УДК 517.5

©2011. **А. Ю. Иванов**

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ БОРСУКА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Рассматривается задача о разбиении фигур на части меньшего диаметра в многомерных пространствах. Существенно расширен класс множеств, для которых имеет место гипотеза К. Борсука.

Ключевые слова: *выпуклое множество, фигура постоянной ширины, опорная функция, диаметр, разбиение множеств на части меньшего диаметра.*

1. Введение. Пусть $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Для непустого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ величина $diamM = \sup\limits_{x,y \in M} |x-y|$ называется диаметром M.

Толчком в развитии проблематики разбиения фигур на меньшие части можно, по-видимому, считать беседу, состоявшуюся в 1914г., между Анри Лебегом и венгерским математиком Палом, в ходе которой Лебег сформулировал известную задачу о нахождении универсальной покрышки наименьшей площади [1]. Затем в 1920г. Пал опубликовал свои результаты разработки данной задачи. Среди них была лемма:

Лемма 1.1. *Всякая плоская фигура диаметра d может быть заключена в правильный шестиугольник, у которого расстояние между параллельными сторонами равно d.*

После этого польский математик Кароль Борсук заметил, что такой правильный шестиугольник можно разбить на 3 части, каждая из которых имеет диаметр меньший d. Кроме этого, в 1932г. Борсук доказал, что n-мерный шар нельзя разбить на n частей, обладающих таким же свойством. Видимо именно эти два факта привели к тому, что в 1933г. К. Борсук выдвинул гипотезу о том, что всякое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ можно разбить на $n+1$ часть, диаметра меньшего $diamG$ [2, гл. 1, § 3].

С этого момента проблема Борсука заняла место одной из центральных задач комбинаторной геометрии. Постепенно появилась целая плеяда родственных задач, среди которых, и известная проблема освещения, и проблема покрытия гомотетическими телами, решение которых во многом связано с проблемой Борсука. Ею занимались такие известные математики как Хадвигер, Болтянский, Данцер и многие другие.

Процесс выхода из плоскости дался довольно тяжело. Только в 1955г. Эглстон подтвердил данную гипотезу в $\mathbb{R}^3$, затем спустя два года этот результат повторили одновременно Грюнбаум и Хеппеш [3, гл. 5, § 23]. Однако, предложенные ими методы не давали возможности решить ее в пространствах большей размерности.

Тем не менее, справедливость гипотезы никто не подвергал сомнению, считалось, что подтверждение ее для произвольных размерностей это лишь вопрос времени. Так продолжалось вплоть до 1993г., когда Джефф Канн и Гил Калаи построили первый контрпример к гипотезе [4]. Они показали, что в размерности 2014 существует тело, для которого предположение Борсука не верно. К настоящему моменту русским математиком Райгородским показано, что такие контрпримеры существуют во всех размерностях больших 135 [5, гл. 4, п. 4.3].

Таким образом, на первый план выходит вопрос описания множеств, для которых данное разбиение все-таки имеет место. Первым результатом в этом направлении является теорема, полученная Г. Хадвигером в 1946г. [6].

Теорема 1.1. *Каждое выпуклое ограниченное тело из $\mathbb{R}^n$, имеющее гладкую границу, можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра.*

Из этого утверждения видно, что наибольшую трудность, в плане разбиения на части меньшего диаметра, создают именно нерегулярные точки на границе множества.

В 1952г. Андерсон и Кли получили ограничения на множества с негладкой границей [7]. Они показали, что если каждая точка нерегулярности удовлетворяет определенным, достаточно сильным условиям, то такое множество действительно можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра. А в 1960г. В.Г. Болтянский выявил зависимость положительного решения проблемы Борсука от количества особых точек границы данного множества [8]. Он показал, что в случае, когда таких точек не более n, то для множества из $\mathbb{R}^n$ гипотеза имеет место. На данный момент эти два результата являются наиболее сильными.

В данной работе получены усиления результатов В.Г. Болтянского [8] и Андерсона, Кли [7]. Показано, что гипотеза Борсука имеет место для всех фигур постоянной ширины из $\mathbb{R}^n$, у которых множество точек нерегулярности удовлетворяет определенным ограничениям.

Наличие следующего утверждения в теории выпуклых множеств указывает на достаточность рассмотрения гипотезы Борсука только для класса замкнутых фигур постоянной ширины [3, теорема 24.1].

