УДК 531.38

©2011. **Т.В. Ломако, В.И. Рязанов**

ТЕОРИЯ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

Построены вариации для классов регулярных решений вырожденных уравнений Бельтрами с ограничениями теоретико-множественного типа на комплексный коэффициент. Доказан вариационный принцип максимума и другие необходимые условия экстремума.

Ключевые слова: *уравнения Бельтрами, дилатация, вариация, регулярные решения, классы Соболева, необходимые условия экстремума*

1. Введение. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. *Уравнениями Бельтрами* в D называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z \,, \tag{1}$$

где $\mu(z) : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные отображения f по x и y, соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом* и

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \tag{2}$$

– *дилатационным отношением* или просто *дилатацией* уравнения (1).

Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{C}$ называется *регулярным в точке* $z_0 \in D$, если f в этой точке имеет полный дифференциал и его якобиан $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ (см., напр., I.1.6 в [1]). В дальнейшем гомеоморфизм f класса $W^{1,1}_{loc}$ называется *регулярным*, если $J_f(z) > 0$ п.в. Наконец, *регулярным решением* уравнения Бельтрами (1) в области D называется регулярный гомеоморфизм, который удовлетворяет (1) п.в. в D. Понятие регулярного решения впервые введено в работе [2].

Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется *абсолютно непрерывной на линиях*, пишут $f \in$ ACL, если для любого замкнутого прямоугольника R в D, стороны которого параллельны координатным осям, $f|R$ является абсолютно непрерывной на почти всех линейных сегментах в R, параллельных сторонам R (см., напр., [3], с. 27).

Пусть $Q(z) : D \to I = [1, \infty]$ – произвольная функция. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ класса ACL называется $Q(z)-$*квазиконформным* ($Q(z)-$к.к.) отображением, если п.в.

$$K_{\mu_f}(z) := \frac{1 + |\mu_f(z)|}{1 - |\mu_f(z)|} \leq Q(z) \,, \tag{3}$$

где $\mu_f = f_{\overline{z}}/f_z$, если $f_z \neq 0$ и $\mu_f = 0$, если $f_z = 0$. Функцию μ_f принято называть комплексной характеристикой, а K_{μ_f} – дилатацией отображения f.

Всюду далее $\mathbb{D} := \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| < 1\}$. Пусть $\mathcal{G}$ группа всех дробно-линейных отображений $\mathbb{D}$ на себя. Множество M из $\mathbb{D}$ называется *инвариантно-выпуклым*, если все множества $g(M)$, $g \in \mathcal{G}$, являются выпуклыми, см., напр., [4], с. 636. В частности, такие множества являются выпуклыми. Будем говорить, что семейство компактных множеств в $M(z) \subseteq \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{C}$, *измеримо по параметру* z, если для любого замкнутого множества $M_0 \subseteq \mathbb{C}$ множество точек $E_0 = \{z \in \mathbb{C} : M(z) \subseteq M_0\}$ измеримо по Лебегу (ср. [5], с. 27). В дальнейшем мы используем следующие обозначения:

$$Q_M(z) := \frac{1 + q_M(z)}{1 - q_M(z)}\,, \quad q_M(z) := \max_{\nu \in M(z)} |\nu|\,. \tag{4}$$

Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – семейство компактных множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру. Обозначим через $\mathfrak{M}_M$ класс всех измеримых функций, удовлетворяющих условию $\mu(z) \in M(z)$ п.в., а через H_M^* – совокупность всех регулярных гомеоморфизмов $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, сохраняющих ориентацию, с комплексными характеристиками из $\mathfrak{M}_M$ и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$. В предыдущей работе [6] и [7] был доказан целый ряд критериев компактности классов H_M^* при соответствующих условиях на функцию Q_M, ср. также [8], и инвариантной выпуклости множеств $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Заметим, что последнее условие влечет выпуклость множества комплексных характеристик $\mathfrak{M}_M$. Как мы увидим, последнее обстоятельство значительно упрощает построение вариаций в классах H_M^*.

Одним из важных приложений теорем компактности является теория вариационного метода. Дело в том, что в компактных классах всегда гарантируется существование экстремальных отображений для любых непрерывных, в том числе, нелинейных функционалов. Вариационный метод исследования экстремальных задач для квазиконформных отображений был впервые применен Белинским П.П. Этот метод получил свое дальнейшее развитие в работах Гутлянского В.Я., Крушкаля С.Л., Кюнау Р., Рязанова В.И., Шиффера М., Шобера Г. и многих других.

