УДК 517.5

©2011. **Е.С. Афанасьева, В.И. Рязанов**

РЕГУЛЯРНЫЕ ОБЛАСТИ В ТЕОРИИ ОТОБРАЖЕНИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Исследуются свойства гладких, липшицевых, выпуклых, квазивыпуклых, равномерных и QED-областей на римановых многообразиях. На этой основе получены новые теоремы о непрерывном и гомеоморфном продолжении на границу кольцевых Q-гомеоморфизмов и, в частности, отображений класса Соболева $W^{1;n}_{loc}(D)$ на гладких $n-$мерных римановых многообразиях.

Ключевые слова: *римановы многообразия, интегральные условия, регулярные области, слабо плоские границы; гладкие, липшицевы, выпуклые, квазивыпуклые, равномерные, $QED-$области.*

1. Введение. В теории отображений в $\mathbb{R}^n$ широко используются различные типы регулярных областей, такие как гладкие, выпуклые, квазивыпуклые, равномерные, QED-области и области со слабо плоскими и сильно достижимыми границами. QED-области впервые были введены в работе Геринга-Мартио [4], а равномерные области в работе Мартио и Сарваса [15]областей, см., напр. [3], [5], [6], [13], [16]. Результаты, приведенные в данной статье, являются обобщением на римановы многообразия теорем, полученных ранее Герингом и Мартио для квазиэкстремальных областей в $\mathbb{R}^n$, см. [4]. Историю вопроса, основные определения, относящиеся к теории римановых многообразий, а также кольцевых Q-гомеоморфизмов, можно найти в предыдущей работе [1]. В дальнейшем термин *гладкое* риманово многообразие $(\mathbb{M}^n, g)$ включает гладкость метрического тензора, т.е. подразумевается, что матрица g принадлежит классу C^∞. Для нас важны следующие фундаментальные факты, см., напр., лемму 5.10 и следствие 6.11 в [12], а также [7], с. 260-261.

Предложение 1. *Каждая точка гладкого риманова многообразия* $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, *имеет окрестности и соответствующие локальные координаты в них, в которых геодезическим сферам с центром в данной точке соответствуют евклидовы сферы с теми же радиусами и с центром в начале координат, а связке отрезков геодезических, исходящих из данной точки, соответствует связка отрезков лучей, исходящих из начала координат в* $\mathbb{R}^n$.

Указанные окрестности и координаты принято называть *нормальными.*

Замечание 1. В частности, в нормальных координатах геодезические сферы имеют естественную гладкую параметризацию через направляющие косинусы соответствующих лучей, исходящих из начала координат. Кроме того, метрический тензор в начале координат в этих координатах совпадает с единичной матрицей, см., напр., предложение 5.11 в [12].

В дальнейшем мы используем обозначения геодезических сфер $S(x_0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x,x_0) = \varepsilon\}$, геодезических шаров $B(x_0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x,x_0) < \varepsilon\}$ и геодезических колец $A(x_0,r_1,r_2) = \{x \in \mathbb{M}^n : r_1 < d(x,x_0) < r_2\}$, где d – геодезическое расстояние на $(\mathbb{M}^n, g)$. Кроме того, для любых трех множеств A, B и C на многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, символом $\Delta(A, B; C)$ обозначаем множество всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{M}^n$, соединяющих A и B в C, т.е. $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in C$ для всех $t \in (a, b)$.

2. О слабо плоских и сильно достижимых границах. Пусть далее D – область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$. Определение локально связных на границе областей смотри в предыдущей работе [1].

Замечание 2. Если область D на $(\mathbb{M}^n, g)$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, то она и локально линейно связна в x_0. Связность и линейная связность эквивалентны для открытых множеств на многообразиях и в так называемых слабо плоских пространствах, которые включают в себя хорошо известные широкие классы пространств Левнера, группы Карно и Гейзенберга, см. следствие 13.1 в [14] или следствие 2.1 в [17].

Определения слабо плоских и сильно достижимых границ на римановых многообразиях можно найти в той же работе [1]. Напомним, что если ∂D является слабо плоской в точке x_0, то она также сильно достижима в этой точке, см., напр., предложение 13.6 в [14].

Замечание 3. В определениях слабо плоской и сильно достижимой границ можно ограничиться окрестностями точки x_0 из какой-либо фундаментальной системы ее окрестностей и, в частности, можно выбрать окрестности U и V точки x_0 в виде достаточно малых шаров (открытых или замкнутых) с центром в точке x_0 в локальных координатах или относительно геодезического расстояния. Кроме того, здесь можно ограничиться только континуумами E и F в $\overline{U}$, см. замечание 13.2 в [14].

Из лемм 13.1 в [14] или 3.1 в [17], доказанных в общих метрических пространствах с мерами, имеем следующий интересный факт.