Теорема 1.2. *Пусть $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное множество, тогда $\exists G \subset \mathbb{R}^n$ - фигура постоянной ширины равной $diam\tilde{G}$ такая, что $\tilde{G} \subseteq G$.*

2. Формулировка основного результата. Определим функцию $\chi : G \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел, G – фигура постоянной ширины, следующим образом. Для $x \in G$ положим $\chi(x)$ равной количеству диаметров фигуры G, проходящих через точку x. Если множество таких диаметров бесконечно, будем обозначать $\chi(x) = \infty$. Введем также функцию $\varsigma : \mathbb{S}^{n-1} \to \partial G$, где $\mathbb{S}^{n-1}$ – сфера в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1, G – фигура постоянной ширины, следующим образом. Для $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ положим

$$\varsigma(\theta) = x, \quad \text{где} \quad x, y \in \partial G, |x-y| = diamG \text{ и } x - y = \theta diamG, \tag{1}$$

т.е. x, y – диаметральные точки G в направлении θ.

Главным результатом данной работы является

Теорема 2.1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины, $EP = \{x | x \in \partial G : \chi(x) = \infty\}$, L – множество всех компонент связности множества $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP\}$. Пусть также выполняются следующие условия:*

(i) для любого $U \in L$

$$\sup_{\alpha,\beta\in U} |\alpha-\beta| < \sqrt{2}-\sigma$$

при некотором $\sigma > 0$*, не зависящем от* U*;*

(ii) если $U, V \in L$ *и* $U \backslash \tilde{V} \neq \emptyset$*, и* $\tilde{V} \backslash U \neq \emptyset$*, где* $\tilde{V} = \{-\beta | \beta \in V\}$*, то* $int(\tilde{V}) \cap U = \emptyset$.

Тогда существуют $Y_0, Y_1, ..., Y_n \subset G$ *такие, что* $diamY_i < diamG, i = \overline{0,n}$ *и* $\cup_{i=0}^n Y_i = G$.

Заметим, что несмотря на поставленное в условии теоремы 2.1, на первый взгляд, сильное ограничение класса исходных множеств классом фигур постоянной ширины, фактически это ограничение несущественно. Этот факт отражен в следствии 2.1.

Следствие 2.1. *Пусть* $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^n$ *– ограниченное множество. Тогда, если фигура постоянной ширины* G *удовлетворяет условиям теорем 1.2 и 2.1, то* $\tilde{G}$ *можно покрыть* $n+1$ *фигурой с диаметрами строго меньшими* $diam\tilde{G}$.

Тем не менее данное условие значительно усложняет применение теоремы 2.1 на практике, так как требует построения мажорирующей фигуры постоянной ширины для каждого множества из $\mathbb{R}^n$. Однако из теоремы Г. Хадвигера 1946г.[6] видно, что в смысле проблемы Борсука особое значение имеют точки нерегулярности на границе исходного множества G, т.е. в терминах теоремы 2.1 множество EP. Таким образом, разбить G на $n+1$ часть меньшего диаметра означает покрыть EP $n+1$ множеством с диаметрами меньшими $diamG$. Эти соображения позволяют очевидным образом обобщить теорему 2.1 на класс произвольных (вообще говоря, необязательно даже выпуклых) множеств из $\mathbb{R}^n$.

Следствие 2.2. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^n$ *– фигура постоянной ширины,* $EP = \{x | x \in \partial G : \chi(x) = \infty\}$*. Тогда если всякая точка из* EP *является изолированной, то существуют* $Y_0, Y_1, ..., Y_n \subset G$ *такие, что* $diamY_i < diamG, i = \overline{0,n}$ *и* $\cup_{i=0}^n Y_i = G$.

3. Вспомогательные утверждения. Прежде всего введем используемые далее обозначения. Для $a, b \in \mathbb{R}^n$ символ (a, b) обозначает скалярное произведение векторов a и b. Пусть F – множество из $\mathbb{R}^n$, тогда его замыкание, множество его внутренних точек и его границу будем обозначать $cl(F)$, $int(F)$ и ∂F, соответственно. Отметим, что для любого ограниченного множества $F \subset \mathbb{R}^n$

$$diamF = diamcl(F) = \max_{x,y\in\partial F} |x-y|,$$

таким образом, в дальнейшем будем работать с классом замкнутых множеств.

Далее в этом разделе мы рассмотрим некоторые вспомогательные результаты.

Для последующего использования нам понадобится следующее утверждение [3, гл. 5, § 23].

Лемма 3.1. *Пусть* $F \subset \mathbb{R}^n$ *– фигура постоянной ширины, тогда для всех* $x \in \partial F$ *существует* $y \in \partial F$ *такой, что* $|x-y| = diamF$.