Напомним, что отображение $f : X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *липшицевым*, если $\mathrm{dist}(f(x_1),\, f(x_2)) \leq M \cdot \mathrm{dist}(x_1,\, x_2)$ для некоторого $M < \infty$ и всех $x_1,\, x_2 \in X$, где $\mathrm{dist}\,(x_1,\, x_2)$ обозначает расстояние в метрических пространствах X и Y (см., напр., [9], с. 75). Отображение f называется *билипшицевым*, если в дополнение $M^* \cdot \mathrm{dist}(x_1,\, x_2) \leq \mathrm{dist}(f(x_1),\, f(x_2))$ для некоторого $M^* > 0$ и всех $x_1,\, x_2 \in X$.

2. Предварительные замечания. Приведем необходимые сведения из теории композиционных операторов в пространствах Соболева. Пусть D – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Напомним, что пространство Соболева $L_p^1(D)$, $p \geq 1$, есть пространство локально интегрируемых функций $\varphi : D \to \mathbb{R}$ с обобщенными производными и с полунормой

$$\|\varphi\|_{L_p^1(D)} = \|\nabla \varphi\|_{L_p(D)} = \left(\int_D |\nabla \varphi|^p dm \right)^{1/p}, \tag{5}$$

где $x=(x_1,...,x_n)$, m – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\bigtriangledown\varphi$ – *обобщенный градиент* функции φ, $\bigtriangledown\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},...,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$, определяемый условиями

$$\int\limits_D \varphi\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\,dm=-\int\limits_D \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot\eta\,dm \qquad \forall\,\eta\in C_0^\infty(D),\ i=1,\,2,...,n. \tag{6}$$

Как обычно, здесь через $C_0^\infty(D)$ обозначается пространство всех бесконечно гладких функций с компактным носителем в D. Аналогично говорят, что вектор-функция принадлежит классу Соболева $L_p^1(D)$, если каждая ее координатная функция принадлежит $L_p^1(D)$. Известен следующий факт, см. [10] и [11].

Лемма 1. *Пусть f – гомеоморфизм между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) композиционное правило $f^*\varphi=\varphi\circ f$ порождает ограниченный оператор

$$f^*:L_p^1(D')\to L_q^1(D),\ \ 1\le q\le p<\infty\,, \tag{7}$$

2) отображение f принадлежит классу $W^{1,1}_{loc}(D)$ и функция

$$K_p(x,\,f):=\inf\left\{k(x):|Df|(x)\le k(x)|J_f(x)|^{\frac{1}{p}}\right\} \tag{8}$$

принадлежит $L_r(D)$, где число r определяется из соотношения $1/r=1/q-1/p$.

Отсюда, в частности, при $n=2$, $p=2$ и $q=1$ вытекает следующее важное для нас утверждение.

Предложение 1. *Пусть $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм класса $W^{1,1}_{loc}$ с $K_{\mu_f}\in L^1_{loc}$. Тогда $g\circ f\in W^{1,1}_{loc}$ для любого отображения $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ класса $W^{1,2}_{loc}$.*

Как хорошо известно, любое квазиконформное отображение $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ принадлежит классу $W^{1,2}_{loc}$, см., напр., теорему IV.1.2 в [1]. Таким образом, мы приходим к следующему заключению.

Следствие 1. *Для любого квазиконформного отображения $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ и любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ класса $W^{1,1}_{loc}$ с $K_{\mu_f}\in L^1_{loc}$, композиция $g\circ f$ принадлежит классу $W^{1,1}_{loc}$.*

Совершенно аналогично теореме 5.4.6 в [12], с. 244, доказывается следующее утверждение о дифференцировании суперпозиции.

Лемма 2. *Пусть f – гомеоморфизм между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, композиционный оператор $f^*:L_p^1(D')\to L_q^1(D)$, $1\le q\le p<\infty$, ограничен и f обладает N^{-1}–свойством. Тогда, для любой функции $\varphi\in L_p^1(D')$, п.в.*

$$\frac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial x_i}(x)=\sum_{k=1}^n\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\,(f(x))\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x),\ \ i=1,...,n. \tag{9}$$

Комбинируя леммы 1 и 2, аналогично IC(1) в [3], получаем.

