

УДК 531.39, 517.958

©2011. А. Л. Зуев, Ю. И. Кучер

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ УПРУГОЙ БАЛКИ

Статья посвящена исследованию сходимости метода Галеркина в задаче о колебаниях упругой балки. Построена последовательность приближенных решений и доказана ее сходимость к обобщенному решению начально-краевой задачи для уравнения Эйлера-Бернулли. Получена априорная оценка построенных решений. В заключение рассмотрен пример численного интегрирования аппроксимаций по Галеркину начально-краевой задачи с силой, зависящей от времени.

Ключевые слова: метод Галеркина, балка Эйлера-Бернулли, обобщенное решение.

1. Введение. Колебательные системы с распределенными параметрами широко используются при описании движения инженерных конструкций [1], таких как звенья упругих роботов-манипуляторов, башенные краны, антенны, приборные мачты космических аппаратов.

Распространенным подходом к моделированию динамики таких систем является метод Галеркина. Однако, вопрос о его сходимости остается открытым для задач управления механическими системами, состоящими из упругих элементов в виде балок и пластин.

В монографии [7] приведены результаты исследований устойчивости и стабилизации в виде обратной связи бесконечномерных систем, в частности, дифференциальных уравнений четвертого порядка, таких как уравнение колебаний балки Эйлера-Бернулли.

Статья [4] посвящена асимптотическому анализу систем связанных балок Эйлера-Бернулли и Тимошенко. В ней исследуются спектральные свойства семейства несамосопряженных операторов, порожденного системой уравнений движения связанных балок Эйлера-Бернулли и Тимошенко.

Установившиеся колебания балки Тимошенко исследованы в статье [6] с помощью методов Галеркина и наименьших квадратов.

В работе [8] рассматривается задача управления для балки Эйлера-Бернулли с одним закрепленным и одним свободным концом, на которую воздействует присоединенный пьезоэлектрический привод. Приведен закон управления с обратной связью и вычислена длина сенсора/привода, для которой имеет место сильная устойчивость, а также доказано убывание энергии к нулю с полиномиальным порядком для почти всех длин.

Авторы статьи [9] используют модель с нелокальным демпфированием, учитывающую временной и пространственный гистерезис, для систем, состоящих из балок Эйлера-Бернулли и пластин Кирхгофа. В цитируемой работе сила демпфирования представлена в виде взвешенного среднего поля скоростей в пространственной области.

В статье [10] получены и решены методом Галеркина уравнения равновесия, описывающие поведение пространственных изогнутых балок.

В работе [5] исследуются условия сходимости функций преобразования конечномерных аппроксимаций по Галеркину для задач управления механическими системами с распределенными параметрами.

Работа [11] посвящена исследованию вопроса о существовании предельных точек решений дифференциального уравнения, описывающего колебания упругой балки Эйлера-Бернулли с управлением в виде обратной связи.

В данной статье доказана сходимость метода Галеркина для модели балки Эйлера-Бернулли. Предложенная схема доказательства опирается на материал книги [2], в которой проведено обоснование сходимости метода Галеркина для уравнения колебаний струны.

Данная статья имеет следующую структуру. Во введении приводится краткий обзор литературы по рассматриваемой теме. Постановка задачи о колебаниях балки и основной результат работы – Утверждение 1 – приведены во втором разделе. В третьем разделе показан способ построения базисных функций для решения поставленной задачи методом Галеркина. В четвертом разделе описан процесс проектирования задачи на линейное многообразие, порожденное построенным базисом. В пятом разделе получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов разложения аппроксимаций по Галеркину. Шестой раздел содержит доказательство основного результата. В седьмом разделе проиллюстрированы результаты численного решения задачи. Выводы приведены в восьмом разделе.

2. Задача о колебаниях балки. Рассмотрим задачу о колебаниях упругой балки. Данный процесс описывается неоднородным дифференциальным уравнением (см. [1, с. 372]):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f(x, t). \quad (1)$$

Здесь $w = w(x, t)$ – поперечная компонента перемещения балки, $x \in (0, l)$, $t \in (0, T)$, $f \in L^2((0, l) \times (0, T))$ – функция, описывающая внешнее силовое воздействие, $a^2 = EI/\rho > 0$, где I – момент инерции сечения балки, E – модуль Юнга, ρ – линейная плотность балки.