Лемма 1. *Пусть D – область в римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$. Если ∂D – слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$, то D локально связна в x_0.*

Отметим, что этот важный факт был впервые установлен в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ в работах [8] и [10], потому лемма 1 может быть также выведена на основе предложения 1 и замечания 1 из ее евклидового аналога.

Лемма 2. *Пусть кольцо $A = A(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2$, вместе со сферой $S(x_0, r_2)$ лежит в нормальной окрестности точки x_0 риманова многообразия $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$ и пусть E – континуум в $\mathbb{M}^n$, пересекающий обе сферы $S_i(x_0, r_i), i = 1, 2$. Тогда E содержит в себе подконтинуум $E_* \subseteq \overline{A}$, который также пересекает обе сферы S_i, $i = 1, 2$.*

Доказательство леммы 2. Прежде всего заметим, что $\overline{A}$ – компакт, поскольку $\overline{A}$ лежит в нормальной окрестности точки x_0. Таким образом, $E_0 := E \cap \overline{A}$ – также компакт. Как известно, компоненты связности E_0 являются замкнутыми попарно непересекающимися множествами, см., напр., теорему 5.46.III.1 в [11], и, следовательно, взаимно непересекающимися континуумами, см., напр., предложение I.9.3 в [2]. Обозначим через $E_0^{'}$ и $E_0^{''}$ объединения компонент связности E_0, которые пересекают сферы S_1 и S_2, соответственно. По построению оба множества $E_0^{'}$ и $E_0^{''}$ не пусты. Покажем, что оба эти множества замкнуты, а потому и компактны, как подмножества компакта E_0.

Действительно, пусть x_l, $l = 1, 2, ...$ – произвольная последовательность точек, скажем из $E_0^{'}$. Тогда найдется последовательность E_l компонент связности E_0 такая, что $x_l \in E_l$, и последовательность точек $y_l \in E_l \cap S_1$, $l = 1, 2, ...$ Без ограничения общности можно считать, что $x_l \to x_0 \in E_0$ и $y_l \to y_0 \in E_0 \cap S_1$ при $l \to \infty$, поскольку оба множества E_0 и S_1 компактны. Пусть $E^{'} = Ls\ E_l$ – верхний топологический предел последовательности континуумов E_l, т.е. множество всех предельных точек $z_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_{l_k}$ для некоторой последовательности $z_{l_k} \in E_{l_k}$, $k = 1, 2, ...$ Тогда $E' \subseteq E_0$, т.к. E_0 – компакт. Кроме того, x_0 и $y_0 \in E'$ и множество E' связно, см., напр., I(9.12) в [23]. Поэтому $E' \subseteq E_0'$, см., напр., теорему 5.46.III.2 в [11] и, следовательно, $x_0 \in E_0'$. Таким образом, E_0' – компакт. Аналогично доказывается, что E_0'' – также компакт.

Поскольку E_0' и E_0'' – компакты, расстояние между ними реализуется на некоторой паре точек $x_0' \in E_0'$ и $x_0'' \in E_0''$. В частности, если $dist(E_0', E_0'') = 0$, то найдется точка $x_0 \in E_0' \cap E_0''$. По построению x_0 принадлежит некоторым компонентам $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$ связности множеств E_0' и E_0'', соответственно, которые, по вышедоказанному являются континуумами. Поэтому множество $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''$ также является континуумом, см., напр., теорему 5.47.I.1 в [11], который пересекает обе сферы S_1 и S_2. Таким образом, $\mathcal{E}$ – искомый подконтинуум E.

Неравенство $\delta := dist(E_0', E_0'') > 0$ невозможно. Действительно, заметим, прежде всего, что $E_0 = E_0' \cup E_0''$, поскольку в противном случае нашлась бы компонента связности $\mathcal{E}_0$ множества E_0, которая не пересекает ни одну из сфер S_1 и S_2. Тогда $\mathcal{E}_0$ – замкнутое подмножество E_0 по теореме 5.46.III.1 в [11] и потому является компактным подмножеством E_0 по предложению I.9.3 в [2], т.е. $\mathcal{E}_0$ – континуум в открытом кольце A. Однако, в таком случае $\mathcal{E}_0$, как компоненту связности множества E_0, можно было бы погрузить в открытое множество Ω такое, что $\overline{\Omega} \subset A$ и $\overline{\Omega} \cap (E_0 \setminus \mathcal{E}_0) = \emptyset$, а потому и $\overline{\Omega} \cap (E \setminus \mathcal{E}_0) = \emptyset$. Таким образом, $\mathcal{E}_0$ была бы компонентой связности E, отличной от E, что противоречит связности E. Итак, $E_0 = E_0' \cup E_0''$. Если теперь $\delta > 0$, то для $0 < \varepsilon < \delta/2$

$$E' := E_0' \cup (E \cap B(x_0, r_1)) \subset \Omega' := E_\varepsilon' \cup B(x_0, r_1)$$

