УДК 517.5

©2011. **Д.С. Волковницький**

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ ОПЕРАТОРАМИ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Отримано асимптотичну рівність для точних верхніх меж відхилень операторів U_σ спеціального вигляду в рівномірній метриці на класах функцій, визначених на дійсній осі та необов'язково періодичних, (ψ,β)-похідні яких належать одиничній кулі простору істотно обмежених функцій. У деяких випадках отримана рівність дає розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського.

Ключові слова: *аппроксимація, оператори спеціального вигляду, задача Колмогорова–Нікольського.*

У 1988 році О.І. Степанцем у роботах [1-3] були введені класи $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ функцій, заданих на всій дійсній осі. Наведемо їх означення.

Нехай $\widehat{L}_1$ [1] – множина вимірних на дійсній осі функцій $\varphi(\cdot)$, які мають скінченну норму $\|\varphi\|_{\widehat{1}} = \sup\limits_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_{a-\pi}^{a+\pi} |\varphi(t)|dt$.

Через $\mathfrak{A}$ [1] позначають множину всіх неперервних при $t \geq 0$ функцій $\psi(t)$, які задовольняють умовам:

1. $\psi(t) \geq 0,\ \psi(0) = 0,\ \psi(t)$ зростає на відрізку [0;1];
2. $\psi(t)$ опукла вниз на проміжку $[1;\infty)$ і $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t) = 0$;
3. $\psi'(t) := \psi'(t+0)$ є функцією обмеженої варіації на $[0;\infty)$.

Через $\mathfrak{A}'$ [1] позначається підмножина всіх функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких $\int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}dt < < \infty$.

Нехай, далі, $\psi(v)$ – функція, неперервна при всіх $v \geq 0$ і β – фіксоване дійсне число, для яких майже при всіх $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення

$$\widehat{\psi}_\beta(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv.$$

Згідно пропозиції 10 роботи [1], якщо $\psi \in \mathfrak{A}'$, то при всіх $\beta \in \mathbb{R}$ перетворення $\widehat{\psi}_\beta(t)$ сумовне на $\mathbb{R}$.

Через $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ [1] позначають множину функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже при всіх x можуть бути поданими у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\widehat{\psi}_\beta(t)dt = A_0 + (\varphi * \widehat{\psi}_\beta)(x), \tag{1}$$

де A_0 – деяка стала, $\varphi \in \widehat{L}_1$, а інтеграл розуміється як границя інтегралів по проміжках, що симетрично розширюються.

Функцію $\varphi(\cdot)$ в рівності (1) називають (ψ, β)-похідною функції $f(\cdot)$ і записують $\varphi(\cdot) = f_\beta^\psi(\cdot)$. У той же час функцію $f(\cdot)$ називають (ψ, β)-інтегралом функції $\varphi(\cdot)$ і позначають $f(\cdot) = \mathcal{I}_\beta^\psi(\varphi, \cdot)$.

Якщо $\varphi \in \mathfrak{N} \subset \widehat{L}_1$, то покладають $f \in \widehat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Підмножини неперервних функцій із $\widehat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ позначаються $\widehat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$. У випадку, якщо $\mathfrak{N}$ співпадає з множиною $S_\infty = \{\varphi : \operatorname{ess}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| \leq 1\}$, використовують позначення $\widehat{C}_\beta^\psi S_\infty = \widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi$. Підмножини періодичних функцій із $\widehat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ є класи $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$, введені О.І. Степанцем у 1983 році (див., наприклад, [4]).

Нехай Φ – сім'я абсолютно неперервних при $v \geq 0$, додатних, монотонно зростаючих до нескінченності функцій, таких, що $\varphi(v) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $v = 0$, а H – сім'я абсолютно неперервних і двічі диференційовних на $[0;1]$ функцій із обмеженою другою похідною, таких, що $F(0) > 0$, $F(1) = 1$.