Предполагается, что один конец балки жестко закреплен, а второй свободен. То есть решение $w(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям [1, с. 382]:

$$w|_{x=0} = w_x|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$w_{xx}|_{x=l} = w_{xxx}|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

а также начальным условиям

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \quad w_t|_{t=0} = \psi(x), \quad (4)$$

где $\varphi \in \overset{\circ}{H}^2(0, l) = \{\varphi \in H^2(0, l) : \varphi(0) = \varphi'(0) = 0\}$, $\psi \in L^2(0, l)$.

Все рассматриваемые в работе функции будем считать вещественнозначными.

Функцию $w(x, t) \in H^2((0, l) \times (0, T))$ будем называть обобщенным решением задачи (1)-(3), если для нее выполнены условия (2) и интегральное тождество

$$\int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) dt dx = \int_0^l \int_0^T f(x, t) v(x, t) dt dx \quad (5)$$

для любой пробной функции $v(x, t) \in \widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))$, где

$$\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T)) = \{w \in H^2((0, l) \times (0, T)) : w|_{t=0} = w|_{t=T} = w|_{x=0} = w_x|_{x=0} = 0\}.$$

Для приближенного решения задачи (1)-(3) воспользуемся методом Галеркина. Предположим, что имеется семейство функций $v_k \in H^2(0, l)$, удовлетворяющих краевым условиям $v_k(0) = 0$, $v_k'(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим $V_m = \{c_1 v_1 + \dots + c_m v_m\} \subset L^2(0, l)$ – линейное многообразие, натянутое на функции v_1, \dots, v_m . Решение задачи (1)-(4) будем искать в виде

$$w_m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) v_k(x), \quad (6)$$

где $c_k \in H^2(0, T)$, $k = \overline{1, m}$.

Функцию $w_m(x, t)$ будем называть приближенным по Галеркину решением порядка m задачи (1)-(4), если выполнено интегральное тождество

$$\int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w_m}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) dt dx = \int_0^l \int_0^T f(x, t) v(x, t) dt dx$$

для любой пробной функции вида $v(x, t) = v_k(x)q(t)$, $q \in \overset{\circ}{C}^1[0, T]$, $k = \overline{1, m}$.

Ниже приведен способ построения базисных функций $v_1(x), v_2(x), \dots$, для которых справедлив следующий результат о сходимости метода Галеркина.

Утверждение 1. Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{H}^2(0, l)$, $\psi \in L^2(0, l)$ и пусть $w_m(x, t)$ – последовательность приближенных по Галеркину решений задачи (1)-(4), $m = 1, 2, \dots$. Тогда существует слабо сходящаяся подпоследовательность $w_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} w$, где w является искомым обобщенным решением задачи (1)-(4).

Доказательство этого утверждения проведено в разделе 6.

3. Построение базиса. Для решения задачи (1)-(4) методом Галеркина построим базисную в $H^2(0, l) \times (0, T)$ систему функций $v_1(x), v_2(x), \dots$ такую, что $v|_{x=0} = v_x|_{x=0} = 0$.

Пусть $c(t) \in C^2(0, T)$ и $v(x) \in C^4(0, l)$; $w(x, t) = c(t)v(x)$ – частное решение однородной задачи:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0,$$

$$w|_{x=0} = w_x|_{x=0} = w_{xx}|_{x=l} = w_{xxx}|_{x=l} = 0.$$

Тогда

$$\frac{1}{a^2 c(t)} \frac{d^2 c(t)}{dt^2} = \frac{1}{v(x)} \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \lambda = \text{const.}$$