Предложение 2. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – сохраняющий ориентацию регулярный гомеоморфизм с $K_{\mu_f} \in L^1_{loc}$. Тогда, для любого отображения $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ класса $W^{1,2}_{loc}$, п.в.*

$$(g \circ f)_z = (g_w \circ f) f_z + (g_{\overline{w}} \circ f)\overline{f_{\overline{z}}}\,, \quad (g \circ f)_{\overline{z}} = (g_w \circ f) f_{\overline{z}} + (g_{\overline{w}} \circ f)\overline{f_z}\,. \tag{10}$$

Следствие 2. *В частности, формулы (10) имеют место для квазиконформных отображений $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.*

3. Построение вариаций. Данный пункт посвящен построению вариаций в классах H^*_M методом, идея которого была впервые предложена Гутлянским В.Я. в работах [13]–[15] для аналитических функций с квазиконформным продолжением. Впоследствии этот подход использовался в [16] при ограничениях на Q_M по мере экспоненциального типа.

Теорема 1. *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – произвольное семейство выпуклых множеств в $\mathbb{D}$. Далее, пусть $\mu \in \mathfrak{M}_M$ – комплексная характеристика отображения $f \in H^*_M$ такая, что $K_\mu \in L^1_{loc}$, а $\nu \in \mathfrak{M}_M$ такова, что функция*

$$\varkappa = (\nu - \mu)/(1 - |\mu|^2) \tag{11}$$

принадлежит открытому единичному шару в $L^\infty(\mathbb{C})$. Тогда существует вариация f_ε, $\varepsilon \in [0,\, 1/2]$, отображения f в классе H^*_M с комплексной характеристикой

$$\mu_\varepsilon = \mu + \varepsilon(\nu - \mu) = (1 - \varepsilon)\mu + \varepsilon\nu\,, \quad \varepsilon \in [0,\, 1/2]\,, \tag{12}$$

такая, что

$$f_\varepsilon(\zeta) = f(\zeta) - \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} (\nu(z) - \mu(z))\, \varphi(f(z),\, f(\zeta))\, f_z^2\, dm_z + o(\varepsilon,\, \zeta)\,, \tag{13}$$

где $o(\varepsilon\,, \zeta)/\varepsilon \to 0$ локально равномерно относительно $\zeta \in \mathbb{C}$ и

$$\varphi(w,\, w') = \frac{1}{w - w'} \cdot \frac{w'}{w} \cdot \frac{w' - 1}{w - 1}\,. \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим через B (борелево) множество всех тех точек z плоскости $\mathbb{C}$, где отображение f имеет полный дифференциал и $J_f(z) \neq 0$. Тогда по определению класса H^*_M и по теореме Геринга-Лехто-Меньшова $|\mathbb{C} \setminus B| = 0$ (см. [17], см. также теорему 42.3 в [18], ср. теорему III.3.1 в [1]). Кроме того, по лемме 3.2.2 в [9] множество B можно разбить на счетное число (борелевских) множеств B_l, на каждом из которых отображение f является билипшицевым. По теореме Кирсбрауна-МакШейна, см., напр., теорему 2.10.43 в [9], сужения $f|_{B_l}$ допускают продолжение до липшицевых отображений $\mathbb{C}$. Таким образом, f обладает (N)–свойством на множестве B и мы можем делать замену переменных под интегралом, см., напр., теорему 3.2.5 в [9]. Пусть

$$\varkappa_\varepsilon = \frac{\varepsilon\varkappa}{1-\varepsilon\varkappa\overline{\mu}} = \varepsilon\varkappa\sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon\,\varkappa\,\overline{\mu})^n\,,\ \varepsilon\in[0,\,1]\,. \tag{15}$$

Поскольку по условию $\|\varkappa\|_\infty = k < 1$, то при $\varepsilon\in[0,\,1/2]$

$$\|\varkappa_\varepsilon\|_\infty \le \frac{\varepsilon k}{1-\varepsilon k} \le \frac{k}{2-k} = q < 1\,. \tag{16}$$

Далее, пусть

$$\gamma_\varepsilon(w) := \begin{cases} \left(\varkappa_\varepsilon\cdot\frac{\overline{f_z}}{f_z}\right)\circ f^{-1}(w)\,, & w\in f(B)\,,\\ 0, & w\in f(\mathbb{C}\setminus B)\,. \end{cases} \tag{17}$$