У якості наближуючих агрегатів для функцій $f \in \widehat{L}_{\beta,\infty}^\psi$ будемо використовувати оператори вигляду

$$U_\sigma(f;x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi\left(x + \frac{t}{\sigma}\right) \int\limits_0^\infty \lambda_\sigma(v)\psi(\sigma v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dvdt, \tag{2}$$

де при $\sigma > 1$

$$\begin{array}{ll} \lambda_\sigma(v) = 1 - \frac{\varphi(\sigma v)}{\varphi(\sigma)} F(v), & 0 \leq v \leq 1, \\ \lambda_\sigma(v) = 0, & 1 \leq v, \end{array} \tag{3}$$

$\varphi \in \Phi$, $F \in H$.

Твердження 1 Нехай $\beta \in \mathbb{R}$ і $\psi(v)$ – функція, абсолютно неперервна при всіх $v \geq 0$, причому $\psi(0)\sin\frac{\beta\pi}{2} = 0$, $\psi' \in L_2(0;a)$ при кожному $a > 0$ і $\widehat{\psi}_\beta \in L(\mathbb{R})$. Тоді, якщо $f \in \widehat{L}_\beta^\psi$ і виконується одна з умов $\frac{|f_\beta^\psi(x)|}{1+|x|} \in L(\mathbb{R})$, $\frac{f_\beta^\psi(x)}{1+|x|} \in L_2(\mathbb{R})$, то $U_\sigma(f;x)$ – ціла функція експоненціального типу, що не перевищує σ: $U_\sigma(f;x) \in \mathcal{E}_\sigma$.

Доведення. Покладемо $\gamma(v) = \zeta_\sigma(v) + i\eta_\sigma(v)$, де $\zeta_\sigma(v) = \frac{1}{2}\psi(|v|)\lambda_\sigma(|v|)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\eta_\sigma(v) = \frac{1}{2}\mathrm{sign}(v)\psi(|v|)\lambda_\sigma(|v|)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, а функція $\lambda_\sigma(v)$ задається співвідношенням (3). Тоді, згідно з (2) і (3) маємо $U_\sigma(f;x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(v)e^{ivt}dvdt$.

Для завершення доведення залишається скористатися твердженням з роботи [5, с. 228], згідно якого, якщо функція $\gamma(v)$ абсолютно неперервна на $[-\sigma;\sigma]$, $\gamma(-v) = \gamma(v)$, $\gamma' \in L_2(-\sigma;\sigma)$ і функція $h(x)$ така, що $\frac{h(x)}{1+|x|} \in L(\mathbb{R})$, то згортка $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x+t)h(t)dt, g(x) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(\sigma)e^{ivx}dv$, належить $\mathcal{E}_\sigma$.$\Box$

Випадок наближення операторами $U_\sigma^{\varphi,F}$ на класах локально інтегровних на дійсній осі функцій розглянутий у роботі [6] Л.А. Репетою. Зокрема, було встановлено, що за умов $\psi \in \mathfrak{A}'$, $\varphi \in \Phi$, $F \in H$ при $\sigma \to \infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; U^{\varphi,F}_{\sigma}) := \sup_{f \in \widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}} \max_{t} \left| f(t) - U^{\varphi,F}_{\sigma}(f;t) \right| = \frac{2|F(0) \sin \frac{\beta\pi}{2}|}{\pi\varphi(\sigma)} \int_{1}^{\sigma} \frac{g(v)}{v} dv +$$

$$+O\left(\psi(\sigma) + \frac{1}{\varphi(\sigma)} + \sigma|\psi'(\sigma)| + \frac{\sigma\psi(\sigma)\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} + \frac{\sigma|\psi'(\sigma)|}{g(\sigma)} + \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv \right), \qquad (4)$$

де функції $g(t) = \varphi(t)\psi(t)$ при $t \geq 1$ і $\sigma \geq 1$ є монотонними та мають незмінний характер опуклості.

