінна розмірність графіка Γ є розв'язком вказаного рівняння згідно з означенням. $\square$

5. Інтегральні властивості.

Теорема 3. *Для інтеграла Лебега має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{s-1}(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{s-1}).$$

Доведення. Використовуючи адитивну властивість інтеграла Лебега, маємо

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{s}} f(x)dx + \int\limits_{\frac{1}{s}}^{\frac{2}{s}} f(x)dx + ... + \int\limits_{\frac{s-1}{s}}^{1} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{s}} p_0 f(\Delta^s_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)...})dx + \int\limits_{\frac{1}{s}}^{\frac{2}{s}} \left[p_0 + p_1 f(\Delta^s_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)...})\right] dx + ...+$$

$$+ \int\limits_{\frac{s-1}{s}}^{1} \left[\beta_{s-1} + p_{s-1} f(\Delta^s_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)...})\right] dx =$$

$$= \frac{1}{s}p_0 \int\limits_0^1 f(x)dx + p_0 x|^{\frac{2}{s}}_{\frac{1}{s}} + \frac{1}{s}p_1 \int\limits_0^1 f(t)dt + ... + \beta_{s-1}x|^1_{\frac{s-1}{s}} + \frac{1}{s}p_{s-1}\int\limits_0^1 f(t)dt.$$

де $t = \Delta^s_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)\ldots}$. Звідки

$$\left[1 - \frac{1}{s}(p_0 + p_1 + \ldots + p_{s-1})\right] \int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{s-1}{s} \int\limits_0^1 f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{s}(p_0 + (p_0 + p_1) + \ldots + (p_0 + p_1 + \ldots + p_{s-2})),$$

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{s-1}\left(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{s-1}\right). \qquad \square$$

6. Сингулярні функції.

Лема 4. *Якщо* $p_i = \dfrac{1}{s}$ *для всіх* $i \in A$, *то* $f(x) = x$. Справді, $f\left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \dfrac{\alpha_1}{s} + \dfrac{1}{s} f\left(\Delta^s_{\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \ldots = \dfrac{\alpha_1}{s} + \dfrac{\alpha_2}{s^2} + \dfrac{\alpha_3}{s^3} + \ldots = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

Лема 5. *Якщо* $p_i \geqslant 0$, $i = \overline{0, s-1}$, *то* f *є неперервною функцією розподілу на* $[0,1]$.

Доведення. Оскільки $f(0) = f(\Delta^s_{(0)}) = 0 + p_0 f(\Delta^s_{(0)})$, то $(1 - p_0) f(\Delta^s_{(0)}) = 0$, а отже, $f(0) = 0$. Оскільки $f(1) = f(\Delta^s_{(s-1)}) = \beta_{s-1} + p_{s-1} f(\Delta^s_{(s-1)})$, то $(1 - p_{s-1}) f(\Delta^s_{(s-1)}) = \beta_{s-1} = 1 - p_{s-1}$, а отже, $f(1) = 1$.

Нехай $x_1 < x_2$. Тоді існує m таке, що $\alpha_i(x_1) = \alpha_i(x_2)$ при $i < m-1$ і $\alpha_m(x_1) < \alpha_m(x_2)$. Тому

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j}(x_1)\right) \times$$

$$\times \left(\beta_{\alpha_m(x_2)} - \beta_{\alpha_m(x_1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_{m+k}(x_2)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{\alpha_{m+j}(x_2)}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_{m+k}(x_1)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{\alpha_{m+j}(x_1)}\right)\right).$$

Але

$$\beta_{\alpha_m(x_2)} - \beta_{\alpha_m(x_1)} = p_{\alpha_m(x_1)} + p_{\alpha_m(x_1)+1} + \ldots + p_{\alpha_m(x_2)-1} \geqslant p_{\alpha_m(x_1)},$$

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_{m+k}(x_2)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{\alpha_{m+j}(x_2)}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_{m+k}(x_1)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{\alpha_{m+j}(x_1)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_{m+k}(x_1)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{\alpha_{m+j}(x_1)}\right) \geqslant -p_{\alpha_m(x_1)} \sum_{k=0}^{\infty}\left[\beta_{s-1} p_{s-1}^k\right] = -p_{\alpha_m(x_1)}.$$