Получим задачу Штурма-Лиувилля для $v(x)$:

$$\begin{cases} \frac{d^4 v}{dx^4} = \lambda v, & x \in (0, l), \\ v(0) = v'(0) = v''(l) = v'''(l) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Введем линейный дифференциальный оператор $A : D(A) \rightarrow L^2(0, l)$ следующим образом:

$$Aw(x) = \frac{d^4 w(x)}{dx^4}$$

и запишем задачу (7) в операторном виде:

$$\begin{aligned} Av(x) &= \lambda v(x), \quad x \in (0, l), \\ D(A) &= \{w \in H^2(0, l) : w(0) = w'(0) = w''(l) = w'''(l) = 0\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Существует обратный оператор $A^{-1} : L^2(0, l) \rightarrow L^2(0, l)$,

$$A^{-1}v(x) = \int_0^x \int_0^y \int_\tau^l \int_z^l v(\xi) d\xi dz d\tau dy.$$

Лемма 1. *Оператор A^{-1} вполне непрерывный.*

Доказательство. Из неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\left(\int_x^l v(\xi) d\xi \right)^2 \leq \int_x^l d\xi \int_x^l v^2(\xi) d\xi = (l-x) \|v\|_{L^2(x,l)}^2 \leq l \|v\|_{L^2(0,l)}^2, \quad \forall v \in L^2(0, l). \quad (9)$$

Возьмем последовательность $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$, ограниченную в $L^2(0, l)$. Рассмотрим оператор $A_1 : L^2(0, l) \rightarrow L^2(0, l)$, который зададим следующим образом:

$$A_1 v_n = \int_x^l v_n(\xi) d\xi.$$

Используя неравенство (9), оценим норму $\|A_1 v_n\|$ в пространстве $L^2(0, l)$:

$$\|A_1 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 = \int_0^l \left(\int_x^l v_n(\xi) d\xi \right)^2 dx \leq \int_0^l l \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2 dx = l^2 \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2. \quad (10)$$

Применяя (10), получим аналогичную оценку в пространстве $H^1(0, l)$:

$$\|A_1 v_n\|_{H^1(0, l)}^2 = \|A_1 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 + \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq (l^2 + 1) \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2. \quad (11)$$

Рассмотрим оператор $A_2 : L^2(0, l) \rightarrow L^2(0, l)$, действующий по формуле

$$A_2 v_n = A_1(A_1 v_n) = \int_x^l \int_z^l v_n(\xi) d\xi dz,$$

и оценим норму $\|A_2 v_n\|$ в пространстве $H^1(0, l)$, используя полученную оценку (11):

$$\|A_2 v_n\|_{H^1(0, l)}^2 \leq (l^2 + 1) \|A_1 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq l^2 (l^2 + 1) \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2.$$

Рассмотрим теперь оператор $A_3 : L^2(0, l) \rightarrow L^2(0, l)$, заданный формулой

$$A_3 v_n = A_1(A_2 v_n) = \int_0^x \int_\tau^l \int_z^l v_n(\xi) d\xi dz d\tau,$$

воспользовавшись неравенствами (10) и (11), получим

$$\|A_3 v_n\|_{H^1(0, l)}^2 \leq (l^2 + 1) \|A_2 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq l^2 (l^2 + 1) \|A_1 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq l^4 (l^2 + 1) \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2.$$

Рассмотрим оператор $A_4 : L^2(0, l) \rightarrow L^2(0, l)$, действующий следующим образом:

$$A_4 v_n = A_1(A_3 v_n) = \int_0^x \int_0^y \int_\tau^l \int_z^l v_n(\xi) d\xi dz d\tau dy.$$

Заметим, что $A_4 v_n = A^{-1} v_n$.

Применим (10) и (11) для оценки нормы $\|A_4 v_n\|$ в пространстве $H^1(0, l)$

$$\begin{aligned} \|A_4 v_n\|_{H^1(0, l)}^2 &\leq (l^2 + 1) \|A_3 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq l^2 (l^2 + 1) \|A_2 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq \\ &\leq l^4 (l^2 + 1) \|A_1 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq l^6 (l^2 + 1) \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \end{aligned}$$

и в пространстве $H^4(0, l)$

$$\begin{aligned} \|A_4 v_n\|_{H^4(0, l)}^2 &= \|A_4 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 + \|A_3 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 + \|A_2 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 + \|A_1 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 + \\ &+ \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq C \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2, \end{aligned}$$

где $C = l^8 + l^6 + l^4 + l^2 + 1 > 0$.