Следующая теорема доказана К. Борсуком в 1932г. [9]

Теорема 3.1. *Пусть $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ – шар радиуса 1, тогда существуют $X_0, X_1, ..., X_n$ – замкнутые множества, такие, что $\bigcup\limits_{i=0}^{n} X_i \supseteq B_1$ и $diamX_i < 2, i = \overline{0,n}$.*

Пусть F – фигура постоянной ширины 1. Рассмотрим основные свойства функции $\varsigma(\theta) : \mathbb{S}^{n-1} \to \partial F$, введенной в (1).

Свойство 1. Для любого $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ существует единственное $x \in \partial F$ такое, что $\varsigma(\theta) = x$.

Доказательство. Из определения фигур постоянной ширины следует, что для любого $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ существуют $x, y \in \partial F$ такие, что $|x - y| = 1$ и $x - y = \theta$.

Допустим, что $\exists x_1 \in \partial F : \varsigma(\theta) = x_1 \neq x$. Тогда из (2.1) следует, что $\exists y_1 \in \partial F : x_1 - y_1 = \theta$, откуда получаем $y_1 \neq y$. Так как $x_1 \neq x$, то $|x - x_1| = \delta > 0$, значит $|y - y_1| = \delta$. Тогда, учитывая равенства $|x - y| = 1$ и $|x_1 - y_1| = 1$, из неравенства треугольника имеем $|x - y_1| > |x - y| = 1$. Получили противоречие, поскольку $diamF = 1$. $\square$

Свойство 2. Для любого $x \in \partial F$ существует $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\varsigma(\theta) = x$.

Доказательство. По Лемме 3.1 $\forall x \in \partial F \exists y \in \partial F : |x - y| = 1$, тогда $(x - y) \in \mathbb{S}^{n-1}$ и из (2.1) находим $\varsigma(x - y) = x$. Теперь достаточно положить $\theta = x - y$. $\square$

Свойство 3. ς – непрерывна на $\mathbb{S}^{n-1}$.

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из непрерывности изменения диаметральных точек при выборе опорных плоскостей в фигурах постоянной ширины [3, гл. 5, § 23].

Свойство 4. Пусть M – компакт из $\mathbb{S}^{n-1}$, тогда $\varsigma(M)$ – компакт из ∂F.

Это утверждение является очевидным следствием непрерывности отображения ς.

Введем также функцию $\chi^* : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ такую, что

$$\chi^*(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(\varsigma(\theta)), \tag{2}$$

где функция $\chi : F \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ введена в пункте 2.

Лемма 3.2. *Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины 1, тогда для всех $x \in F$ выполняется неравенство $\chi(x) \geq 1$.*

Доказательство. Введем опорную функцию [10, гл. 3, § 13] $\delta^* : F \to R^1$ такую, что $\delta^*(x) = \sup\limits_{y \in F} |x - y|$. Тогда для любого $x \in F$ существует $\mu \leq 1$ такое, что $\delta^*(x) = \mu$. Таким образом, существует $z \in \partial F$, для которого выполняется равенство $|z - x| = \mu$.

Рассмотрим n-мерный шар $B_\mu(x) = \{y||y - x| \leq \mu\}$. Так как $\delta^*(x) = \mu$, то $F \subseteq B_\mu(x)$. Проведем касательную $(n-1)$-мерную гиперплоскость X к $B_\mu(x)$ через точку z, тогда $(z - x)$ является нормальным вектором к X.

Так как $X \cap F = z$, то X – опорная гиперплоскость к множеству F [3, гл. 5, § 23]. Значит, $\exists w \in F : |z - w| = 1$ и $(z - w)$ – нормальный вектор к X, тогда точка x принадлежит прямой, проходящей через точки z, w. Лемма доказана. $\square$

Определение 3.1. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$, будем называть дугой $\breve{\theta_1\theta_2}$ – криволинейный отрезок наименьшей длины, соединяющий точки θ_1, θ_2 по $\mathbb{S}^{n-1}$.

Лемма 3.3. *Пусть* $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ *такие, что* $\varsigma(\theta_1) = \varsigma(\theta_2)$, *тогда для любого* $\theta \in \theta_1 \breve{} \theta_2$ *выполняется* $\varsigma(\theta) = \varsigma(\theta_1)$.

Доказательство леммы следует из непрерывности функции ς.