Тому $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$ і функція f є неспадною. Таким чином, за лемою 1 і доведеними властивостями, вона є неперервною функцією розподілу на $[0, 1]$. $\square$

Теорема 4. *Функція f є функцією розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими s-ковими цифрами, а саме:*

$$\xi = \Delta^s_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}, \text{ де } \eta_k - \text{ незалежні і } P\{\eta_k = i\} = p_i, i = \overline{0, s-1}.$$

Доведення. Згідно з означенням функції розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, але

$$\{\xi < x\} = \{\eta_1 < \alpha_1(x)\} \cup \{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 < \alpha_2(x)\} \cup ...$$

$$\cup\{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 = \alpha_2(x), ..., \eta_{k-1} = \alpha_{k-1}(x), \eta_k < \alpha_k(x)\} \cup ...,$$

причому події, що входять до об'єднання, несумісні. Враховуючи незалежність η_k,

$$P\{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 = \alpha_2(x), ..., \eta_{k-1} = \alpha_{k-1}(x), \eta_k < \alpha_k(x)\} = \beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)}.$$

А тому має місце рівність (3). Отже, $f(x) = F_\xi(x)$. $\square$

Нагадаємо, що спектром неспадної функції називається множина всіх її точок росту. Відомо [4], що спектр є замкненою, а для неперервної функції – досконалою множиною.

Лема 6. [4] *Якщо $p_i \geqslant 0$, то спектром функції F_ξ є множина $S_{F_\xi} = \{x : x = \Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}, p_{\alpha_j} > 0 \forall j \in N\}$, яка співпадає з $[0, 1]$, коли $p_i > 0$ для кожного $i \in A$, і є ніде не щільною самоподібною нуль-множиною Лебега, множиною з самоподібною розмірністю $\log_s m$, де $m = \#\{i : p_i > 0, i \in A\}$, коли існує $p_i = 0$.*

Лема 7. *Якщо в s-ково ірраціональній точці x_0 існує похідна $f'(x_0)$, то*

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(sp_{\alpha_j(x_0)}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(sp_{\alpha_j(x_0)}\right). \tag{8}$$

Доведення. Оскільки $x_0 = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, то

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_f\left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)}{|\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}|} = \lim_{n\to\infty} s^n \prod_{j=1}^{n} \left(p_{\alpha_j(x_0)}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(sp_{\alpha_j(x_0)}\right). \qquad \square$$

Наслідок 4. *Якщо існує $p_m = 0$, то функція f є сингулярною.*

Зауваження. Якщо $p_i < 0, p_m = 0$, то f не є монотонною на $[0, 1]$, але є сингулярною.

Наслідок 5. *Якщо $s|p_i| > 1$ для довільного $i = \overline{0, s-1}$, то функція f не має скінченної похідної в жодній s-ково ірраціональній точці відрізка $[0, 1]$.*

Теорема 5. *Якщо всі $p_i \geqslant 0$ і існує $p_k \neq \dfrac{1}{s}$, то функція $f(x) = F_\xi(x)$ є сингулярною, строго зростаючою, якщо $p_i > 0$, $i = \overline{0, s-1}$, і канторівського типу, якщо існує $p_m = 0$.*

Для $p_i > 0, i = \overline{0, s-1}$, сингулярність F_ξ вперше довів Салем [14], використавши при цьому метод нормальних чисел. Пізніше для $s = 2$ це робилося в роботах [11, 12].

Якщо всі $p_i \geqslant 0$, причому існує $p_m = 0$, то спектром функції F_ξ буде множина чисел, які в своїх s-кових зображеннях не використовують цифру m. Вона, як відомо, має нульову міру Лебега. На суміжних з цією множиною інтервалах функція є сталою, отже, має похідну рівну нулю. А тому сингулярність функції в даному випадку очевидна.

