УДК 517.444

©2011. **В.В. Волчков, Вит.В. Волчков**

МНОЖЕСТВА ИНЪЕКТИВНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОМПЕЙЮ НА ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Изучаются множества инъективности преобразования Помпейю на многомерных областях. Построены примеры областей, для которых выполняются свойства инъективности и неинъективности.

Ключевые слова: *преобразование Помпейю, множества инъективности, сферические гармоники.*

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – пространство распределений с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. Для $\varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\zeta \in M(n)$ определим распределение $\zeta\varphi$, действующее на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\langle \zeta\varphi, f(x)\rangle = \langle \varphi, f(\zeta^{-1}x)\rangle, \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$$

(здесь и далее $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ – пространство бесконечно-дифференцируемых функций на гладком многообразии $\mathcal{M}$, см., например, [1, гл. 2, § 2, п. 2]). Для любого открытого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ такого, что множество $\Lambda(\mathcal{U}, \varphi) = \{\zeta \in M(n) : \operatorname{supp} \zeta\varphi \subset \mathcal{U}\}$ непусто, преобразование Помпейю $\mathcal{P}_\varphi$ отображает $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ в $\mathcal{E}(\Lambda(\mathcal{U}, \varphi))$ следующим образом

$$(\mathcal{P}_\varphi f)(\zeta) = \langle \zeta\varphi, f\rangle, \quad f \in \mathcal{E}(\mathcal{U}), \zeta \in \Lambda(\mathcal{U}, \varphi).$$

Множество $\mathcal{U}$ называется множеством инъективности преобразования $\mathcal{P}_\varphi$, если из равенства $\mathcal{P}_\varphi f = 0$ на $\Lambda(\mathcal{U}, \varphi)$ следует, что $f = 0$ на $\mathcal{U}$. Обозначим I_φ – совокупность всех множеств инъективности преобразования $\mathcal{P}_\varphi$.

Одной из важных задач интегральной геометрии является

Проблема 1. *Для заданного $\varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ описать все множества $\mathcal{U} \in I_\varphi$.*

Для отдельных φ и $\mathcal{U}$ инъективность преобразования Помпейю и близкие вопросы изучались многими авторами (см., например, работы [2]–[6] с обширной библиографией). В общем случае проблема 1 является весьма трудной (она содержит в себе, например, старую нерешенную проблему Шиффера, см. [4, § 3]). Некоторые достаточные условия геометрического характера, при которых $\mathcal{U} \in I_\varphi$, получены К.А. Беренстейном, Р. Гэем и А. Ижером, см. [7], [8]. Однако получить полное описание I_φ для нетривиальных случаев долгое время не удавалось.

Заметный прогресс в решении проблемы 1 был достигнут в работе [9], где получено описание I_φ для широкого класса распределений φ с носителем на сфере. Для таких распределений φ важную роль в рассматриваемом вопросе играет понятие спектра в разложении φ по сферическим гармоникам.

Пусть $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ – пространство распределений на $\mathbb{S}^{n-1}$ (см., например, [1, гл. 2, § 2, п. 2]). Всякое распределение $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ продолжается до распределения $\varphi^* \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ с носителем на $\mathbb{S}^{n-1}$, при этом для любой $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ имеем $\langle \varphi^*, f\rangle = \left\langle \varphi, f\big|_{\mathbb{S}^{n-1}}\right\rangle$, где $f\big|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ – сужение f на $\mathbb{S}^{n-1}$. Для любого $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ положим $I_\varphi = I_{\varphi^*}$. Пусть $\mathcal{H}_k$ – пространство сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-1}$, рассматриваемое как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ (см. [1, введение]), d_k – размерность $\mathcal{H}_k$, $\left\{Y_l^{(k)}\right\}$, $1 \le l \le d_k$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Каждому распределению $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ соответствует ряд Фурье

$$\varphi \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k} \varphi_{k,l} Y_l^{(k)},$$

где $\varphi_{k,l} = \left\langle \varphi, \overline{Y_l^{(k)}}\right\rangle$ (черта означает знак комплексного сопряжения). Обозначим $\operatorname{spec}\varphi$ – спектр распределения φ, то есть множество всех пар индексов (k,l), для которых $\varphi_{k,l} \ne 0$.

Можно показать, что $I_\varphi = \varnothing$ для $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ тогда и только тогда, когда либо $\operatorname{spec}\varphi$ состоит только из пары $(0,1)$, либо $(0,1) \notin \operatorname{spec}\varphi$, см. [9, § 1]. В работе [9] получено также описание I_φ для распределений $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$, у которых $\operatorname{supp}\varphi = \mathbb{S}^{n-1}$ и $\operatorname{spec}\varphi$ – бесконечное множество, содержащее пару $(0,1)$ (при $n = 2$ условие бесконечности спектра заменяется несколько более сильным требованием, см. [9, § 1]).