Следствие 3.1. *Пусть* $F \subset \mathbb{R}^n$ *– фигура постоянной ширины* 1, *тогда для любого* $x \in \partial F$, *либо* $\chi(x) = 1$, *либо* $\chi(x) = \infty$. Доказательство непосредственно следует из Лемм 3.2, 3.3

Определение 3.2. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины 1, а $\chi : F \to \mathbb{Z}_+$ – функция, заданная в пункте 2. Будем называть множество $EP \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \partial F : \chi(x) = \infty\}$ множеством особых точек фигуры F

Лемма 3.4. *Пусть* $F \subset \mathbb{R}^n$ *– фигура постоянной ширины* 1, EP *– множество особых точек* F, L *– множество всех компонент связности множества* $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP\}$. *Тогда для любых* $\theta_1 \in U, \theta_2 \in V$, *где* $U, V \in L (U \neq V)$, *существует* $\theta \in \theta_1 \breve{} \theta_2$ *такое, что* $\chi^*(\theta) = 1$.

Доказательство. Допустим, существуют такие $\theta_1 \in U, \theta_2 \in V$, где $U, V \in L(U \neq V)$, что для всех $\theta \in \theta_1 \breve{} \theta_2$ имеет место $\chi^*(\theta) \neq 1$, тогда из следствия 3.1 получаем $\chi^*(\theta) = \infty$. Из определения множеств U, V получаем $\theta_1 \breve{} \theta_2 \subset U$ и $\theta_1 \breve{} \theta_2 \subset V$. Получили противоречие с тем, что $U \neq V$. Лемма доказана. □

Лемма 3.5. *Пусть* $F \subset \mathbb{R}^n$ *– фигура постоянной ширины* 1, $\varsigma : \mathbb{S}^{n-1} \to \partial F$ *и* $\chi^* : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{Z}_+$ *– функции, заданные в (1) и (2). Пусть также* $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$ *– компактное множество, такое, что* $diamX < 2$ *и для любого* $\alpha \in \partial X$ *выполняется* $\chi^*(\alpha) = 1$. *Тогда* $diam\varsigma(X) < 1$, *где* $\varsigma(X) = \{x | x = \varsigma(\alpha), \alpha \in X\}$.

Доказательство. Предположим, что $diam\varsigma(X) = 1$, тогда существуют $x, y \in \varsigma(X) : |x-y| = 1$. Из определения множества $\varsigma(X)$ получаем, что $\exists \theta, \beta \in X : \varsigma(\theta) = x$ и $\varsigma(\beta) = y$.

Если $\chi^*(\theta) = \chi^*(\beta) = 1$, то из (1) следует, что $x - y = \theta$ и $y - x = \beta$. Значит, $\theta = -\beta$, тогда $|\theta - \beta| = |\theta - (-\theta)| = 2$. Это противоречит условию $diamX < 2$.

Если $\chi^*(\theta) = \infty, \chi^*(\beta) = 1$, положим $M = \{\alpha | \varsigma(\alpha) = x\}$. Из леммы 3.3 заключаем, что M – связное, а так как X – замкнутое выпуклое и для любого $\alpha \in \partial X$ выполняется $\chi^*(\alpha) = 1$, то $M \subset X$. Так как $y - x = \beta \Leftrightarrow x - y = (-\beta)$, то из (1) $(-\beta) \in M \Rightarrow (-\beta) \in X \Rightarrow |\beta - (-\beta)| = 2$, получили противоречие с $diamX < 2$.

Аналогично в случае $\chi^*(\theta) = \chi^*(\beta) = \infty$.

Лемма доказана. □

4. Дополнительные построения. В этом разделе мы построим систему подмножеств $(n-1)$-мерной сферы, образы которых при действии функции ς имеют диаметры, строго меньшие диаметра исходного множества.

Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – множество, удовлетворяющее условиям теоремы 2.1, EP – множество особых точек F, L – множество всех компонент связности множества $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP\}$. Обозначим $\sigma = \sqrt{2} - \sup\limits_{U \in L} \sup\limits_{\alpha, \beta \in U} |\alpha - \beta|$, тогда из условий теоремы 2.1 $\sigma > 0$. Пусть также для любого множества V: $\tilde{V} = \{-\beta | \beta \in V\}$.

Введем дополнительное множество L' такое,что $U \in L'$ тогда и только тогда, когда $U \in L$ и для всех $V \in L$ выполняется $\tilde{U} \nsubseteq V$. Таким образом, учитывая условия теоремы 2.1, для всех $U, V \in L'$ верно равенство $U \cap int(\tilde{V}) = \emptyset$.