Итак, $\|A^{-1}v_n\|_{H^4(0,l)}^2 \leq C\|v_n\|_{L^2(0,l)}^2$, значит оператор A^{-1} переводит ограниченную в $L^2(0,l)$ последовательность в ограниченную в $H^4(0,l)$ последовательность, а ограниченное в $H^4(0,l)$ множество является предкомпактным в $L^2(0,l)$. Таким образом, оператор A^{-1} переводит ограниченное в $L^2(0,l)$ множество в предкомпактное множество в $L^2(0,l)$. Следовательно, оператор A^{-1} вполне непрерывен. \square

Нетрудно проверить, что оператор A^{-1} самосопряженный. Тогда из леммы 1 и теоремы Гильберта-Шмидта следует, что собственные функции

$$v_1(x), v_2(x), \dots \quad (12)$$

оператора A^{-1} образуют ортогональный базис пространства $L^2(0,l)$.

Рассмотрим теперь сужение обратного к A оператора $A^{-1} : H^2(0,l) \rightarrow H^2(0,l)$. Аналогично приведенным выше рассуждениям, его собственные функции образуют ортогональный базис в пространстве $H^2(0,l)$, а по построению A^{-1} они совпадают с (12). Система функций (12) линейно независимая, полная в $\overset{\circ}{H}^2(0,l)$.

Множества собственных функций операторов A и A^{-1} совпадают, поэтому систему функций (12) будем искать как собственные функции задачи (7). Заметим, что собственные числа λ_n оператора A являются корнями трансцендентного уравнения [1, с. 382]:

$$\cos \sqrt[4]{\lambda_n} l \cosh \sqrt[4]{\lambda_n} l = -1. \quad (13)$$

Соответствующие собственные функции задачи (7) запишем в виде ([6]):

$$v_n(x) = c_{1n} \{ \cos(\sqrt[4]{\lambda_n} l) - \cos(\sqrt[4]{\lambda_n} x) \} + c_{2n} \{ \sin(\sqrt[4]{\lambda_n} l) - \sinh(\sqrt[4]{\lambda_n} x) \}. \quad (14)$$

Скалярное произведение в пространстве $\overset{\circ}{H}^2(0,l)$ зададим формулой

$$\langle f, g \rangle_{\overset{\circ}{H}^2(0,l)} = \int_0^l \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx. \quad (15)$$

Выберем константы c_{1n}, c_{2n} в формуле (14) таким образом, чтобы выполнялось условие нормированности для собственных функций:

$$\|v_k\|_{\overset{\circ}{H}^2(0,l)} = 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

4. Проекция задачи на конечномерное подпространство. Спроектируем начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на V_m :

$$\varphi^m(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\langle \varphi, v_k \rangle_{L^2(0,l)}}{\|v_k\|_{L^2(0,l)}^2} \cdot v_k(x) = \sum_{k=1}^m \varphi_k v_k(x), \quad (17)$$

$$\psi^m(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\langle \psi, v_k \rangle_{L^2(0,l)}}{\|v_k\|_{L^2(0,l)}^2} \cdot v_k(x) = \sum_{k=1}^m \psi_k v_k(x), \quad (18)$$

тогда из (6) и (17) следует

$$w_m(x, 0) = \sum_{k=1}^m c_k(0)v_k(x) = \sum_{k=1}^m \varphi_k v_k(x), \quad (19)$$

откуда $c_k(0) = \varphi_k$ и

$$\dot{w}_m(x, 0) = \sum_{k=1}^m c'_k(0)v_k(x) = \sum_{k=1}^m \psi_k v_k(x), \quad (20)$$

то есть $c'_k(0) = \psi_k$.

В интегральном тождестве (5) возьмем в качестве пробной функции $v(x, t) = v_k(x)q(t)$, где $v_k(x)$ – одна из найденных собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, $q(t)$ – некоторая функция пространства $\dot{H}^2(0, T)$:

$$\int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} v_k'' q - \frac{\partial w_m}{\partial t} v_k \dot{q} \right) dt dx = \int_0^l \int_0^T f v_k q dt dx.$$

Интегрирование по частям приводит к

$$\int_0^T q(t) \left[\int_0^l \left(a^2 \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} - f(x, t) \right) v_k(x) dx \right] dt = 0, \quad \forall q \in \dot{H}^2(0, T).$$

Согласно основной лемме вариационного исчисления,

$$\int_0^l \left(a^2 \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} \right) v_k(x) dx = \int_0^l f(x, t) v_k(x) dx, \quad k = \overline{1, m}, \quad (21)$$

для почти всех $t \in [0, T]$.