Очевидным необходимым условием инъективности $\mathcal{P}_\varphi$ на $\mathcal{U}$ является равенство

$$\overline{\mathcal{U}} = \overline{\bigcup_{\zeta\in\Lambda(\mathcal{U},\varphi)} \operatorname{supp}\zeta\varphi} \tag{1}$$

(здесь черта означает замыкание множества). В связи с этим представляет интерес

Проблема 2. *Описать множество $\mathcal{A}$ распределений $\varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, для которых условие (1) является необходимым и достаточным для инъективности $\mathcal{P}_\varphi$ на $\mathcal{U}$.*

В работе [9], в частности, показано, что при $n \ge 3$ множество $\mathcal{A}$ содержит все распределения $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ с бесконечным спектром, содержащим пару $(0,1)$, у которых $\operatorname{supp}\varphi = \mathbb{S}^{n-1}$ (при $n = 2$ это верно при некоторых дополнительных предположениях, см. [9, § 1]). При этом условие бесконечности спектра, вообще говоря, ослабить нельзя, однако контрпримеры были известны лишь для областей $\mathcal{U}$, не являющихся односвязными (см. [9, лемма 23]). Поэтому возникает следующая

Проблема 3. *Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$, $\operatorname{spec}\varphi$ – конечное множество, содержащее пару $(0,1)$ и $\operatorname{spec}\varphi \ne \{(0,1)\}$. Описать все односвязные области $\mathcal{U} \in I_\varphi$. В частности, верно ли, что всякая односвязная область $\mathcal{U}$, удовлетворяющая (1), принадлежит I_φ?*

Далее, если носитель распределения $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ не совпадает с $\mathbb{S}^{n-1}$, то $\operatorname{spec}\varphi$ является бесконечным множеством. Поэтому в связи с указанными выше результатами работы [9] представляет интерес

Проблема 4. *Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$, $\operatorname{supp}\varphi \ne \mathbb{S}^{n-1}$ и $(0,1) \in \operatorname{spec}\varphi$. Верно ли, что $\varphi \in \mathcal{A}$?*

2. Основные результаты. В данной работе получены отрицательные ответы на вопросы, поставленные в формулировках проблем 3, 4 (см. теоремы 1, 2 ниже), а также новые достаточные условия инъективности преобразования Помпейю. При этом обнаружен новый эффект: в отличие от случаев, изученных в [9], для распределений φ, удовлетворяющих условиям проблемы 3, инъективность $\mathcal{P}_\varphi$ на $\mathcal{U}$ (даже при условии строгой выпуклости $\mathcal{U}$) зависит не только от формы области $\mathcal{U}$ (определяемой необходимым условием (1)), но и от размеров $\mathcal{U}$ (см. теоремы 1, 3). Это обстоятельство указывает на то, что даже при значительном сужении класса рассматриваемых областей $\mathcal{U}$ для распределений $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ с конечным спектром вопрос об инъективности $\mathcal{P}_\varphi$ на $\mathcal{U}$ является, по-видимому, довольно трудным.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$, $\operatorname{spec}\varphi$ *– конечное множество, содержащее пару* $(0,1)$ *и* $\operatorname{spec}\varphi \neq \{(0,1)\}$. *Тогда для любого* $\alpha > 1$ *такого, что*

$$\sqrt{\alpha^2-1}\,(2\alpha^2-\alpha+(1-\ \alpha)\sqrt{\alpha^2+\alpha}) >\ \alpha,$$

объединение $\mathcal{U}$ *всех открытых единичных шаров, содержащихся в эллипсоиде*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : (\alpha^2-1)(x_1^2+\dots+x_{n-1}^2)+\alpha^2 x_n^2 \leq \alpha^4\} \tag{2}$$

удовлетворяет условию (1) и не принадлежит I_φ.

Отметим, что утверждение теоремы 1 становится неверным, если эллипсоид (2) заменить эллипсоидом вида

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} x_k^2/a_k^2 \leq 1\}, \quad \text{где} \quad 2 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$$

(см. [9, лемма 20] и теорему 3 ниже).

Теорема 2. *Для любого открытого множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, *содержащего две диаметрально противоположные точки сферы* $\mathbb{S}^{n-1}$, *существует* $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ *такое, что* $\operatorname{supp}\varphi \subset E \cap \mathbb{S}^{n-1}$, $(0,1) \in \operatorname{spec}\varphi$ *и* $\varphi \notin \mathcal{A}$.

Вопрос о необходимости условия о двух диаметрально противоположных точках в теореме 2 остается открытым.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$, $\operatorname{spec}\varphi \neq \{(0,1)\}$ *и* $(0,1) \in \operatorname{spec}\varphi$. *Пусть также* $\mathcal{U}$ *– область в* $\mathbb{R}^n$ *со следующими свойствами:*

1) $\mathcal{U}$ *удовлетворяет условию (1);*

2) центры двух любых единичных сфер, содержащихся в $\mathcal{U}$, *можно соединить ломаной так, что всякая единичная сфера с центром на этой ломаной содержится в* $\mathcal{U}$;

3) $\mathcal{U}$ *содержит открытый шар радиуса* $r = 2$.