Построим вспомогательные множества $K(U) = \bigcup_{\alpha \in cl(U)} (B_\nu(\alpha)) \cap \mathbb{S}^{n-1}$, где $B_\nu(x) = \{y||y-x| \leq \nu\}$,а $\nu = \inf_{\alpha \in U}\{\frac{\sigma}{4}, \frac{1}{2}\inf_{\beta \in V: V \neq U}|\alpha - \beta|\}$, тогда $\Theta \subseteq \bigcup_{U \in L \backslash L'} K(U) \bigcup_{U \in L'} U$ и для всех $U \in L \backslash L'$ верно неравенство $diam K(U) \leq \sqrt{2} - \frac{\sigma}{2}$, так как $diam U \leq \sqrt{2} - \sigma$.

Построение множеств $X(\theta, F), X(\theta, F, \varepsilon)$**.** Пусть $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Построим множество $X(\theta, F) \subset \mathbb{S}^{n-1}$.

Проведем $(n-1)$ мерную гиперплоскость X такую, что θ – нормаль к X и $0 \in X$ (где точка 0 – центр $\mathbb{S}^{n-1}$).Пусть $M = \{\alpha | \alpha \in \mathbb{S}^{n-1} \cap X, \chi^*(\alpha) = \infty\}$, $M^* = \{U \in Ł' |$ существует $\alpha \in M \cap U\}$.

Рассмотрим семейства множеств $\{U'\}_{U \in M^*}$ и $\{U^*\}_{U \in M^*}$, где $U' = \bigcup_{V \in L: V \subset \tilde{U}} K(\tilde{V}) \cup U$, а $U^* = \bigcup_{V \in L: V \subset \tilde{U}} K(V) \cup \tilde{U}$. По лемме 3.4 $\inf_{\alpha \in U', \beta \in V'} |\alpha - \beta| > 0$ (где $U' \neq V'$), а из следствия 3.1 для всякого $\alpha \in int[\bigcup_{\beta \in \partial U^*} B_{\nu/2}(\beta) \cap U^*]$ выполняется равенство $\chi^*(\alpha) = 1$.

Пусть $X^*(\theta, F) = [\mathbb{S}^{n-1} \cap \{\alpha | (\alpha, \theta) \geq 0\}] \bigcup_{U \in M^*} U^* \backslash [\bigcup_{U \in M^*} U']$. Положим теперь $X(\theta, F) = cl(X^*(\theta, F))$.

Замечание 4.1. Из построения видно, что если $\alpha \in \partial X(\theta, F)$, то $(-\alpha) \in \partial X(\theta, F)$.

Далее пусть

$$\varepsilon = \inf_{\alpha \in \partial X(\theta, F)} \{\frac{1}{n+1}, \frac{\sigma}{8}, \frac{1}{4} \inf_{\beta \in int X(\theta, F): \chi^*(\beta) = \infty} |\alpha - \beta|\}.$$

Так как F удовлетворяет условиям теоремы 2.1, то из леммы 3.4 и построения семейства $\{U'\}_{U \in M^*}$ следует, что $\varepsilon > 0$.

Пусть теперь

$$X(\theta, F, \varepsilon) = cl(\mathbb{S}^{n-1} \backslash X^*(\theta, F, \varepsilon)),$$

где $X^*(\theta, F, \varepsilon) = \bigcup_{x \in cl(\mathbb{S}^{n-1} \backslash X(\theta, F))} B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{S}^{n-1}$, а $B_\varepsilon(x) = \{y||y - x| \leq \varepsilon\}$.

Лемма 4.1. *Пусть $X(\theta, F, \varepsilon)$ – множество, построенное выше, тогда $diam X(\theta, F, \varepsilon) < 2 = diam \mathbb{S}^{n-1}$ и для всякого $\alpha \in \partial X(\theta, F, \varepsilon)$ выполняется равенство $\chi^*(\alpha) = 1$.*

Доказательство. Из построения множества $X(\theta, F)$ видно, что все диаметральные точки множества $X(\theta, F) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ принадлежат $\partial X(\theta, F)$, где $diam X(\theta, F) \leq diam \mathbb{S}^{n-1} = 2$. Однако $\partial X(\theta, F) \cap X(\theta, F, \frac{1}{2}\varepsilon) = \emptyset$, значит $diam X(\theta, F, \varepsilon) < diam X(\theta, F)$.

Из построения множества $X(\theta, F, \varepsilon)$ видно, что число ε выбирается так, что если $\alpha \in int(X(\theta, F, 2\varepsilon) \backslash X(\theta, F, \varepsilon))$, то $\varsigma(\alpha) \notin EP$ фигуры F. Таким образом, $\chi(\alpha) \neq \infty$ для всех $\alpha \in \partial X(\theta, F, \varepsilon)$. Тогда из следствия 3.1 непосредственно получаем требуемое утверждение. $\square$

Замечание 4.2. В подпункте 4.1 построено множество $X(\theta, F, \varepsilon)$, следующим образом. Из границы полусферы исключены компоненты связности, являющиеся элементами множества L, взамен добавлены их антиподальные точки. Затем произведен такой отступ от границы полученного множества, что на границе нового множества нет элементов множества Θ. Кроме того, $diam X(\theta, F, \varepsilon) < 2 = diam \mathbb{S}^{n-1}$.