5. Построение уравнений относительно коэффициентов разложения по Галеркину. Будем искать такие функции $c_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, для которых выполнены начальные условия (19), (20) и интегральное тождество (21).

Подставим (6) в (21) и получим линейную относительно функций $c_1(t), \dots, c_m(t)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{s=1}^m \left(\ddot{c}_s(t) \langle v_s, v_k \rangle_{L^2(0,l)} + a^2 c_s(t) \langle v_s, v_k \rangle_{\dot{H}^2(0,l)} \right) = f_k(t), \quad k = \overline{1, m}, \quad (22)$$

где $f_k(t) = \int_0^l f(x, t) v_k(x) dx \in L^2(0, T)$.

Поскольку собственные функции, соответствующие различным собственным значениям оператора A , ортогональны, то система обыкновенных дифференциальных уравнений (22) имеет вид:

$$\ddot{c}_k(t)\|v_k\|_{L^2(0,l)}^2 + a^2 c_k(t) = f_k(t), \quad k = \overline{1, m}. \quad (23)$$

Положим

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \|v_1\|_{L^2}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|v_2\|_{L^2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|v_m\|_{L^2}^2 \end{pmatrix}$$

и перепишем (23) в матричном виде:

$$\tilde{A} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_m(t) \end{pmatrix} = -a^2 \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_m(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$C(t) = (c'_1(t), \dots, c'_m(t), c_1(t), \dots, c_m(t))^T, \quad A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -a^2 \tilde{A}^{-1} \\ \hline I & 0 \end{array} \right),$$

$$F(t) = (\tilde{A}^{-1} \mid 0) (f_1(t), \dots, f_m(t) \mid 0)^T,$$

где I и 0 – единичная и нулевая матрицы соответствующей размерности, тогда задача (23), (19), (20) эквивалентна задаче

$$\begin{aligned} C'(t) &= AC(t) + F(t), \\ C(0) &= (\psi_1, \dots, \psi_m, \varphi_1, \dots, \varphi_m)^T. \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку $f \in L^2((0, l) \times (0, T))$, то $F(t) \in L^2(0, T)$, следовательно,

$$\int_0^t F(\tau) d\tau \in C(0, T).$$

Задачу (24) заменяем эквивалентной ей системой интегральных уравнений

$$C(t) = \int_0^t AC(\tau) d\tau + \int_0^t F(\tau) d\tau, \quad (25)$$

со свободным членом из $C(0, T)$. Существует единственное решение системы (25).

Тождество (21) умножим на $\dot{c}_k(t)$, проинтегрируем по $(0, \tau)$, где $\tau \in [0, T]$, просуммируем по $k = \overline{1, m}$. Получим

$$\int_0^\tau \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} \right) \frac{\partial w_m}{\partial t} dx dt = \int_0^\tau \int_0^l f(x, t) \frac{\partial w_m}{\partial t} dx dt. \quad (26)$$

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial w_m}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \right)^2 \right),$$

$$\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} \cdot \frac{\partial w_m}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial w_m}{\partial t} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \right)^2 \right),$$

приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} \right) \frac{\partial w_m}{\partial t} dx dt &= \frac{1}{2} \int_{D_\tau} \left(\left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \right)^2 + \left(a \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^l \left(a^2 \frac{d^2 \varphi^m(x)}{dx^2} + (\psi^m(x))^2 \right) dx, \end{aligned}$$

где $D_\tau = \{x \in (0, l), t = \tau\}$.

6. Доказательство сходимости последовательности приближенных решений к обобщенному решению задачи. Проведем доказательство Утверждения 1.

