УДК 539.3

©2011. **А.В. Зенченков**

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ПЕРФОРИРОВАННОМ ОСНОВАНИИ

Получены аналитические формулы для компонент напряжений и перемещений в трансверсально-изотропной полосе, лежащей на упругом перфорированном основании, в случае, когда на участке нижней границы приложена нормальная нагрузка.

Ключевые слова: *теория упругости, смешанная задача, упругая полоса, преобразование Фурье.*

1. Введение. В работах [1, 2] решена задача о распределении напряжений в упругой изотропной полуплоскости, лежащей на упругом перфорированном основании при действии на границе распределенной нагрузки. В работах [3, 4] решение было обобщено на случай трансверсально-изотропной полуплоскости. В настоящей работе с помощью интегрального преобразования Фурье получено решение для трансверсально-изотропной полосы с упруго закрепленной нижней границей и свободной верхней. На участке нижней границы приложена нормальная нагрузка.

2. Постановка смешанной задачи. Основные уравнения и граничные условия.

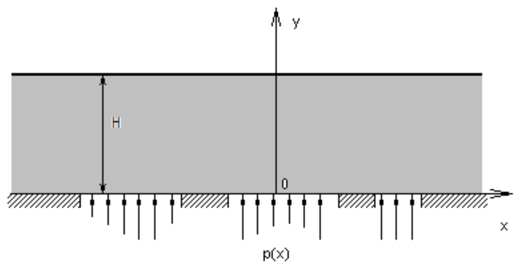

Рис. 1.

Рассмотрим следующую смешанную задачу теории упругости. Пусть ось x декартовой прямоугольной системы координат (x, y) проходит по границе полосы и упругого основания (рис.1). На участке нижней границы полосы, в области V, действует распределенная нормальная нагрузка $\sigma_y = p(x)$. В остальных точках нижней границы выполняется условие пропорциональности нормальных напряжений и смещений. Касательные напряжения на оси x отсутствуют. На верхней границе полосы нормальные и касательные напряжения равны нулю.

В случае плоской деформации при отсутствии массовых сил уравнения равновесия и совместности деформаций имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \tag{2}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – компоненты напряжений и упругих деформаций.

Обозначим через u и v перемещения вдоль осей x и y. Граничные условия смешанной задачи запишем в виде

$$\begin{array}{ll} \sigma_y(x,0) = p(x), & x \in V; \\ \sigma_y(x,0) = k \cdot v(x,0), & x \notin V; \\ \tau_{xy}(x,0) = 0, & x \in (-\infty, +\infty); \\ \sigma_y(x,H) = 0, & x \in (-\infty, +\infty); \\ \tau_{xy}(x,H) = 0, & x \in (-\infty, +\infty). \end{array} \tag{3}$$

В упругой трансверсально-изотропной полуплоскости перемещения с компонентами напряжений связаны обобщенным законом Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y, \\ \varepsilon_y &= \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y, \\ \gamma_{xy} &= \beta_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \tag{4}$$

Коэффициенты деформации β_{ij} выражаются формулами

$$\beta_{11} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1}, \quad \beta_{22} = \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_2^2}{E_1}, \quad \beta_{12} = \frac{\nu_2(1+\nu_1)}{E_1}, \quad \beta_{66} = \frac{1}{G}. \tag{5}$$

Система дифференциальных уравнений (1), (2), (4) сводится к уравнению [5]:

$$\beta_{22}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (2\beta_{12} + \beta_{66})\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_{11}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0, \tag{6}$$

причем компоненты напряжения выражаются через функцию Φ следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \tag{7}$$

3. Определение напряжений и перемещений в полосе. Будем решать уравнение (6) с помощью интегрального преобразования Фурье [7]. Умножим обе части уравнения на $e^{i\xi x}$ и проинтегрируем по переменной x от $-\infty$ до ∞. Получим

$$\beta_{11}\frac{d^4 Q}{dy^4} - (2\beta_{12} + \beta_{66})\xi^2\frac{d^2 Q}{dy^2} + \beta_{22}\xi^4 Q = 0, \tag{8}$$