Тогда $\mathcal{U} \in I_\varphi$. *Если* $\mathcal{U}$ *не удовлетворяет хотя бы одному из условий 1)–3), это утверждение, вообще говоря, неверно.*

Приведем теперь некоторые достаточные условия инъективности преобразования Помпейю.

Рассмотрим конечное семейство $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Для любого открытого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ такого, что каждое из множеств

$$\Lambda_j = \{\zeta \in M(n) : \operatorname{supp} \zeta\varphi_j \subset \mathcal{U}\}, \quad j = 1, \ldots, m$$

непусто, преобразование Помпейю $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ отображает $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ в декартово произведение $\mathcal{E}(\Lambda_1) \times \ldots \times \mathcal{E}(\Lambda_m)$ следующим образом

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f) = (f_1, \ldots, f_m), \quad f \in \mathcal{E}(\mathcal{U}),$$

где $f_j(\zeta) = \langle \zeta\varphi_j, f \rangle$, $\zeta \in \Lambda_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Множество $\mathcal{U}$ называется множеством инъективности преобразования $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$, если из равенства $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f) = (0, \ldots, 0)$ для $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ следует, что $f = 0$ на $\mathcal{U}$. Обозначим $I_{\mathcal{F}}$ – совокупность всех множеств инъективности преобразования $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$.

Пусть

$$r(\mathcal{F}) = \min_{1 \leq j \leq m} r(\varphi_j),$$

где $r(\varphi_j)$ – наименьший из радиусов замкнутых шаров, содержащих носитель φ_j. Обозначим $\widetilde{\varphi}$ – сферическое преобразование радиального распределения $\varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (см. [1, гл. 4]), $\mathcal{Z}_{\varphi} = \{z \in \mathbb{C} : \widetilde{\varphi}(z) = 0)\}$.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, $m \geq 2$ – семейство радиальных распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\bigcap_{j=1}^m \mathcal{Z}_{\varphi_j} = \varnothing$ и $\mathcal{U}$ – область в $\mathbb{R}^n$ со следующими свойствами:*

1) каждая точка $\mathcal{U}$ лежит в некотором замкнутом шаре радиуса $r(\mathcal{F})$, содержащемся в $\mathcal{U}$;

2) множество центров всех замкнутых шаров радиуса $r(\mathcal{F})$, содержащихся в $\mathcal{U}$, является связным;

3) $\mathcal{U}$ содержит замкнутый шар радиуса $r(\varphi_1)$.

Тогда $\mathcal{U} \in I_{\mathcal{F}}$. Если $\mathcal{U}$ не удовлетворяет хотя бы одному из условий 1)–3), это утверждение, вообще говоря, неверно.

Отметим также, что для любого семейства $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ радиальных распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ такого, что $\bigcap_{j=1}^m \mathcal{Z}_{\varphi_j} \neq \varnothing$, все пространство $\mathbb{R}^n$ не является множеством инъективности преобразования $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$.

1. *Helgason S.* Groups and Geometric Analysis. – New York: Academic Press, 1984. – 735 p.
2. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations (ed. Fuglede B. et. al). – Dordrecht: Kluwer. – 1992. – P. 185-194.
3. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem" // Contemp. Math. / Radon Transform and Tomography. – 2001. – V. 278. – P. 69-74.
4. *Беренстейн К.А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свёртках // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления: ВИНИТИ. – 1989. – Т. 54. – С. 5-111.
5. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
6. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer-Verlag, 2009. – 671 p.
7. *Berenstein C.A., Gay R.* Le problème de Pompeiu locale // J. Analyse Math. – 1989. – V. 52. – P. 133-166.

8. *Berenstein C.A., Gay R., Yger A.* Inversion of the local Pompeiu transform // J. Analyse Math. – 1990. – V. 54. P. 259-287.
9. *Волчков В.В.* О множествах инъективности преобразования Помпейю // Мат. сборник. – 1993. – Т. 184. – № 7. – С. 71-78.

V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov

Injectivity sets of the Pompeiu transform on Euclidean spaces.

Injectivity sets of the Pompeiu transform on multidimensional domains are studied. Examples of domains for which the properties of injectivity and non-injectivity hold are constructed.

Keywords: *Pompeiu transform, injectivity sets, spherical harmonics.*

В.В. Волчков, Віт.В. Волчков

Множини ін'єктивності перетворення Помпейю на евклідових просторах.

Вивчаються множини ін'єктивності перетворення Помпейю на багатовимірних областях. Побудовано приклади областей, для яких мають місце властивості ін'єктивності та неін'єктивності.

Ключові слова: *перетворення Помпейю, множини ін'єктивності, сферичні гармоніки.*

Донецкий национальный ун-т
`valeriyvolchkov@gmail.com`

Получено 30.03.11