Переопределяя, в случае необходимости, $\varkappa$ на множестве нулевой меры, без ограничения общности можем считать, что $\varkappa(z)\le k$ и $\varkappa_\varepsilon(z)\le q$ для всех $z\in\mathbb{C}$ и, таким образом, $\gamma_\varepsilon(z)\le q$ также для всех $z\in\mathbb{C}$. Кроме того, поскольку $|\mathbb{C}\setminus B| = 0$,

$$\gamma_\varepsilon\circ f = \varkappa_\varepsilon\cdot\frac{\overline{f_z}}{f_z}\quad \text{п.в.} \tag{18}$$

Рассмотрим семейство Q–квазиконформных ($Q=(1+q)/(1-q)$) отображений $g_\varepsilon:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, $\varepsilon\in[0,\,1/2]$, с комплексными характеристиками γ_ε, $\varepsilon\in[0,\,1/2]$, и нормировками $g_\varepsilon(0)=0$, $g_\varepsilon(1)=1$ и $g_\varepsilon(\infty)=\infty$, см. теорему существования для квазиконформных отображений, напр., в книге [3], с. 90. По теореме о дифференцировании Q–к.к. отображений по параметру (см. [3], с. 94–96):

$$g_\varepsilon(w') = w' - \frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{f(B)}\gamma(w)\varphi(w,\,w')\,dm_w + o(\varepsilon,\,w')\,, \tag{19}$$

где $o(\varepsilon,\,w')/\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ локально равномерно относительно $w'\in\mathbb{C}$ и

$$\gamma(w) = \begin{cases} \left(\varkappa\cdot\frac{\overline{f_z}}{f_z}\right)\circ f^{-1}(w)\,, & w\in f(B)\,,\\ 0, & w\in f(\mathbb{C}\setminus B)\,. \end{cases} \tag{20}$$

Теперь рассмотрим семейство отображений $f_\varepsilon = g_\varepsilon\circ f$, $\varepsilon\in[0,\,1/2]$. Покажем, что $f_\varepsilon\in H^*_M$. Во-первых, по следствию 1, $f_\varepsilon\in W^{1,1}_{loc}$. Далее, заметим, что регулярный гомеоморфизм f обладает N^{-1}–свойством по теореме Пономарева, см. [19]. Поэтому, аналогично IC(6) в [3], поскольку $J_f(z)\ne 0$ п.в. и $f_z\ne 0$ п.в., получаем, что п.в.

$$\mu_{g_\varepsilon}\circ f = \frac{f_z}{\overline{f_z}}\cdot\frac{\mu_{f_\varepsilon}-\mu_f}{1-\overline{\mu_f}\cdot\mu_{f_\varepsilon}}\,. \tag{21}$$

Здесь мы воспользовались правилом дифференцированием суперпозиции (10), см. следствие 2. Разрешая (21) относительно μ_{f_ε}, заключаем, что п.в.

$$\mu_{f_\varepsilon} = \frac{\mu_{g_\varepsilon}\circ f + \frac{\overline{f_z}}{f_z}\cdot\mu_f}{\frac{\overline{f_z}}{f_z} + \overline{\mu_f}\cdot\mu_{g_\varepsilon}\circ f} = \frac{\mu + \frac{\overline{f_z}}{f_z}\cdot\gamma_\varepsilon\circ f}{1+\overline{\mu}\cdot\frac{\overline{f_z}}{f_z}\cdot\gamma_\varepsilon\circ f}\,. \tag{22}$$

Подставляя в (22) выражения из (15) и (18), имеем п.в.

$$\mu_{f_\varepsilon} = \frac{\mu + \varkappa_\varepsilon}{1 + \overline{\mu}\varkappa_\varepsilon} = \frac{\mu + \frac{\varepsilon\varkappa}{1-\varepsilon\varkappa\overline{\mu}}}{1 + \overline{\mu}\cdot\frac{\varepsilon\varkappa}{1-\varepsilon\varkappa\overline{\mu}}} = \mu + \varepsilon\varkappa\left(1 - |\mu|^2\right) \,. \tag{23}$$

Из (23) и (11) получаем, что $\mu_{f_\varepsilon} = \mu_\varepsilon$, где μ_ε задано в (12). Таким образом, $\mu_{f_\varepsilon} \in \mathfrak{M}_M$, $\varepsilon \in [0,\, 1/2]$, ввиду выпуклости $\mathfrak{M}_M$.