Построение системы векторов $\{\theta_i\}_{i=1}^n$. Пусть $\theta_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$, тогда $X(\theta_1, F), X(\theta_1, F, \varepsilon_1)$ – множества из пункта 4.1.

Находим $\theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\theta_2 \in \partial X(\theta_1, F)$ и $(\theta_1, \theta_2) = \max\limits_{\alpha \in \partial X(\theta_1, F)} (\alpha, \theta_1)$. Из условий на EP фигуры F, леммы 3.3, и условия (i) из теоремы 2.1, следует, что $(\theta_1, \theta_2) \leq 1 - A(\sigma)$,(где $A(\sigma) > 0$) а из условий выбора θ_2 получаем $(\theta_1, \theta_2) \geq 0$. Снова производим операцию построения множеств $X(\theta_2, F), X(\theta_2, F, \varepsilon_2)$ согласно пункту 4.1.

Затем производим эту операцию до момента нахождения θ_{n-1}.

Выпишем i-ую операцию.

Находим $\theta_i \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\theta_i \in \partial X(\theta_{i-1}, F) \cap (\bigcap\limits_{j=1}^{i-2} (X(\theta_j, F, \varepsilon_j) \backslash X(\theta_j, F, \frac{1}{2}\varepsilon_j))) = T_{i-1}$ и $(\theta_i, \theta_{i-1}) = \max\limits_{\alpha \in T_{i-1}} (\alpha, \theta_{i-1})$. Строим множества $X(\theta_i, F), X(\theta_i, F, \varepsilon_i)$ согласно пункту 4.1.

Построим множества $X(\theta_n, F), X(\theta_n, F, \varepsilon_n)$. Пусть $\varpi \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\varpi \in \partial X(\theta_{n-1}, F) \cap (\bigcap\limits_{j=1}^{n-2} (X(\theta_j, F, \varepsilon_j) \backslash X(\theta_j, F, \frac{1}{2}\varepsilon_j))) = T_{n-1}$ и $(\varpi, \theta_{n-1}) = \max\limits_{\alpha \in T_{n-1}} (\alpha, \theta_{n-1})$. Строим множества $X(\varpi, F), X(\varpi, F, \varepsilon_\varpi)$ согласно пункту 4.1. Тогда, если для всех $U \in L$ верно равенство $\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} X(\theta_i, F) \cap X(\varpi, F) \cap U = \emptyset$, то $\theta_n = \varpi$, а $X(\theta_n, F) = X(\varpi, F), X(\theta_n, F, \varepsilon_n) = X(\varpi, F, \varepsilon_\varpi)$. Если же существует $U \in L$ (очевидно единственное) такое, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} X(\theta_i, F) \cap X(\varpi, F) \cap U \neq \emptyset$, то $\theta_n \in \mathbb{S}^{n-1}$ выбираем так, что $(\theta_n, \theta_{n-1}) = \min\limits_{\alpha \in V : V \in L, \varpi \in V} (\alpha, \theta_{n-1})$, множества $X(\theta_n, F), X(\theta_n, F, \varepsilon_n)$ также строятся согласно пункту 4.1.

Таким образом,для всех $U \in L$ выполняется равенство $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X(\theta_i, F) \cap U = \emptyset$.

Лемма 4.2. *Пусть $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ – система векторов, построенная выше, тогда $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ – линейно независимые векторы.*

Доказательство данного утверждения очевидным образом следует из построения системы векторов $\{\theta_i\}_{i=1}^n$.

Лемма 4.3. *Пусть $X_0 = cl(\mathbb{S}^{n-1} \backslash [\bigcup\limits_{i=1}^{n} X(\theta_i, F, \varepsilon_i)])$, тогда $diam X_0 < 2$ и для любого $\alpha \in \partial X_0$ выполняется равенство $\chi^*(\alpha) = 1$.*

Доказательство. Предположим, что существует $\alpha \in \partial X_0$ такое, что $\chi^*(\alpha) = \infty$. Тогда, так как $X_0, X(\theta_i, F, \varepsilon_i)$ – замкнутые множества, то из определения X_0 получаем, что существует $i \in \{1, ..., n\}$ такое, что $\alpha \in \partial X(\theta_i, F, \varepsilon_i)$. Из леммы 4.1 получили противоречие.