Періодичний випадок було досліджено в роботах [7], [8]. Так, в роботі [8] показано, що, якщо $\psi \in \mathfrak{M}'_0$ (див., наприклад, [1]), $\beta \in \mathbb{R}$, $F \in H$, $\varphi \in \Phi$ і при $t \geq 1$ функція $g(t) = \varphi(t)\psi(t)$ монотонна, не змінює характер опуклості та має неперервну похідну, то при $n \to \infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; U^{\varphi,F}_{n}) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \left(\frac{F(0)}{\varphi(n)} \int_{1}^{n} \frac{g(t)}{t} dt + \int_{n}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt \right) + O(1) r_n,$$

де величина r_n означається співвідношеннями:

$$\begin{array}{ll} r_n = \frac{1}{\varphi(n)}, & g(t) \text{ опукла донизу та спадає}, \\ r_n = \psi(n), & g(t) \text{ опукла догори та зростає або } g(t) \text{ стала}, \\ r_n = \left(\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} n + 1 \right) \psi(n), & g(t) \text{ опукла донизу та зростає}, \end{array} \qquad (5)$$

$O(1)$ – величина, рівномірно обмежена відносно n і β.

У даній роботі вивчається асимптотична поведінка при $\sigma \to \infty$ величин $\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; U^{\varphi,F}_{\sigma})$ за умови, що $\psi \in \mathfrak{A}'_0$, де $\mathfrak{A}'_0$ – множина, яка означається таким чином [9, c. 193].

Кожній функції $\psi \in \mathfrak{A}$ поставимо у відповідність функцію $\eta(x) = \eta(\psi, x)$, пов'язану при $x \geq 1$ з $\psi(x)$ співвідношенням $\psi(\eta(x)) = \frac{1}{2}\psi(x)$. Покладемо $\mu(t) = = \frac{t}{\eta(t)-t}$. Тоді $\mathfrak{A}_0 = \{\psi \in \mathfrak{A} : \quad 0 < \mu(\psi; t) \leq K < \infty\}$, $\mathfrak{A}'{}_0 = \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}'$.

Основний результат роботи міститься в такому твердженні.

Теорема 1. *Нехай $\psi \in \mathfrak{A}'_0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді якщо $\varphi \in \Phi$, $F \in H$ і при $t \geq 1$ функція $g(t) = \varphi(t)\psi(t)$ є монотонною, має незмінний характер опуклості та неперервну похідну $g'(t)$, то при $\sigma \to \infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; U^{\varphi,F}_{\sigma}) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \left(\frac{F(0)}{\varphi(\sigma)} \int_{1}^{\sigma} \frac{g(v)}{v} dv + \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv \right) + O(1) r_\sigma,$$

де величина r_σ означається співвідношеннями:

$$\begin{array}{ll} r_\sigma = \frac{1}{\varphi(\sigma)}, & g(t) \textit{ опукла донизу та спадає}, \\ r_\sigma = \psi(\sigma), & g(t) \textit{ опукла догори та зростає або } g(t) \textit{ стала}, \\ r_\sigma = \left(\frac{\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} \sigma + 1 \right) \psi(\sigma), & g(t) \textit{ опукла донизу та зростає}, \end{array} \qquad (6)$$

а $O(1)$ – величина, рівномірно обмежена відносно σ і β.

У подальшому будемо використовувати наступну лему, доведену в [10, с. 66].

Лемма 1. *Нехай функція $\mu(u)$, $u \geq 0$, – абсолютно неперервна на $[0;1]$, $\mu(0) = \mu(1) = 0$, і така, що її похідну $\mu'(u)$ можна довизначити так, щоб збігався інтеграл $\int\limits_0^1 u(1-u)|d\mu'(u)|$. Тоді для всіх $N \geq 1$ справедлива оцінка*

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N}\left|\int\limits_0^1 \mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt - \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_{N^{-1}}^{1}\frac{|\mu(u)|}{u}du\right| \leq$$

$$\leq K_1\int\limits_0^1 u(1-u)|d\mu'(u)| + K_2\int\limits_0^{1-N^{-1}}\frac{|\mu(u)|}{1-u}du, \ \beta \in \mathbb{R},$$

де K_1 і K_2 – абсолютні сталі.

Нехай $\tau_\sigma(v) = (1-\lambda_\sigma(v))\psi(\sigma v)$ при $0 \leq v \leq 1$ і $\tau_\sigma(v) = \psi(\sigma v)$ при $1 \leq v$.