В пространстве $\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))$ введем норму

$$\|w\|_{\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))}^2 = \int_0^l \int_0^T \left(\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dt dx,$$

тогда

$$\begin{aligned} 2 \int_0^T \int_0^\tau \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 w_m}{\partial t^4} \right) \frac{\partial w_m}{\partial t} dx dt d\tau &= \\ &= \|w_m\|_{\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))}^2 - T \int_0^l (a^2 \varphi^m(x)_{xx} + (\psi^m(x))^2) dx. \end{aligned}$$

Введем энергетическую функцию

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx.$$

Заметим, что

$$\left\| \frac{\partial w_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,l)}^2 = \int_0^l \left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \right)^2 dx \leq 2\mathcal{E}(t) \quad (27)$$

и

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_0^l \left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2 \partial t} \right) dx = \int_0^l \frac{\partial w_m}{\partial t} f(x, t) dx.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского и (27)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \leq \left\| \frac{\partial w_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,l)} \|f\|_{L^2(0,l)} \leq \sqrt{2} \sqrt{\mathcal{E}(t)} \|f\|_{L^2(0,l)}. \quad (28)$$

Обозначим $\sqrt{2} \|f\|_{L^2(0,l)} \sqrt{\mathcal{E}(t)} = \Phi(t)$ и запишем уравнение сравнения для (28):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \Phi(t) \sqrt{\mathcal{E}(t)},$$

отсюда

$$\sqrt{\mathcal{E}(t)} = \sqrt{\mathcal{E}(0)} + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau,$$

где

$$\mathcal{E}(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \Big|_{t=0} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \Big|_{t=0} \right)^2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left((\psi(x))^2 + a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx.$$

В силу теоремы 4.1 [3, с. 40]:

$$\mathcal{E}(t) \leq \left(\sqrt{\mathcal{E}(0)} + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau \right)^2, \quad (29)$$

что означает равномерную ограниченность функции $\mathcal{E}(t)$ по m .

Заметим, что

$$\|w_m\|_{\widehat{H}^2((0,l) \times (0,T))}^2 = \int_0^T \mathcal{E}(t) dt.$$

Таким образом, последовательность функций $\{w_m\}_{m=1}^\infty$ сильно ограничена. Поскольку сильно ограниченное множество в гильбертовом пространстве слабо компактно, то в $\{w_m\}_{m=1}^\infty$ существует слабо сходящаяся подпоследовательность. Не ограничивая общности, обозначим ее $\{w_m\}_{m=1}^\infty$, тогда $w_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} w$ слабо в $\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))$,

где w – искомое обобщенное решение задачи (1)-(4). Для доказательства этого факта необходимо проверить для $w(x, t)$ выполнение интегрального тождества (5), в котором в качестве пробной функции возьмем

$$v(x, t) = v_k(x)q(t), \quad (30)$$

где $v_k(x)$ – одна из найденных собственных функций задачи (7), а $q(t) \in C^1[0, T]$ удовлетворяет условию $q(0) = q(T) = 0$.

По построению w_m :

$$\int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w_m}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - f v \right) dt dx = 0, \quad \forall m \geq k. \quad (31)$$

Запишем условие слабой сходимости:

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w_m}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - f v \right) dt dx &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - f v \right) dt dx. \end{aligned} \quad (32)$$

Следовательно, в силу (31) и (32),

$$\int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - f v \right) dt dx = 0,$$

что означает выполнение (5) для $w(x, t)$.

Докажем теперь, что множество M , состоящее из линейных комбинаций функций (30), всюду плотно в $\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))$. Для этого возьмем всюду плотное в $\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))$ множество, состоящее из непрерывных в прямоугольнике $[0, l] \times [0, T]$ функций $\eta(x, t)$, обращающихся в ноль на границе прямоугольника, и покажем, что любую функцию η можно аппроксимировать в метрике $H^2(0, l) \times (0, T)$ функциями из M , то есть $\|v_n - \eta\|_{H^2((0, l) \times (0, T))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, где $v_k \in M$.