Допустим, что $diam X_0 = 2$, тогда так как X_0 – замкнутое множество, то существуют $\alpha, (-\alpha) \in X_0$. Значит $\alpha, (-\alpha) \notin int(X(\theta_i, F, \varepsilon_i))$ для каждого $i \in \{1, ..., n\}$.

Из леммы 4.2 $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ – линейно независимые векторы. Тогда существуют $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$ такие, что $\alpha = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \theta_i$. Так как $\alpha, (-\alpha) \notin int(X(\theta_i, F, \varepsilon_i))$ для всякого $i \in \{1, ..., n\}$ и учитывая, что $\bigcap\limits_{i=1}^n X(\theta_i, F) \cap U = \emptyset$ для всех $U \in L$, то $\lambda_i \le \varepsilon_i$. Далее имеем $(-\alpha) = -\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \theta_i = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i^* \theta_i$, где $\lambda_i^* = -\lambda_i$, тогда $\lambda_i^* \ge -\varepsilon_i$. Таким образом, $-\varepsilon_i \le \lambda_i^* \le \varepsilon_i$.Так как $(-\alpha) \in \mathbb{S}^{n-1}$, то

$$|-\alpha|^2 = 1 = (-\alpha, -\alpha) \le n^2 (\max_{1 \le i \le n} \varepsilon_i)^2 \le \{\text{из условий выбора } \varepsilon_i\} \le \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1.$$

Получили противоречие – и лемма доказана. □

5. Доказательство основного результата.

Доказательство теоремы 2.1. Не теряя общности, будем считать, что диаметр рассматриваемого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ равен единице.

Так как фигура G удовлетворяет условиям теоремы 2.1, то можно построить множества $X_0, X(\theta_i, G, \varepsilon_i), i = \overline{1, n}$ аналогично пункту 4.2. Тогда из леммы 4.1 имеем $diamX(\theta_i, G, \varepsilon_i) < 2, i = \overline{1, n}$, а из леммы 4.3 $diamX_0 < 2$.

Пусть $K_0 = \{x | x = \varsigma(\alpha)$, где $\alpha \in X_0\}$, $K_i = \{x | x = \varsigma(\alpha)$, где $\alpha \in X(\theta_i, G, \varepsilon_i)\}, i = \overline{1, n}$, где ς функция, заданная в (1). По лемме 3.5 $diamK_i < 1, i = \overline{0, n}$.

Покажем, что $\bigcup\limits_{i=0}^n K_i \supseteq \partial G$. Допустим, это не так, тогда существует $x \in \partial G$ такое, что для всякого $i = \overline{0, n}$ выполняется $x \notin K_i$. Из свойства 2 функции ς имеем $\varsigma(\theta) = x$ для каждого $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Так как $\bigcup\limits_{i=1}^n X(\theta_i, G, \varepsilon_i) \cup X_0 = \mathbb{S}^{n-1}$, то θ принадлежит одному из множеств $X_0, X(\theta_i, G, \varepsilon_i), i = \overline{1, n}$. Значит существует $i \in \{1, ..., n\}$ такое, что $\theta \in K_i$. Получили противоречие.

Введем опорную функцию [10, гл. 3, § 13] $\delta^* : G \to R^1$ такую, что $\delta^*(x) = \sup\limits_{y \in G} |x - y|$.

Пусть $x_0 \in G : \delta^*(x_0) = \inf\limits_{x \in G} \delta^*(x)$.

Построим множества Y_i следующим образом. Для всякого $x \in Y_i$ существует $z \in K_i$, которому соответствует $0 < \lambda < 1$ такое, что $x = \lambda x_0 + (1 - \lambda) z, i = \overline{0, n}$. Так как G – выпуклое множество, то Y_i – замкнутое множество и $\bigcup\limits_{i=0}^n Y_i \supseteq G$.

Для любого $x \in Y_i \backslash K_i$ и всякого $y \in Y_i$ выполняется неравенство $|x - y| < 1$, так как из $x \in G \backslash \partial G, y \in G$ следует, что $|x - y| < diamG = 1$, а $Y_i \backslash K_i \subseteq G \backslash \partial G$ и $Y_i \subset G$ для $i = \overline{0, n}$.

Для любого $x \in K_i$ и всякого $y \in Y_i \backslash K_i$, согласно предыдущему утверждению, выполняется неравенство $|x - y| < 1$. Тогда, учитывая, что $diamK_i < 1$, имеем $diamY_i < 1, i = \overline{0, n}$.