Тоді згідно з (3)

$$\begin{array}{ll} \tau_\sigma(v) = \frac{\varphi(\sigma v)}{\varphi(\sigma)}F(v)\psi(\sigma v), & 0 \leq v \leq 1, \\ \tau_\sigma(v) = \psi(\sigma v), & 1 \leq v. \end{array} \tag{7}$$

Оскільки класи $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ є інваріантними відносно зсуву по аргументу, то $\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; U^{\varphi,F}_{\sigma}) = \sup\limits_{f\in\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}} |\rho^{\varphi,F}_{\sigma}(f;0)|$, де $\rho^{\varphi,F}_{\sigma}(f;x) := f(x) - U^{\varphi,F}_{\sigma}(f;x)$.

Зі співвідношень (1) і (2) для функцій із $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ отримуємо наступне інтегральне зображення: $\rho^{\varphi,F}_{\sigma}(f;0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(\frac{t}{\sigma}\right)\int\limits_0^{\infty}\tau_\sigma(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dvdt$, де функція $\tau_\sigma(v)$ задається співвідношеннями (7).

З метою спрощення інтегрального зображення для величини $\rho^{\varphi,F}_{\sigma}(f;\cdot)$ доведемо наступне твердження.

Лемма 2. *Нехай $\psi \in \mathfrak{A}'$ і $\beta \in \mathbb{R}$ або $\psi \in \mathfrak{A}$ і $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$. Тоді якщо $\varphi \in \Phi$, $F \in H$ і при $t \geq 1$ функція $g(t) = \varphi(t)\psi(t)$ є монотонною, має незмінний характер опуклості та неперервну похідну $g'(t)$, то мають місце оцінки*

$$\int\limits_{-N}^{N}\left|\int\limits_0^1(\tau_\sigma(v)-\psi(\sigma)v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt = 2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_{N^{-1}}^{1}\frac{|\tau_\sigma(v)|}{v}dv + O(1)\alpha_\sigma, \tag{8}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\tau}_\sigma(t)|dt < \infty, \tag{9}$$

де функція τ_σ визначається формулою (7):

$$\begin{array}{ll} \alpha_\sigma = \frac{1}{\varphi(\sigma)}, & g(t) \text{ опукла донизу та спадає,} \\ \alpha_\sigma = \psi(\sigma), & g(t) \text{ опукла догори та зростає або } g(t) \text{ стала,} \\ \alpha_\sigma = \left(\frac{\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\sigma + 1\right)\psi(\sigma) + |\psi'(\sigma)|\sigma, & g(t) \text{ опукла донизу та зростає,} \end{array}$$

$N \geq 1$, $\varphi'(t) := \varphi'(t+0)$, $\psi'(t) := \psi'(t+0)$, а $O(1)$ – величина, рівномірно обмежена по σ, N і β.

Доведення леми. Доведення будемо проводити за схемою, застосованою в [8].

Покладемо $\nu_\sigma(v) = \psi(\sigma)v$ при $0 \leq v \leq 1$ і $\nu_\sigma(v) = \psi(\sigma v)$ при $1 \leq v$, а також $\mu_\sigma(v) = \tau_\sigma(v) - \nu_\sigma(v)$ при $v \geq 0$.

Встановимо збіжність інтеграла $\int\limits_0^1 v(1-v)|d\mu'_\sigma(v)|$.

$$\int\limits_0^1 v(1-v)|d\mu'_\sigma(v)| = \int\limits_0^1 v(1-v)|\tau''_\sigma(v)|dv = O(1)\left[\frac{1}{\varphi(\sigma)}\int\limits_0^1 v(1-v)|(g(\sigma v))''|dv + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varphi(\sigma)}\int\limits_0^1 v(1-v)|(g(\sigma v))'|dv + \frac{1}{\varphi(\sigma)}\int\limits_0^1 v(1-v)|g(\sigma v)|dv\right].$$