Функции $\eta(x, t) \in C^2((0, l) \times (0, T))$ и $\eta_t(x, t) \in C^1((0, l) \times (0, T))$ можно разложить в ряды Фурье по системе функций (12):

$$\eta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) v_k(x), \quad (33)$$

$$\eta_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta'_k(t) v_k(x). \quad (34)$$

Поскольку для фиксированного $t \in [0, T]$ функции $\eta(\cdot, t)$ и $\eta_t(\cdot, t)$ лежат в пространстве $\mathring{H}^2(0, l)$, то их ряды Фурье будут сходиться к ним в метрике $\mathring{H}^2(0, l)$.

Заметим, что частная сумма $\eta^N = \sum_{k=1}^N \eta_k(t) v_k(x)$ ряда (33) есть элемент множества M ,

$$\eta_t - \eta_t^N \in \mathring{H}^2(0, l).$$

В силу неравенства Стеклова

$$\|\eta_t - \eta_t^N\|_{L^2(0, l)}^2 \leq C \|\eta_t - \eta_t^N\|_{\mathring{H}^2(0, l)}^2, \quad (35)$$

откуда согласно равенству Парсеваля

$$\begin{aligned} \|\eta_t - \eta_t^N\|_{L^2(0, l)}^2 + \|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2(0, l)}^2 &\leq C \|\eta_t - \eta_t^N\|_{\mathring{H}^2(0, l)}^2 + \|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2(0, l)}^2 = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} C(\eta_k')^2 + \eta_k^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (36)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \|\eta_t - \eta_t^N\|_{L^2(0, l)}^2 + \|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2(0, l)}^2 &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \\ \|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2((0, l) \times (0, T))}^2 &= \int_0^l \int_0^T \left((\eta_t - \eta_t^N)^2 + a^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta^N}{\partial x^2} \right)^2 \right) dt dx = \\ &= \int_0^T \left(\|\eta_t - \eta_t^N\|_{L^2(0, l)}^2 + a^2 \|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2(0, l)}^2 \right) dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (37)$$

откуда

$$\|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2((0, l) \times (0, T))}^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Утверждение доказано.

7. Численное моделирование. На рис. 1 показаны результаты численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (23), соответствующие приближенным решениям начально-краевой задачи (1)-(4) в момент времени $t = 2$ с для таких значений механических параметров: длина балки $l = 1$ м, начальная скорость равна нулю ($\psi(x) \equiv 0$), коэффициент $a^2 = 100 \frac{\text{Нм}^3}{\text{кг}}$, что характерно, например, для алюминиевой балки с круговым сечением диаметра приблизительно 5,5 мм.

Для иллюстрации начальная функция

$$\varphi(x) = -\frac{g}{24a^2}x^4 + \frac{gl}{6a^2}x^3 - \frac{gl^2}{4a^2}x^2$$

выбрана из условия равновесия балки в поле силы тяжести. Силы, действующие на балку, представимы в виде функции

$$f(x, t) = -g + (1 - e^{-\lambda t})\chi_{[l-h, l]}(x),$$

где $\chi_{[l-h, l]}(x)$ – индикатор отрезка $[l - h, l]$, $u(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ – управление. Такая функция $f(x, t)$ соответствует балке, к свободному концу которой на отрезке длины h приложена управляющая сила, направленная вертикально вверх таким образом, что при $t \rightarrow +\infty$ эта сила компенсирует вес балки. При расчете выбраны значения параметров $\lambda = 1$, $h = 0,1$ м.