Таким образом, $G \subseteq \bigcup\limits_{i=0}^n Y_i$, где $diamY_i < 1$ для $i = \overline{0, n}$, что и требовалось. □

Доказательство следствия 2.1. Так как $\tilde{G} \subseteq G$, а из теоремы 2.1 $\cup_{i=0}^{n} Y_i \supseteq G$, где $diamY_i < diamG = diam\tilde{G}, i = \overline{0, n}$, то получаем искомый результат. □

Доказательство следствия 2.2. Если G – фигура постоянной ширины такая, что множество особых точек EP состоит из изолированных точек. Пусть $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP\}$, тогда для всякой компоненты связности U множества Θ существует единственный элемент $x \in EP$ такой, что для всякого $\alpha \in U$ выполняется равенство $\varsigma(\alpha) = x$.

Предположим, что существуют $\alpha, \beta \in U$ такие, что $|\alpha - \beta| > 1$, тогда из (1) $x - y_1 = \alpha, x - y_2 = \beta$, значит $y_1 = x - \alpha, y_2 = x - \beta$, тогда $y_1 - y_2 = \beta - \alpha$, следовательно $|y_1 - y_2| = |\alpha - \beta| > 1 = diamG$, но $y_1, y_2 \in G$, получили противоречие. Таким образом, для всякой компоненты связности U множества Θ выполняется неравенство $\sup\limits_{\alpha,\beta \in U} |\alpha - \beta| \leq 1 < \sqrt{2}$, значит множество G удовлетворяет условию (i) теоремы 2.1.

Покажем, что если $U \in L$, то для любого $\alpha \in int(U)$ выполняется равенство $\chi^*(-\alpha) = 1$.

Пусть существует $\alpha \in int(U)$ такое, что $\chi^*(-\alpha) \neq 1$. Тогда из следствия 3.1 получаем $\chi^*(-\alpha) = \infty$. Пусть $\min\limits_{\eta \in \partial U} |\alpha - \eta| = \delta$. По лемме 3.3 существует $\beta \neq -\alpha \in \mathbb{S}^{n-1} \cap B_{\delta/2}(-\alpha)$ такое, что $\varsigma(\beta) = \varsigma(-\alpha) = y$, значит $(-\beta) \in U$. Из определения функции ς получаем $y - x = \beta, y - x = -\alpha \Rightarrow \beta = -\alpha$. Таким образом, получили противоречие.

Но это и означает, что для всех $U, V \in L$ имеет место равенство $int(\tilde{V}) \cap U = \emptyset$. Таким образом, G удовлетворяет условию (ii) теоремы 2.1. Утверждение доказано. □

1. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел // Москва: Наука, 1971. – С. 96.
2. *Болтянский В.Г., Гохберг И.Ц.* Разбиение фигур на меньшие части // Москва: Наука, 1971. – С. 88.
3. *Болтянский В.Г., Солтан П.С.* Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств // Кишинев: Штиинца, 1978. – С. 280.
4. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk's conjecture // Bull. Amer. Math. Soc.(New Ser.) – 1993 – **29,** № 1. – С. 60-62.
5. *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике // Москва: МЦМНО, 2007. – С. 136.
6. *Hadwiger H.*Uberdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Comm. Math. Helv. – 1945/46. – **18.** – С. 73-75.
7. *Anderson R.D., Klee V.L.* Convex functions and upper semi-continuous collections // Duke Math.J. – 1952. – **190,** № 2 – С. 349-357
8. *Болтянский В.Г.* Задача об освещении границы выпуклого тела // Изв. МФАН СССР. – 1960. – **10** (76).
9. *Borsuk K.* Satze uber die n-dimensionale Sphare // Fund. Math. – 1933. – **20.** – С. 177-190.
10. *Рокафеллер Р.Т.* Выпуклый анализ // Москва: Мир, 1973.

A. Yu. Ivanov

Solution of the Borsuk's conjecture for some sets with irregular boundary.

Considers the problem of decomposition of shapes into parts of smaller diameter in multidimensional spaces.Essentially extended the class of sets for which there is a conjecture of Borsuk

Keywords: *convex set, a constant width's figure, the support function, splitting sets into parts of smaller diameter.*

О. Ю. Іванов

Розв'язок проблеми Борсука для деяких множин з нерегулярною межею.

Розглядається задача про розбиття фігур на частини меншого діаметра в багатовимірних просторах. Суттєво розширено клас множин, для яких має місце гіпотеза К. Борсука

Ключові слова: *опукла множина, фігура постійної ширини, опорна функція, діаметр розбиття множин на частини меншого діаметра.*

Донецкий национальный ун-т
sejang@ua.fm

Получено 01.11.11