Заметим, что гомеоморфизм f_ε является регулярным при любом $\varepsilon \in [0,\, 1/2]$. Действительно, допустим, что f_ε не регулярен при некотором $\varepsilon \in [0,\, 1/2]$. Поскольку $|\mu_{f_\varepsilon}| < 1$ п.в., это бы означало, что $(f_\varepsilon)_z = 0 = (f_\varepsilon)_{\overline{z}}$ на некотором множестве $E \subseteq \mathbb{C}$ положительной меры, где отображение f_ε дифференцируемо, а f регулярно. Тогда аналогично IC(2) в [3], получаем, что всюду на E

$$(g_\varepsilon)_w \circ f = \frac{1}{J_f}\left[(f_\varepsilon)_z\overline{f_z} - (f_\varepsilon)_{\overline{z}}\,\overline{f_{\overline{z}}}\right] = 0\,, \tag{24}$$

см. предложение 2. Однако, множество $\mathcal{E} := f(E)$ имеет нулевую меру, поскольку g_ε – квазиконформное отображение. Таким образом, мы приходим к противоречию с N^{-1}–свойством отображения f, см. [19]. Следовательно, $f_\varepsilon \in H^*_M$, $\varepsilon \in [0,\, 1/2]$.

Наконец, после замен переменных в (19), приходим к (13), поскольку $|\mathbb{C} \setminus B| = 0$. □

4. Вариационный принцип максимума. Говорят, что функционал $\Omega : H^*_M \to \mathbb{R}$ является *дифференцируемым по Гато,* если

$$\Omega(f_\varepsilon) = \Omega(f) + \varepsilon Re\int\limits_{\mathbb{C}} g\, d\varkappa + o(\varepsilon) \tag{25}$$

для любой вариации $f_\varepsilon = f + \varepsilon g + o(\varepsilon)$ в классе H^*_M, где $\varkappa = \varkappa_f$ – некоторая конечная комплексная борелевская мера с компактным носителем и $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ локально равномерно в $\mathbb{C}$ (см. [20], с. 138–139). Другими словами, существует непрерывный и линейный по первой переменной функционал $L(g; f)$ такой, что

$$\Omega(f_\varepsilon) = \Omega(f) + \varepsilon\, Re\, L(g; f) + o(\varepsilon)\,. \tag{26}$$

Ниже предполагаем, что функция $\varphi(w, f(\zeta))$ локально интегрируема для любого $f \in H^*_M$ относительно произведения мер $dm_w \otimes d\varkappa(\zeta)$, где φ – ядро из (14), m – мера Лебега в $\mathbb{C}$, и, что

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \varphi(w, f(\zeta))\, d\varkappa(\zeta) \neq 0 \quad \text{для п.в. } w \in \mathbb{C}\,. \tag{27}$$

Тогда говорим, что Ω дифференцируем по Гато *без вырождения* на классе H^*_M.

Теорема 2. *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – семейство компактных выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру z, такое что $Q_M \in L^1_{loc}$, и пусть функционал $\Omega : H^*_M \to \mathbb{R}$ дифференцируем по Гато без вырождения. Если на отображении*

$f \in H_M^*$ достигается $\max \Omega$ по классу H_M^*, то его комплексная характеристика удовлетворяет включению $\mu(z) \in \partial M(z)$ для п.в. $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Поскольку $\mu \in \mathfrak{M}_M$, без ограничения общности считаем, что $\mu(z) \in M(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Допустим, что множество $E = \{z \in \mathbb{C} : \mu(z) \notin \partial M(z)\}$ имеет положительную меру Лебега. Пусть $E_m = \{z \in \mathbb{C} : Q_M(z) \le m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, $K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, χ, χ_m, $\chi_{z_0,r}$ – характеристические функции множеств $E, E_m, K(z_0, r)$, соответсвенно. Далее, пусть α_n, $n = 1, 2, \ldots,$ – перенумерация всех рациональных чисел из $[0, 2\pi)$ и $\rho_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots,$ – расстояния от $\mu(z)$ до точек пересечения лучей $\mu(z) + te^{i\alpha_n}$, $t > 0$, с $\partial M(z)$.