7. Функція F_ξ як неперервне перетворення відрізка $[0, 1]$. Кажуть [10], що *перетворення g відрізка $[0, 1]$ зберігає розмірність* Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(\cdot)$, якщо для довільної борелівської множини $E \subset [0, 1]$ і її образу $E' = g(E)$ розмірності співпадають, тобто $\alpha_0(E) = \alpha_0(E')$. Якщо існує борелівська множина $E \subset [0, 1]$ така, що $\alpha_0(E) \neq \alpha_0(E')$, то кажуть, що перетворення g не зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича. Клас неперервних перетворень $[0, 1]$ вичерпується строго зростаючими функціями розподілу на $[0, 1]$ та функціями виду $q(x) = 1 - F(x)$, де F – функція розподілу.

Теорема 6. *Якщо серед додатних чисел $p_0, p_1, ..., p_{s-1}$ існує принаймні одне число, відмінне від $\frac{1}{s}$, то функція F_ξ розмірність Хаусдорфа-Безиковича не зберігає.*

Доведення. Нехай $s = 2$. Для кожного $i \in \{0, 1\}$ розглянемо множину

$$D = D\left[2, \overline{ii}\right] \equiv \left\{x: \ x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}, \text{ де } (\alpha_k, \alpha_{k+1}) \neq \ (i, i) \ \forall\ k \in N\right\}.$$

Очевидно, що D є самоподібною множиною, оскільки $D\left[2, \overline{ii}\right] = D_1 \cup D_2$, де

$$D_1 = \Delta^2_{i-1} \cap D, \ D_2 = \Delta^2_{i(1-i)} \cap D, \quad \text{причому} \quad D \overset{\frac{1}{2}}{\sim} D_1 \text{ і } D \overset{\frac{1}{4}}{\sim} D_2.$$

Самоподібна розмірність [4] множини D є розв'язком рівняння $(2)^{-x} + (4)^{-x} = 1$, тобто $x = 1 - \log_2(\sqrt{5} - 1)$, і співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича.

Образом D при перетворенні F_ξ є множина $D' = \{y: \ y = F_\xi(x), \ x \in D\}$, яка є самоподібною: $D' = D'_1 \cup D'_2$, де $D' \overset{p_{1-i}}{\sim} D'_1 = F_\xi(D_1), \ D' \overset{p_0p_1}{\sim} D'_2 = F_\xi(D_2)$, причому $D'_1 \cap D'_2 = \varnothing$. Рівняння для визначення самоподібної розмірності множини D' має вигляд

$$p_i^x + (p_0p_1)^x = 1.$$

Оскільки $p_0 \neq \frac{1}{2}$, то $p_0 < \frac{1}{2}$ або $p_1 < \frac{1}{2}$. Розглянемо i таке, що $p_i < \frac{1}{2}$. Покажемо, що самоподібні розмірності множин D і D' для такого i не співпадають.

Справді, якщо $p_i < \frac{1}{2}$, то

$$p_i^x < \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ і } (p_0p_1)^x < \left(\frac{p_0 + p_1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

Тому самоподібна розмірність множини D менша, ніж в множини D'. Оскільки для даних множин розмірність Хаусдорфа-Безиковича співпадає з самоподібною розмірністю, то функція F_ξ розмірність Хаусдорфа-Безиковича не зберігає.

Нехай $s > 2$ і існує $p_i \neq \frac{1}{s}$. Можливі випадки: 1) $p_i < \frac{1}{s}$; 2) $p_i > \frac{1}{s}$. Множина

$$C \equiv C[s, V] = \{x : x = \Delta^s_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}, \alpha_n \in V = \{j, k\}\}$$

і її образ $C' = f(C)$ є самоподібними і їх самоподібна розмірність співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича.

Розмірність першої множини є розв'язком рівняння $2 \cdot s^{-x} = 1$, тобто $x = \log_s 2$, другої – $p_j^x + p_k^x = 1$. Якщо p_j і p_k задовольняють одну з умов: а) одночасно більші $\dfrac{1}{s}$, або менші $\dfrac{1}{s}$; б) одне з них більше, а інше рівне $\dfrac{1}{s}$; в) одне менше, а інше рівне $\dfrac{1}{s}$, то розв'язок останнього рівняння не дорівнює $\log_s 2$, а отже, множини C і C' мають різні розмірності.