где

$$Q(\xi,y)=F\{\Phi(x,y)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(x,y)e^{i\xi x}dx,$$
$$\Phi(x,y)=F^{-1}\{Q(\xi,y)\}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q(\xi,y)e^{-i\xi x}d\xi. \tag{9}$$

Корни характеристического уравнения равны $\pm r_1|\xi|,\pm r_2|\xi|$,

$$r_1,r_2=\sqrt{\frac{(2\beta_{12}+\beta_{66})\pm\sqrt{(2\beta_{12}+\beta_{66})^2-4\beta_{11}\beta_{22}}}{2\beta_{11}}}. \tag{10}$$

Общее решение дифференциального уравнения (8) запишем в виде

$$Q(y,\xi)=\sum_{n=1}^{4}A_n(\xi)e^{r_n|\xi|y}. \tag{11}$$

Здесь $r_3=-r_1$, $r_4=-r_2$. Учитывая формулы (7), для изображений компонент напряжений получим

$$\bar\sigma_x=F\{\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\}=\frac{\partial^2Q}{\partial y^2}=\xi^2\sum_{n=1}^{4}A_nr_n^2e^{r_n|\xi|y},$$
$$\bar\sigma_y=F\{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\}=-\xi^2Q=-\xi^2\sum_{n=1}^{4}A_ne^{r_n|\xi|y}, \tag{12}$$
$$\bar\tau_{xy}=F\{\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\}=i\xi\frac{\partial Q}{\partial y}=i\xi|\xi|\sum_{n=1}^{4}A_nr_ne^{r_n|\xi|y}.$$

Применяя к первому уравнению закона Гука (4) интегральное преобразование Фурье, получим

$$\bar\varepsilon_x=\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}=\beta_{11}\bar\sigma_x+\beta_{12}\bar\sigma_y=\xi^2\sum_{n=1}^{4}A_n(\beta_{11}r_n^2-\beta_{12})e^{r_n|\xi|y}.$$

Отсюда

$$\bar u=\frac{1}{-i\xi}\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}=i\xi\sum_{n=1}^{4}A_n(\beta_{11}r_n^2-\beta_{12})e^{r_n|\xi|y}. \tag{13}$$

Из второго уравнения закона Гука (4), получим

$$\bar\varepsilon_y=\overline{\frac{\partial v}{\partial y}}=\beta_{12}\bar\sigma_x+\beta_{22}\bar\sigma_y=\xi^2\sum_{n=1}^{4}A_n(\beta_{12}r_n^2-\beta_{22})e^{r_n|\xi|y}.$$

Решив дифференциальное уравнение, найдем

$$\bar{v} = |\xi| \sum_{n=1}^{4} A_n \frac{1}{r_n} (\beta_{12} r_n^2 - \beta_{22}) e^{r_n |\xi| y} + C(\xi). \tag{14}$$

Неизвестную функцию $C(\xi)$ найдем из выражения $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$. Применив к нему интегральное преобразование Фурье и подставив формулы для $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\tau}_{xy}$, получим, что $C(\xi) \equiv 0$.

Введём вспомогательную функцию

$$\beta(x) = \begin{cases} p(x) - k \cdot v(x,0), & x \in V; \\ 0, & x \notin V. \end{cases} \tag{15}$$

Тогда граничное условие для нормальных напряжений можно записать в виде

$$\sigma_y(x,0) = k \cdot v(x,0) + \beta(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{16}$$