Збіжність кожного з інтегралів, що знаходяться в правій частині, випливає з обмеженості функцій $F(v)$, $F'(v)$, $F''(v)$ і того факту, що функції $g'(v)$, $g''(v)$ не змінюють знак при $v \geq 1$. Врахувавши ці зауваження та проінтегрувавши частинами, легко отримати оцінку $\int\limits_0^1 v(1-v)|d\mu'_\sigma(v)| = O(1)\max\limits_{[1;\sigma]} g(v) = O(1)\alpha_\sigma$. Отже, $\int\limits_0^1 v(1-v)|d\mu'_\sigma(v)| < \infty$. Функція $\mu_\sigma(v)$ задовольняє всім умовам леми 1. Беручи в цій лемі в якості $\mu(v)$ функцію $\mu_\sigma(v)$, отримуємо

$$\int\limits_{-N}^{N}\left|\int\limits_0^1 \mu_\sigma(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt = 2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_{N^{-1}}^{1}\frac{|\mu_\sigma(v)|}{v}dv +$$

$$+O(1)\left(\int\limits_0^1 v(1-v)|d\mu'_\sigma(v)| + \int\limits_0^{1-N^{-1}}\frac{|\mu_\sigma(v)|}{1-v}dv\right). \tag{10}$$

З метою вивчення залишкового члена в формулі (10) отримуємо оцінку

$$\int\limits_0^1 \frac{|\mu_\sigma(v)|}{1-v}dv = \int\limits_0^1 \frac{|\tau_\sigma(v) - \psi(\sigma)v|}{1-v}dv \leq \int\limits_0^1 \frac{|\tau_\sigma(v) - \psi(\sigma)|}{1-v}dv + \psi(\sigma) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(\sigma)} \int\limits_0^1 \frac{|g(\sigma v)F(v) - \psi(\sigma)|}{1-v} dv + \psi(\sigma) \le \frac{K}{\varphi(\sigma)} \left(\left(\max_{v \in [1;\sigma]} g(\sigma) \right) \int\limits_0^1 \frac{|1 - F(v)|}{1-v} dv + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 \frac{|g(\sigma v) - g(\sigma)|}{1-v} dv + g(\sigma) \right). \tag{11}$$

Оскільки функція $\frac{|1-F(v)|}{1-v}$ обмежена на $[0;1]$, то, через монотонність функції $g(v)$,

$$\psi(\sigma) \le K_1 \frac{\max\limits_{v \in [1;\sigma]} g(\sigma)}{\varphi(\sigma)} \le K_2 \alpha_\sigma. \tag{12}$$

Далі, об'єднуючи співвідношення (10), (12) з отриманою в [8] нерівністю $\int\limits_0^1 \frac{|\tau_\sigma(v) - \psi(\sigma)v|}{1-v} dv \le \alpha_\sigma$, одержуємо (8).

Із (8) випливає оцінка

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}_\sigma(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_0^1 \mu_\sigma(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) dv \right| dt = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int\limits_0^1 \frac{|\tau_\sigma(v)|}{v} dv +$$

$$+ O(1)\alpha_\sigma = O(1) \left(\max\left\{ \frac{1}{\varphi(\sigma)}, \psi(\sigma) \right\} \ln \sigma + \alpha_\sigma \right) < \infty. \tag{13}$$

Як показано в [11, с. 186], для всіх $\sigma \in \mathbb{N}$ має місце нерівність

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\nu}_\sigma(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_0^{\infty} \nu_\sigma(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) dv \right| dt < \infty. \tag{14}$$

Аналізуючи доведення співвідношення (14), бачимо, що обмеження $\sigma \in \mathbb{N}$ не використовується при доведенні. Тому нерівність (14) є справедливою при всіх дійсних значеннях σ.

Отже, з (13), (14) і нерівності $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\tau}_\sigma(t)| dt \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\nu}_\sigma(t)| dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}_\sigma(t)| dt$ випливає оцінка (9). $\square$

Доведення теореми. При доведенні основного твердження роботи будемо слідувати схемі отримання інтегральних зображень, запропонованій у [8], де було досліджено періодичний випадок. У цій роботі при виконанні умови $\sigma \in \mathbb{N}$ було отримано наступну рівність:

$$\rho_\sigma(f;0) = -\frac{1}{\pi} \sin \frac{\beta\pi}{2} \left(\int\limits_{|t| \le \sigma} f_\beta^\psi \left(\frac{t}{\sigma} \right) \int\limits_0^1 \mu_\sigma(v) \sin vt dv dt + \right.$$

$$+\int\limits_{|t|\le 1} f^{\psi}_{\beta}\left(\frac{t}{\sigma}\right)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(\sigma v)\sin vtdvdt\Bigg)+O(1)\alpha_{\sigma}, \qquad (15)$$

де $O(1)$ – величина, рівномірно обмежена відносно σ і β.