Покажемо, що завжди існує пара (j, k) така, що виконується одна з трьох вказаних умов. Справді, якщо знайдеться $p_a = \dfrac{1}{s}$, то виконується умова б) або в) і $\{j, k\} = \{i, a\}$. Якщо $p_a \neq \dfrac{1}{s}$ $\forall\, a \in A = \{0, 1, ..., s-1\}$, то завжди серед $p_0, p_1, ..., p_{s-1}$ знайдеться принаймні два числа, які є меншими або більшими $\dfrac{1}{s}$ одночасно. Теорему доведено. $\Box$

8. Диференціальні властивості звивистих функцій. Нехай серед чисел $p_0, p_1, ..., p_{s-1}$ є від'ємні. Нагадаємо, що $\beta_i = p_0 + p_1 + ... + p_{i-1} > 0$. В цій ситуації $s > 2$. Розглянемо випадок $s = 3$.

Лема 8. *Якщо $p_1 \cdot p_2 < 0$, то $3p_0 > 1$ або $3p_j > 1$, де $p_j > 0$.*

Доведення від супротивного. Нехай при виконанні умов твердження одночасно виконуються нерівності $3p_0 \leqslant 1$ і $3p_j \leqslant 1$. Тоді

$$p_0 + p_j \leqslant \frac{2}{3} \;\text{ або }\; 1 - p_i \leqslant \frac{2}{3},$$

де $i = \{1, 2\} - \{j\}$. Звідки $p_i \geqslant \dfrac{1}{3}$, що суперечить від'ємності p_i. $\Box$

Теорема 7. *Якщо $p_1 < 0$, то функція f не має похідної в жодній трійково-раціональній точці відрізка* $[0, 1]$.

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta^3_{a_1 \ldots a_n(0)} = \Delta^3_{a_1 \ldots a_{n-1}(a_n - 1)22 \ldots 2 \ldots}$ – трійково раціональна точка. Розглянемо дві послідовності

$$x_k^{'} = x_0 + \frac{1}{3^{n+k}} = \Delta^3_{a_1 \ldots a_{n-1} a_n \underbrace{0 \ldots 01}_{k}(0)}, \quad x_k^{''} = x_0 - \frac{1}{3^{n+k}} = \Delta^3_{a_1 \ldots a_{n-1}(a_n - 1) \underbrace{22 \ldots 2}_{k}(0)},$$

які прямують до x_0. Для них

$$f(x_k^{'}) - f(x_0) = \beta_1 p_0^{k-1} \left(\prod_{i=1}^{n} p_{a_i} \right) = p_0^k \left(\prod_{i=1}^{n} p_{a_i} \right);$$

$$f(x_0) - f(x_k'') = \sum_{j=2}^{+\infty} \left[\beta_{\alpha_{n+k+j}(x_0)} \left(\prod_{i=1}^{n-1} p_{a_i} \right) \cdot p_{a_n - 1} \cdot p_2^{k+j-1} \right] =$$

$$= p_2^k p_{a_n - 1} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n-1} p_{a_i} \right) [\beta_2 + \beta_2 p_2 + \beta_2 p_2^2 + ...] = p_2^k p_{a_n - 1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} p_{a_i}.$$

Звідки

$$A_k' = \frac{f(x_k') - f(x_0)}{x_k' - x_0} = 3^{n+k} p_0^k \prod_{i=1}^{n} p_{a_i} = (3p_0)^k (3p_{a_n}) \prod_{i=1}^{n-1} 3p_{a_i};$$

$$A_k'' = \frac{f(x_0) - f(x_k'')}{x_0 - x_k''} = (3p_2)^k (3p_{a_n - 1}) \prod_{i=1}^{n-1} 3p_{a_i}.$$

Зауважимо, що $c_1 = \prod\limits_{j=1}^{n-1} 3p_{a_j} = const$, $c_2 = 3p_{a_n} \cdot c_1 = const$, $p_{a_n} p_{a_n - 1} < 0$. Тоді

1) при $3p_0 > 1$ і $3p_2 > 1$ одна з послідовностей $\left(A_k'\right)$, $\left(A_k''\right)$ прямує до ∞, а інша до $-\infty$;

2) при $3p_i > 1$ і $3p_{2-i} < 1$ одна з послідовностей прямує до 0, а інша до $\pm\infty$;

3) якщо ж $3p_i = 1$, то $3p_{2-i} > 1$, а отже, одна з послідовностей $\left(A_k'\right)$, $\left(A_k''\right)$ є сталою, а інша прямує до $\pm\infty$.