Применив интегральное преобразование Фурье, получим

$$\bar{\sigma}_y(x,0) = k \cdot \bar{v}(\xi,0) + \bar{\beta}(x). \tag{17}$$

Таким образом, для нахождения четырех коэффициентов $A_n(\xi)$ имеем систему из четырех линейных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_y(\xi,H) = 0, \\ \bar{\tau}_{xy}(\xi,H) = 0, \\ \bar{\tau}_{xy}(\xi,0) = 0, \\ \bar{\sigma}_y(\xi,0) - k \cdot \bar{v}(\xi,0) = \bar{\beta}. \end{cases} \quad \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{4} A_n e^{r_n|\xi|H} = 0, \\ \sum\limits_{n=1}^{4} A_n r_n e^{r_n|\xi|H} = 0, \\ \sum\limits_{n=1}^{4} A_n r_n = 0, \\ \sum\limits_{n=1}^{4} A_n(-\xi^2 - k\frac{|\xi|}{r_n}(\beta_{12} r_n^2 - \beta_{22})) = \bar{\beta}. \end{cases} \tag{18}$$

Система линейных уравнений совместна при $\xi \neq 0$, и имеет единственное решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера:

$$A_n(\xi) = \bar{\beta}(\xi) \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Здесь $\det A$ – определитель матрицы системы линейных уравнений, а $\det A_n$ – определитель матрицы, полученной заменой столбца n на $(0,0,0,1)$.

Запишем $Q(\xi, y)$ в следующем виде, для удобства расчетов выделив $\bar{\beta}(\xi)$

$$Q(\xi,y) = \bar{\beta}(\xi) \sum_{n=1}^{4} A_n(\xi) e^{r_n|\xi|y}, \quad A_n(\xi) = \frac{\det A_n}{\det A}. \tag{19}$$

Найдем выражения для компонент напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= F^{-1}\{\bar\sigma_x\} = F^{-1}\{\xi^2\bar\beta\sum_{n=1}^{4}A_n r_n^2 e^{r_n|\xi|y}\},\\
\sigma_y &= F^{-1}\{\bar\sigma_y\} = F^{-1}\{-\xi^2\bar\beta\sum_{n=1}^{4}A_n e^{r_n|\xi|y}\},\\
\tau_{xy} &= F^{-1}\{\bar\tau_{xy}\} = F^{-1}\{i\xi|\xi|\bar\beta\sum_{n=1}^{4}A_n r_n e^{r_n|\xi|y}\},\\
u &= F^{-1}\{\bar u\} = F^{-1}\{i\xi\bar\beta\sum_{n=1}^{4}A_n(\beta_{11}r_n^2-\beta_{12})e^{r_n|\xi|y}\},\\
v &= F^{-1}\{\bar v\} = F^{-1}\{|\xi|\bar\beta\sum_{n=1}^{4}A_n\frac{1}{r_n}(\beta_{12}r_n^2-\beta_{22})e^{r_n|\xi|y}\}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Выполнив преобразования, получим

$$\begin{aligned}
&\sigma_x(x,y) = \int_V \beta(\eta)G_x(x-\eta,y)d\eta, \quad \sigma_y(x,y) = \int_V \beta(\eta)G_y(x-\eta,y)d\eta,\\
&\tau_{xy}(x,y) = \int_V \beta(\eta)G_{xy}(x-\eta,y)d\eta,\\
&u(x,y) = \int_V \beta(\eta)G_u(x-\eta,y)d\eta, \quad v(x,y) = \int_V \beta(\eta)G_v(x-\eta,y)d\eta,
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
G_x(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\xi^2\sum_{n=1}^{4}A_n r_n^2 e^{r_n|\xi|y})e^{-i\xi x}d\xi,\\
G_y(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-\xi^2\sum_{n=1}^{4}A_n e^{r_n|\xi|y})e^{-i\xi x}d\xi,\\
G_{xy}(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\xi|\xi|\sum_{n=1}^{4}A_n r_n e^{r_n|\xi|y})e^{-i\xi x}d\xi,\\
G_u(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\xi\sum_{n=1}^{4}A_n(\beta_{11}r_n^2-\beta_{12})e^{r_n|\xi|y})e^{-i\xi x}d\xi,\\
G_v(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(|\xi|\sum_{n=1}^{4}A_n\frac{1}{r_n}(\beta_{12}r_n^2-\beta_{22})e^{r_n|\xi|y})e^{-i\xi x}d\xi.
\end{aligned} \tag{22}$$