Розглянувши процес встановлення останньої оцінки, неважко переконатися, що вона залишається справедливою й у тому випадку, коли σ – довільне дійсне число.

З (15) отримуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty};U^{\varphi,F}_{\sigma})\le\frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\sup_{y\in S_{\infty}}\left|\int\limits_{|t|\le\sigma} y\left(\frac{t}{\sigma}\right)\int\limits_{0}^{1}\mu_{\sigma}(v)\sin vtdvdt\right|+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\sup_{y\in S_{\infty}}\left|\int\limits_{|t|\le 1} y\left(\frac{t}{\sigma}\right)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(\sigma v)\sin vtdvdt\right|+O(1)\alpha_{\sigma}\le\frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\times$$

$$\times\int\limits_{|t|\le\sigma}\left|\int\limits_{0}^{1}\mu_{\sigma}(v)\sin vtdvdt\right|+\frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_{|t|\le 1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi(\sigma v)\sin vtdvdt\right|+O(1)\alpha_{\sigma}. \qquad (16)$$

Використовуючи твердження леми 2, маємо

$$\int\limits_{|t|\le\sigma}\left|\int\limits_{0}^{1}\mu_{\sigma}(v)\sin vtdv\right|dt=2\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{1}\frac{|\tau_{\sigma}(v)|}{v}dv+O(1)\alpha_{\sigma}=$$

$$=\frac{2}{\varphi(\sigma)}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{1}\frac{g(\sigma v)}{v}F(v)dv+O(1)\alpha_{\sigma}=\frac{2}{\varphi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}\frac{g(v)}{v}F\left(\frac{v}{\sigma}\right)dv+O(1)\alpha_{\sigma}.$$

Оскільки за умовою теореми 1 функція $g(v)$ є монотонною при $v\ge 1$, то, застосовуючи формулу Лагранжа, за якою $F(v)=F(0)+F'(\gamma)v$ при $\gamma\in(0;v)$ і $v\in[0;1]$, а також згідно з оцінкою (11) одержуємо

$$\int\limits_{|t|\le\sigma}\left|\int\limits_{0}^{1}\mu_{\sigma}(v)\sin vtdv\right|dt=\frac{2F(0)}{\varphi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}\frac{g(v)}{v}dv+\frac{2}{\sigma\varphi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}g(v)F'(\gamma)dv+O(1)\alpha_{\sigma}=$$

$$=\frac{2F(0)}{\varphi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}\frac{g(v)}{v}dv+O(1)\left(\frac{1}{F(\sigma)}\max_{v\in[1;\sigma]}g(v)+\alpha_{\sigma}\right)=\frac{2F(0)}{\varphi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}\frac{g(v)}{v}dv+O(1)\alpha_{\sigma}. \qquad (17)$$

Згідно з формулою (3.1.69) роботи [12, с. 142] для натуральних значень σ має місце співвідношення

$$\int\limits_{|t|\le 1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi(\sigma v)\sin vt dv\right|dt = 2\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv + O(1)\psi(\sigma). \tag{18}$$

Оскільки умова $\sigma \in \mathbb{N}$ при встановленні співвідношення (18) не використовувалася, то воно є справедливим при всіх дійсних значеннях σ. Об'єднуючи формули (16) – (18) і (12), отримуємо нерівність

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; U^{\varphi,F}_{\sigma}) \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{F(0)}{\varphi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}\frac{g(v)}{v}dv + \int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv\right) + O(1)\alpha_{\sigma}. \tag{19}$$