В усіх випадках $\lim\limits_{k\to\infty} A_k' \neq \lim\limits_{k\to\infty} A_k''$, що свідчить про те, що $f'(x_0)$ не існує. $\square$

Наслідок 6. *Якщо* $p_1 < -\frac{1}{3}$, *а* $p_0 = p_2$, *то функція* f *є ніде не диференційовною.*

1. *Козырев С.Б.* О топологической густоте извивающихся функций // Мат. заметки. – 1983. – Т. 33, № 1. – С. 71-76.
2. *Панасенко О.Б.* Розмірність Хаусдорфа-Безиковича однієї неперервної ніде не диференційовної функції // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 9. – С. 1225-1239.
3. *Працевитый Н.В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. – К.: КГПИ, 1989. – С. 95-105.
4. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
5. *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде недиференційовної функції // Наук. записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2002. – № 3. – С. 351-362.
6. *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича // Динамічні системи: Пр. Укр. мат. конгр. – 2001. – К.: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 77-93.
7. *Серпинскій В.* Элементарный примѣръ возрастающей функціи имѣющей почти всюду производную равную нулю // Мат. сб. – 1916. – Т. 30, вып. 3.
8. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наук. думка, 1992. – 208 с.
9. *Albeverio S., Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits // Random Oper. Stochastic Equations. – 2007. – Vol. 15, no. 1. – P. 89-97.
10. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergodic Theory Dynam. Systems. – 2004. – Vol. 24, no. 1. – P. 1-16.

11. *Chatterji S.D.* Certain induced measures on the unit interval // J. London Math. Soc. – 1963. – Vol. 38. – P. 325-331.
12. *Marsaglia G.* Random variables with independent binary digits // Ann. Math. Statist. – 1971. – Vol. 42, № 2. – P. 1922–1929. – Те саме: Марсалья Дж. Случайные величины с независимыми двоичными цифрами // Кибернет. сб. – 1983. – Вып. 20. – С. 216-224.
13. *Minkowski H.* Gesammelte Abhandlungen. – Berlin, 1911. – Bd 2. – P. 50-51.
14. *Salem R.* On some singular monotonic functions which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – Vol. 53, no. 3. – P. 427-439.
15. *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular // Amer. Math. Monthly. – 1981. – Vol. 88, no. 1. – P. 47-49.

M. V. Pratsiovytyi, A. V. Kalashnikov

On a class of continuous functions with complicated local structure, most of with are singular or non-differentiable.

We consider finite-parameter family of functions consisting of singular, nowhere monotone and nowhere differentiable functions. We give the system of functional equations defining each of these functions in the class of bounded functions defined on $[0,1]$. Integral, differential and fractal properties of the functions belonging to this family are studied.

Keywords: *singular function, nowhere monotone function, non-differentiable function, self-affine set, Hausdorff-Besicovitch, s-adic numeration system, fractal dimension preserving transformations.*

М. В. Працевитый, А. В. Калашников

Об одном классе непрерывных функций со сложным локальным строением, большинство из которых сингулярные или недифференцированные.

Исследуется конечнопараметрическое семейство функций, которые являются либо сингулярными, либо извивающимися, в частности, нигде не дифференцируемыми. Указана система функциональных уравнений, определяющая каждую из таких функций в классе определенных и ограниченных на $[0,1]$ функций. Изучаются интегральные, дифференциальные и фрактальные свойства функций данного семейства.

Ключевые слова: *сингулярная функция, извивающаяся функция, недифференцируемая функция, самоаффинное множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича, s-адическая система исчисления, преобразования, сохраняющие фрактальную размерность.*

Національний педагогічний ун-т ім. М.П. Драгоманова
prats4@yandex.ru
kalashnikov@bigmir.net

Получено 14.12.11