Неизвестную функцию β найдем из интегрального уравнения, которое получается из первого граничного условия (3)

$$\int\limits_V \beta(\eta) G_y(x-\eta, 0) d\eta = p(x), \quad x \in V, \tag{23}$$

где

$$G_y(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-\xi^2 \sum_{n=1}^{4} A_n(\xi)) e^{-i\xi x} d\xi. \tag{24}$$

Также функцию β можно найти из уравнения (16)

$$\beta(x) = p(x) - k \cdot \int\limits_V \beta(\eta) G_v(x-\eta, 0) d\eta, \quad x \in V, \tag{25}$$

здесь

$$G_v(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (|\xi| \sum_{n=1}^{4} A_n \frac{1}{r_n} (\beta_{12} r_n^2 - \beta_{22})) e^{-i\xi x} d\xi. \tag{26}$$

Функции $G_x, G_y, G_{xy}, G_u, G_v$ зависят от упругих постоянных $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{22}$, коэффициента пропорциональности k и толщины полосы H. Таким образом, будучи вычислены и запомнены один раз, они могут быть использованы для любой области V.

При $k = 0$ задача (1)-(4) вырождается в первую основную задачу. Из формулы (25) получаем $\beta(x) = p(x)$.

Решение (21)-(24) имеет практическое приложение в механике горных пород. В частности, оно может быть использовано при исследовании задач, связанных с подземной разработкой угольных пластов лавами. При этом упругая полоса моделирует массив горных пород, а перфорированное основание – разрабатываемый пласт полезного ископаемого с очистной выработкой.

1. *Зенченков А.В.* Распределение напряжений в полуплоскости, лежащей на упругом основании, при действии на границе сосредоточенной силы // Труды ИПММ НАН Украины. – 2002. – Т. 7. – С. 70-75.
2. *Хапилова Н.С., Зенченков А.В.* Смешанная задача теории упругости для изотропной полуплоскости, лежащей на упругом основании, при действии на границе распределенной нагрузки // Ростов-на-Дону–Азов. Труды III Всеросийской конференции по теории упругости с международным участием. – 2004. – С. 177-179.
3. *Хапилова Н.С., Зенченков А.В.* Смешанная задача теории упругости для трансверсально-изотропной полуплоскости на упругом основании // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. Материалы IV Международной научной конференции. – Донецк: Юго-Восток, 2006. – С. 139-141.
4. *Зенченков А.В.* Смешанная задача для трансверсально-изотропной полуплоскости, лежащей на упругом перфорированном основании с пластическими зонами, при действии на участке границы линейной нормальной нагрузки // Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – Т. 16. – С. 88-92.
5. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

6. *Кавлакан М.В.,Михайлов А.М.* О распределении давления на пласт при горизонтальной выработке // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 1977. – №. 5. – С. 48-53.
7. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.: Наука, 1967. – 402 с.

A.V. Zenchenkov

Analitical solution of the mixed problem of elasticity for transversely-isotropic band on an elastic perforated base.

Analytical formulas for the components of stresses and displacements in a transversely-isotropic band on an elastic perforated base, in the case where the lower boundary of the band applied normal load.

Keywords: *elasticity theory, mixed problem, elastic band, Fourier transform.*

А.В. Зенченков

Аналітичний розв'язок змішаної задачі теорії пружності для трансверсально-ізотропної смуги на пружній перфорованій основі.

Отримано аналітичні формули для компонент напружень та переміщень у трансверсально-ізотропній смузі, що лежить на пружній перфорованій основі, у разі, коли на ділянці нижньої межі прикладене нормальне навантаження.

Ключові слова: *теорія пружності, змішана задача, пружна смуга, перетворення Фур'є.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`azenchenkov@mail.ru`

Получено 12.05.11