Покажем, что функции $\rho_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, являются измеримыми по z. Действительно, пусть $\Lambda_n(z) = \{\nu \in \mathbb{C} : \nu = \mu(z) + te^{i\alpha_n}, \quad 0 \le t \le 2\}$ – отрезок луча, исходящего из точки $\mu(z)$ в направлении $e^{i\alpha_n}$ длины 2. Измеримость семейств множеств $\Lambda_n(z)$ по z следует, напр., из предложения 3.1 в [7] и общих свойств элементарных операций над измеримыми функциями (см., напр., [5], с. 29–31). Следовательно, измеримы также семейства множеств $M_n(z) = M(z) \cap \Lambda_n(z)$ и $\{\eta_n(z)\} = \partial\mathbb{D} \cap \Lambda_n(z)$, где $\partial\mathbb{D} = \{\eta \in \mathbb{C} : |\eta| = 1\}$ – единичная окружность (см. лемму 3.3 в [7]). Таким образом, функции $\eta_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots,$ измеримы, напр., в силу критерия 6) предложения 6 в [4]. По предложению 3.1 в [7] измеримы также функции расстояния $r_n(z) = \min\limits_{\nu \in M_n(z)} |\nu - \eta_n(z)|$. После этого остается заметить, что $\rho_n(z) = |\mu(z) - \eta_n(z)| - r_n(z)$.

Рассмотрим теперь функции $\mu_n(z) = \mu(z) + \rho_n(z)e^{i\alpha_n}$. По построению они принадлежат классу $\mathfrak{M}_M$. Поскольку множества $M(z)$ выпуклы, то функции

$$\nu_n(z) := \mu(z) + \lambda(z)(\mu_n(z) - \mu(z)) = (1 - \lambda(z))\mu(z) + \lambda(z)\mu_n(z)$$

также принадлежат классу $\mathfrak{M}_M$ для произвольной измеримой функции $\lambda(z) : \mathbb{C} \to [0, 1]$. В частности, классу $\mathfrak{M}_M$ принадлежат функции

$$\nu_{z_0,r}^{m,n}(z) := \mu(z) + \lambda_m(z)\chi_{z_0,r}(z)(\mu_n(z) - \mu(z)),$$

где $\lambda_m(z) = \frac{1-|\mu(z)|^2}{2}\chi(z)\chi_m(z)$. Заметим, что $|\mu_n(z) - \mu(z)| = \rho_n(z) \le 2q_M(z)$ и

$$\varkappa_{z_0,r}^{m,n}(z) := \frac{\nu_{z_0,r}^{m,n}(z) - \mu(z)}{1 - |\mu(z)|^2} = \frac{\mu_n(z) - \mu(z)}{2}\chi(z)\chi_m(z)\chi_{z_0,r}(z)$$

принадлежат замкнутому шару радиуса $q_m := (m-1)/(m+1) < 1$ в $L^\infty(\mathbb{C})$.

По экстремальности f, применяя вариацию теоремы 1 с $\nu = \nu_{z_0,r}^{m,n}$, получаем, что

$$Re \int\limits_{\mathbb{C}} \left[\int\limits_{|z-z_0| \le r} \varphi_{m,n}(z, \zeta)\, dm_z \right] d\varkappa(\zeta) \ge 0, \tag{28}$$

где $\varphi_{m,n}(z, \zeta) = \lambda_m(z)(\mu_n(z) - \mu(z))f_z^2\varphi(f(z), f(\zeta))$. Рассмотрим функции

$$\psi_{z_0,r}^{m,n}(w, \zeta) = \begin{cases} \left(\varkappa_{z_0,r}^{m,n} \cdot \frac{f_z}{\overline{f_z}}\right) \circ f^{-1}(w)\ \varphi(w, f(\zeta)), & w \in f(B), \\ 0, & w \in f(\mathbb{C} \setminus B), \end{cases}$$

где B обозначает (борелево) множество всех точек плоскости $\mathbb{C}$, где отображение f имеет полный дифференциал и $J_f(z) \neq 0$. Они интегрируемы относительно произведения мер $dm_w \otimes d\varkappa(\zeta)$ (см. [21], с. 215). Заметим, что $J_{f^{-1}}(w) = \left[J_f\left(f^{-1}(w)\right)\right]^{-1} = \left[(1-|\mu|^2)f_z^2\right]^{-1}\left(f^{-1}(w)\right)$ в каждой точке $w \in f(B)$, ср. IC(3) в [3]. Кроме того, поскольку регулярный гомеоморфизм f обладает N^{-1}–свойством, после замены переменной (см. леммы III.2.1 и III.3.2 в [1]) получаем, что функция $\varphi_{m,n}(z,\zeta)$ также интегрируема относительно произведения мер $dm_z \otimes d\varkappa(\zeta)$, и по теореме Лебега-Фубини (см. [21], с. 353) из (28) заключаем, что

$$\int\limits_{|z-z_0|\leq r}\left[Re\int\limits_{\mathbb{C}}\varphi_{mn}(z,\zeta)\,d\varkappa(\zeta)\right]dm_z \geq 0\,.$$