Покажемо, що знайдеться функція $f^* \in \widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$, для якої відхилення $|\rho(f^*;0)|$ співпадає з правою частиною (19). З цією метою покладемо

$$\begin{aligned}
\varphi^*(t) &= \operatorname{sign}\int\limits_{0}^{1}(\tau_{\sigma}(v) - \psi(\sigma)v)\sin\sigma vt dv, \quad \tfrac{1}{\sigma} < |t| \le 1,\\
\varphi^*(t) &= \operatorname{sign}\int\limits_{1}^{\infty}\psi(\sigma v)\sin\sigma vt dv, \qquad\qquad\qquad |t| \le \tfrac{1}{\sigma}.
\end{aligned}$$

При $|t| > 1$ довизначимо функцію $\varphi^*(t)$ так, щоб вона була 2π-періодичною і задовольняла умову $|\varphi^*(t)| \le 1$. Зрозуміло, що в класі $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ існує функція $f^*(\cdot)$, така, що $f^{*\psi}_{\beta}(\cdot) = \varphi^*(\cdot)$. Покладаючи в рівності (15) $f(\cdot) = f^*(\cdot)$ і враховуючи, що

$$\int\limits_{|t|\le 1}\left|\int\limits_{0}^{1}\mu_{\sigma}(v)\sin vt dv\right|dt = O(1)\left(\psi(\sigma) + \frac{1}{\varphi(\sigma)}\max_{v\in[1;\sigma]}g(v)\right) = O(1)\alpha_{\sigma},$$

одержуємо

$$|\rho(f^*;0)| = \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left|\int\limits_{|t|\le\sigma}\left|\int\limits_{0}^{1}\mu_{\sigma}(v)\sin vt dv\right|dt + \int\limits_{|t|\le 1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi(\sigma v)\sin vt dv\right|dt\right| + O(1)\alpha_{\sigma}. \tag{20}$$

Тепер, об'єднуючи рівність (20) з оцінками (17) і (18), отримуємо

$$|\rho(f^*;0)| = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{F(0)}{\varphi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}\frac{g(v)}{v}dv + \int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv\right) + O(1)\alpha_{\sigma}.$$

Отже, у співвідношенні (19) строгої нерівності бути не може. Помічаючи, що для дійсних значень σ залишається справедливою нерівність $|y'(\sigma)|\sigma \le Ky(\sigma)$, де $y \in$

$\in \mathfrak{A}_0$, $y'(t) := y'(t+0)$ (див. формулу (12.10) роботи [12, с. 142], остаточно отримуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; U^{\varphi,F}_{\sigma}) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{F(0)}{\varphi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma}\frac{g(v)}{v}dv + \int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv\right) + O(1)r_{\sigma},$$

де величина r_{σ} означається співвідношенням (6). $\square$

Доведена теорема є розповсюдженням оцінки (5) на неперіодичний випадок. Одночасно з тим у порівнянні з рівністю (4) отримана оцінка уточнює як головний член і коефіцієнт перед ним, так і залишковий член, показуючи його пряму залежність від поведінки функції $g(t)$.

Легко бачити, що твердження теореми забезпечує розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського у випадку, коли $\beta \neq 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, і $r_{\sigma} = o(\max\{A(\sigma), B(\sigma)\})$ при $\sigma \to \infty$, де $A(\sigma) = \frac{1}{\varphi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma}\frac{g(v)}{v}dv$, $B(\sigma) = \int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv$.

Остання умова виконується, наприклад, у випадку, коли $\varphi(v) = v^s$, $s > 0$, а $\psi(v) = v^{-s}$ при $v \geq 1$. Дійсно, при такому виборі функцій $g(v) = 1$, $A(\sigma) = O\left(\frac{\ln(\sigma)}{\sigma^s}\right)$, $B(\sigma) = O\left(\frac{1}{\sigma^s}\right)$, $r_{\sigma} = \frac{1}{\sigma^s}$, і $\frac{r_{\sigma}}{\max\{A(\sigma),B(\sigma)\}} = \frac{r_{\sigma}}{B(\sigma)} = \frac{1}{\ln\sigma} \to 0$, $\sigma \to \infty$.