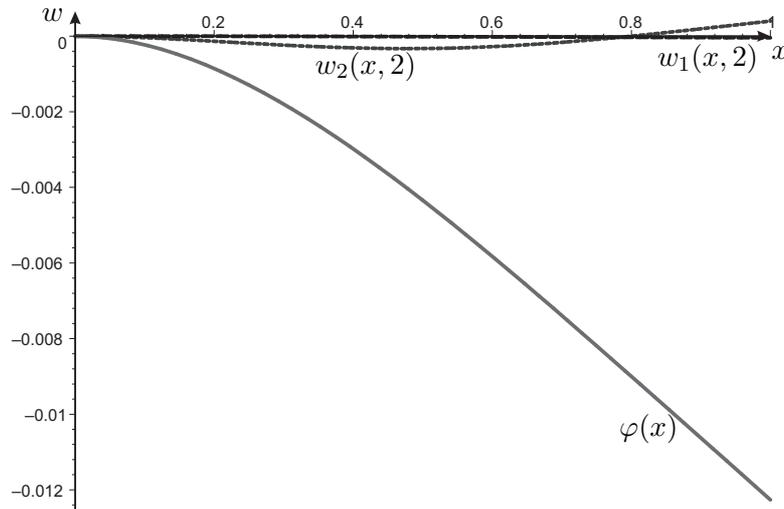


Рис. 1. Форма прогиба балки

Из рисунка видно, что приближенные решения по Галеркину достаточно близки к нулю при всех $x \in (0, l)$. При этом графики функций $w_2(x, 2), \dots, w_{20}(x, 2)$ практически совпадают, что подтверждает быструю сходимость метода Галеркина для задачи (1)-(4).

8. Заключение. Важным этапом доказательства утверждения является получение оценки энергии на решениях (29). Поскольку эта оценка является равномерной по t , формула (29) может быть использована при изучении приближенных по Галеркину решений любого порядка.

Дальнейший интерес представляет исследование задач с более общими краевыми условиями, в частности, колебания балки, связанной с твердым телом, или балки с точечной массой на конце.

1. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
3. Хартманн Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М: Мир, 1970. – 720 с.
4. Balakrishnan A.V., Shubov M.A., Peterson Ch.A. Spectral Analysis of Coupled Euler–Bernoulli and Timoshenko Beam Model // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2004. – Vol. 84, No. 5. – P. 291-313.
5. Gorinevsky D.M. Galerkin approximation in modeling of controlled distributed-parameter flexible systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1993. – Vol. 106, Issues 1-2. – P. 107-128.

6. Grosh K., Pinsky P.M. Design of Galerkin Generalized Least Squares Methods for Timoshenko Beams // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1996. – Vol. 132. – P. 1-16.
7. Luo Zh.H., Guo B.Zh., Morgul O. Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications. – London: Springer-Verlag, 1999. – 403 p.
8. Le Gall P., Prieur C., Rosier L. Output Feedback Stabilization of a Clamped-Free Beam // International Journal of Control. – 2006. – Vol. 00, No. 00. – P. 1-24.
9. Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S. A Galerkin method for distributed systems with non-local damping // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 3381–3400.
10. Rosen A., Abramovich H. Galerkin method as a tool to investigate the planar and non-planar behavior of curved beams // Computers and Structures. – 1984. – Vol. 18, Issue 1. – P. 165-174.
11. Зуев А.Л. Локализация предельного множества траекторий уравнения Эйлера–Бернулли с управлением // Украинский математический журнал. – 2008. – Т. 60, № 2. – С. 173-182.

A. L. Zuyev, J. I. Kucher

Convergence of the sequence of approximate solutions for dynamic equations of a flexible beam.

This paper is devoted to the investigation of the Galerkin's method convergence for the flexible beam vibrations problem. A sequence of approximate solutions is constructed and its convergence to the generalized solution of the initial-boundary value problem for the Euler-Bernoulli beam equation is proved. An a priori estimate of the obtained solutions is presented. In conclusion, an example of the numerical integration of Galerkin's approximations of the initial-boundary value problem with a time-varying force is considered.

Keywords: Galerkin's method, Euler-Bernoulli beam, generalized solution.

О. Л. Зуев, Ю. І. Кучер

Збіжність послідовності наближених розв'язків динамічних рівнянь пружної балки.

Статтю присвячено дослідженню збіжності методу Гальоркіна в задачі про коливання пружної балки. Побудовано послідовність наближених розв'язків і доведено її збіжність до узагальненого розв'язку початково-крайової задачі для рівняння Ейлера-Бернуллі. Отримано апріорну оцінку побудованих розв'язків. У заключній частині роботи розглянуто приклад чисельного інтегрування апроксимацій за Гальоркіним початково-крайової задачі з силою, що залежить від часу.

Ключові слова: Метод Гальоркіна, балка Ейлера-Бернуллі, узагальнений розв'язок.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
al_zv@mail.ru
julykucher@gmail.com

Получено 01.12.11