По теореме Лебега о дифференцировании неопределенного интеграла (см. [5], с. 180) имеем неравенства $\lambda_m(z)Re(\mu_n(z)-\mu(z))\mathcal{B}(z) \geq 0$ для п.в. $z \in \mathbb{C}$, $m, n = 1, 2, \ldots$, где $\mathcal{B}(z) = \mathcal{A}(f(z))f_z^2$ и $\mathcal{A}(w)$ задано в (27). Поэтому, $\rho_n(z)Re\,\mathcal{B}(z)e^{i\alpha_n} \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, для п.в. $z \in E \cap E_m$. Поскольку же E_m, $m = 1, 2, \ldots$, образуют исчерпание плоскости $\mathbb{C}$ по мере, то последнее имеет место для п.в. $z \in \mathbb{C}$. С другой стороны, $\rho_n(z) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, на E и, таким образом, это равносильно неравенствам $Re\,\mathcal{B}(z)e^{i\alpha_n} \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, для п.в. $z \in E$. В силу произвола α_n, $n = 1, 2, \ldots$, отсюда имеем, что $Re\,\mathcal{B}(z)e^{i\alpha} \geq 0$ для п.в. $z \in E$ при любом $\alpha \in [0, 2\pi)$. В частности, при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ получаем: $\pm Re\,\mathcal{B}(z) \geq 0$, т.е. $Re\,\mathcal{B}(z) = 0$, а при $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = 3\pi/2$: $\pm Im\,\mathcal{B}(z) \geq 0$, т.е. $Im\,\mathcal{B}(z) = 0$. Таким образом, $\mathcal{B}(z) = 0$ для п.в. $z \in E$. Однако это невозможно, т.к. $\mathcal{A}(w) \neq 0$ п.в., f обладает N^{-1}–свойством и $f_z \neq 0$ п.в. Полученное противоречие и показывает, что $mesE = 0$, т.е. $\mu(z) \in \partial M(z)$ п.в. $\Box$

5. Необходимые условия экстремума. Для формулировки необходимых условий экстремума нам потребуется еще одно понятие. Именно, пусть $\mu \in \mathfrak{M}_M$. Тогда через $\omega_\mu(z)$ обозначим *конус допустимых направлений* (см., напр., [22], с. 12) для множества $M(z)$ в точке $\mu(z)$, т.е. множество всех $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, таких, что $\mu(z)+\varepsilon\omega \in M(z)$ при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$. Отметим, что для строго выпуклых множеств $M(z)$, каковыми являются инвариантно-выпуклые множества, конус допустимых направлений $\omega_\mu(z)$ при каждом z является открытым выпуклым конусом. Почти дословно повторяя доказательство теоремы 2, получаем:

Теорема 3. *При условиях теоремы 2, экстремаль f в задаче о $\max\Omega$ на классе H_M^* удовлетворяет неравенствам*

$$Re\,\omega\mathcal{B}(z) \geq 0 \tag{29}$$

для п.в. $z \in \mathbb{C}$ при всех ω из конуса допустимых направлений $\omega_\mu(z)$, где $\mathcal{B}(z) = \mathcal{A}(f(z))f_z^2$, $A(w)$ задается соотношением (27).

Следствие 3. *Если дополнительно при п.в. $z \in \mathbb{C}$ граница $\partial M(z)$ регулярна, т.е. в каждой своей точке имеет касательную, то (29) переходит в неравенство*

$$n(z)\mathcal{B}(z) \geq 0 \quad \text{п.в.}\,, \tag{30}$$

где $n(z)$ – единичный вектор внутренней нормали к $\partial M(z)$ в точке $\mu(z)$.

В частности, если $M(z)$ – семейство кругов,

$$M(z) = \{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa - c(z)| \leq k(z)\}\,, \tag{31}$$

где функции $c(z)$ и $k(z)$ измеримы, то по принципу максимума $n(z) = (c(z) - \mu(z))/k(z)$, и соотношение (30) п.в. эквивалентно тому, что $\frac{c(z)-\mu(z)}{k(z)} = \frac{\overline{\mathcal{B}(z)}}{|\mathcal{B}(z)|}$, т.е. $\mu(z) = c(z) - k(z)\frac{\overline{\mathcal{B}(z)}}{|\mathcal{B}(z)|}$. Таким образом, имеем:

Следствие 4. *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – семейство кругов (31), а функционал $\Omega : H^*_M \to \mathbb{R}$ дифференцируем по Гато без вырождения. Тогда при $Q(z) := \frac{1+k(z)+|c(z)|}{1-k(z)-|c(z)|} \in L^1_{loc}$, экстремаль задачи о $\max\Omega$ на классе H^*_M удовлетворяет уравнению*

$$f_{\overline{z}} = c(z) f_z - k(z)\frac{\overline{\mathcal{A}(f(z))}}{|\mathcal{A}(f(z))|}\,\overline{f_z}\,. \tag{32}$$

В частности, при $c(z) = 0$ и $K(z) := \frac{1+k(z)}{1-k(z)} \in L^1_{loc}$ получаем уравнение

$$f_{\overline{z}} = -k(z)\,\frac{\overline{\mathcal{A}(f(z))}}{|\mathcal{A}(f(z))|}\,\overline{f_z}\,. \tag{33}$$

1. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane, New York: Springer, 1973. – 258 p.
2. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2009. – **54**, № 10. – P. 935-950.
3. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 132 с.
4. *Рязанов В.И.* Об усилении теоремы сходимости Штребеля К. // Изв. РАН, сер. матем. – 1992. – **56**, № 3. – С. 636-653.
5. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949. – 494 с.
6. *Ломако Т.В.* О компактности классов решений уравнений Бельтрами с ограничениями теоретико-множественного типа // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – **21**. – С. 161-167.
7. *Ryazanov V.I.* Some questions of convergence and compactness for quasiconformal mappings // Amer. Math. Soc. Trans. – 1986. – **131**, № 2. – C. 7-19.
8. *Ryazanov V., Sevost'yanov E.* Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean // Ann. Acad. Scien. Fenn. – 2011. – **36**, № 1. – P. 231-244.
9. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.
10. *Ухлов А.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // Сиб. матем. журн. – 1993. – **34**, № 1. – С. 165-171.
11. *Водопьянов С.К., Ухлов А.* Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. матем. журн. – 1998. – **39**, № 4. – С. 665-682.
12. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – М.: Наука, 1983. – 284 с.
13. *Гутлянский В.Я.* О произведении конформных радиусов неналегающих областей // Доклады АН Укр. ССР, сер. "А". – 1977. – № 4. – С. 298-302.
14. *Gutlyanskii V.Ya.* The product of the conformal radii of nonoverlapping domains // Ten papers on complex analysis, Amer. Math. Soc. Trans., ser. 2. – 1984. – **122**. – P. 65-69.
15. *Гутлянский В.Я.* О методе вариаций для однолистных аналитических функций с квазиконформным продолжением // Сиб. матем. журн. – 1980. – **21**, № 2. – С. 61-78.

16. *Рязанов В.И.* Топологические аспекты теории квазиконформных отображений. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. – Донецк, 1993. – 281 с.
17. *Menchoff D.* Sur les differentielles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – **105**. – P. 75-85.
18. *Трохимчук Ю.Ю.* Устранимые особенности аналитических функций. – К.: Наукова думка, 1992. – 223 с.
19. *Пономарев С.П.* N^{-1}-свойство отображений и (N)-условие Лузина // Мат. заметки – 1995. – **58**. – С. 411-418.
20. *Schober G.* Univalent Functions // Lect. Notes Math. – 1975. – 478. – P. 1–199.
21. *Бурбаки Н.* Интегрирование. – М.: Наука, 1967. – 396 с.
22. *Лоран П.Ж.* Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 496 с.

T.V. Lomako, V.I. Ryazanov

Theory of variational method for Beltrami equations.

Variations are constructed for classes of regular solutions of the degenerate Beltrami equations with constraints of the set-theoretic type for the complex coefficient. A variational principle of maximum and other necessary extremum conditions are proved.

Keywords: *Beltrami equations, dilatation, variations, regular solutions, Sobolev classes, necessary extremum conditions.*

Т.В. Ломако, В.І. Рязанов

Теорія варіаційного методу для рівнянь Бельтрамі.

Побудовано варіації для класів регулярних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з обмеженнями теоретико-множинного типу на комплексний коефіцієнт. Доведено варіаційний принцип максимуму та інші необхідні умови екстремума.

Ключові слова: *рівняння Бельтрамі, дилатація, варіація, регулярні розв'язки, класи Соболева, необхідні умови екстремума.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`tlomako@yandex.ru, vlryazanov1@rambler.ru`

Получено 30.03.11