Покладемо тепер $\varphi(v) = v^2\ln^2 v$, а $\psi(v) = \ln^{-2} v$ при $v \geq 1$. Тоді, як легко перевірити, $g(v) = v^2$, $A(\sigma) = O\left(\frac{1}{\ln^2\sigma}\right)$, $B(\sigma) = \frac{1}{\ln\sigma}$, $r_{\sigma} = O\left(\frac{1}{\ln^2\sigma}\right)$. Як бачимо, у цьому випадку $\frac{r_{\sigma}}{\max\{A(\sigma),B(\sigma)\}} = \frac{r_{\sigma}}{B(\sigma)} = \frac{1}{\ln\sigma} \to 0$, $\sigma \to \infty$.

Визначимо в рівності (3) функцію $F(v)$ за допомогою рівності $F_{\alpha}(v) = \alpha(\sigma) + v^2(1-\alpha(\sigma))$, де $\alpha(\sigma)$ – неперервна й обмежена при $\sigma > 1$ функція. Зрозуміло, що $F_{\alpha} \in H$, тому відповідно до твердження теореми

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; U^{\varphi,\alpha}_{\sigma}) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{\alpha(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma}\frac{g(v)}{v}dv + \int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv\right) + O(1)\delta_{\sigma}, \qquad (21)$$

де $\delta_{\sigma} = O(1)r_{\sigma}(|1-\alpha(\sigma)| + \alpha(\sigma))$, $\sigma \to \infty$.

Перевага функцій $F_{\alpha}(v)$ полягає в тому, що при вдалому підборі $\alpha(\sigma)$ можна впливати на поведінку величини $A(\sigma)$. Так, знову розглядаючи приклад, коли $\varphi(v) = v^s$, $s > 0$, а $\psi(v) = v^{-s}$ при $v \geq 1$, згідно з (21) отримуємо: якщо $\alpha(\sigma) = \frac{1}{\sigma}$, то $A(\sigma) = O\left(\frac{\ln\sigma}{\sigma^{s+1}}\right)$; якщо ж $\alpha(\sigma) = \frac{1}{\ln^{\theta}\sigma}$, $0 < \theta < 1$, то $A(\sigma) = O\left(\frac{\ln^{1-\theta}\sigma}{\sigma^s}\right)$.

Отже, змінюється не лише константа перед головним членом, але і швидкість його спадання.

1. *Степанец А.И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №1. – С. 102-112.
2. *Степанец А.И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, №2. – С. 198-209.
3. *Степанец А.И.* Приближение целыми функциями в равномерной метрике // Приближение целыми функциями на действительной оси. – Киев, 1988. – С. 3-47. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.27).

4. *Степанец А.И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
5. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965 – 407 с.
6. *Репета Л.А.* Приближение функций классов $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ операторами вида $U^{\varphi,F}_{\sigma}$ // Ряды Фурье: теория и приложения. – Киев, 1992. – С. 105-111.
7. *Новиков О.А.* Приближение классов непрерывных периодических функций линейными методами. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1991. – 38 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 91.50).
8. *Овсій Є.Ю.* Наближення класів (ψ, β)–диференційовних функцій лінійними методами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2009. – 155 с.
9. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 2. – 468 с.
10. *Теляковский С.А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I / С.А. Теляковский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – Т. 62. – С. 61-97.
11. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 1. – 427 с.
12. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена: – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 386 с.

D.S. Volkovnitskiy

Approximation of classes $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by operators of special type.

We obtain asymptotic equality for least upper bounds of deviations of operators U_σ of special type in uniform metric on the classes of functions defined on real axis and not periodic that have (ψ, β)-derivative from the space of essentially bounded functions. In some cases obtained equality can give the solution of Kolmogoroff-Nikolskiy problem.

Keywords: *approximation, operators of special type, Kolmogoroff–Nikolskiy problem.*

Д.С. Волковницкий

Приближение классов $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ операторами специального вида.

Получено асимптотическое равенство для точных верхних граней отклонений операторов U_σ специального вида в равномерной метрике на классах функций, определённых на действительной оси и необязательно периодических, (ψ, β)-производные которых принадлежат единичному шару в пространстве существенно ограниченных функций. В некоторых случаях полученное равенство даёт решение задачи Колмогорова-Никольского.

Ключові слова: *аппроксимация, операторы специального вида, задача Колмогорова-Никольского.*

Слов'янський держ. пед. ун-т
`rwfdima5@mail.ru`

Получено 30.11.10