и

$$E'' := E_0'' \cup (E \setminus \overline{B(x_0, r_2)}) \subseteq \Omega'' := E_\varepsilon'' \cup \mathbb{C} \setminus \overline{B(x_0, r_2)},$$

где через E_ε' и E_ε'' обозначены (открытые) ε-окрестности множеств E_0' и E_0'', соответственно. Осталось только заметить, что $E = E' \cup E''$, $E' \cap E'' = \emptyset$, $\Omega' \cap \Omega'' = \emptyset$ и оба множества Ω' и Ω'' – открытые. Это противоречит связности множества E. $\Box$

Лемма 3. *Пусть $B(x_0, \varepsilon_0)$ – нормальная окрестность точки x_0 на гладком римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$. Тогда для любого $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ и любого $N > 0$ найдется $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ такое, что*

$$M(\Delta(E, F; B)) \geq N \tag{1}$$

для $B = B(x_0, \varepsilon_1)$ *и любых континуумов* E *и* F *в* $\overline{B}$, *которые пересекают обе сферы* $S_i = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x_0, x) = \varepsilon_i\}$, $i = 1, 2$.

Доказательство леммы 3. Действительно, по замечанию 1, метрический тензор g в начале нормальных координат точки x_0 совпадает с единичной матрицей и, следовательно, в достаточно малом шаре B с центром в точке x_0 равномерно близок к единичной матрице. Поэтому, ввиду леммы 2, соотношение (1) следует из соответствующего свойства евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, см., напр., теорему 10.12 в [22], ср. также теорему 5.3 в [20]. $\Box$

Замечание 4. Другими словами, лемма 3 означает, что гладкие римановы многообразия являются слабо плоскими пространствами в терминологии общих метрических пространств с мерами из работы [17], см. также секцию 13.9 в монографии [14].

3. Об областях с регулярными границами. Множество A в римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, называется *выпуклым*, если любая пара точек x_1 и $x_2 \in A$ может быть соединена геодезической в A. Множество A в $(\mathbb{M}^n, g)$ называется a-*квазивыпуклым*, $1 \leq a < \infty$, если каждая пара точек $x_1, x_2 \in A$ может быть соединена в A спрямляемой кривой γ, чья длина не превосходит $a \cdot d(x_1, x_2)$. Заметим, что A является 1-*квазивыпуклым* в том и только в том случае, когда A является выпуклым. Область D на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ будем называть *гладкой*, если для любой точки $x_0 \in \partial D$ найдется ее окрестность U такая, что $U \cap \partial D$ получается как C^1-вложение круга из $\mathbb{R}^{n-1}$. Область D на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ называется *равномерной*, если существуют константы a и b такие, что каждая пара точек x_1 и $x_2 \in D$ может быть соединена спрямляемой кривой γ в D с $l(\gamma) \leq a\ d(x_1, x_2)$, $\min(s, l(\gamma) - s) \leq b\ dist(\gamma(s), \partial D)$, где γ параметризована длиной s.

Аналогично [4] также говорим, что область D на многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ является областью *квазиэкстремальной длины*, сокр. $C - QED$ областью или просто QED областью, если

$$M(\Delta(E, F; \mathbb{M}^n)) \leq C \cdot M(\Delta(E, F; D)) \tag{2}$$

для конечного числа $C \geq 1$ и любых континуумов E и F в D.

Пусть P – некоторое свойство множеств, к примеру одно из перечисленных выше. В дальнейшем условимся говорить, что область D на римановом многообразии обладает свойством P в точке $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subseteq D$ такая, что $V \cap D$ обладает свойством P. Говорим также, что D обладает свойством P на ∂D, если D обладает этим свойством в каждой точке $x_0 \in \partial D$.

Комбинируя лемму 2.18 в [4] для областей в $\mathbb{R}^n$ с замечанием 1 и рассуждая также как при доказательстве леммы 3, получаем следующее заключение.

Предложение 2. *Пусть область* D *на гладком римановом многообразии* $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, *квазивыпукла в некоторой точке* $x_0 \in \partial D$. *Тогда* D *равномерна в точке* x_0.

Аналогично, по лемме 2.18 в [4] приходим к следующему.

Предложение 3. *Пусть область* D *на гладком римановом многообразии* $(\mathbb{M}^n, g)$,

$n \geq 2$, равномерна в некоторой точке $x_0 \in \partial D$. Тогда она $C - QED$ в точке x_0 для некоторого $C \in [1, \infty)$.

Наконец, по лемме 3 получаем еще одно важное утверждение.

Предложение 4. *Пусть область D на гладком римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, является QED областью в некоторой точке $x_0 \in \partial D$. Тогда ∂D является слабо плоской в точке x_0.*

В теории отображений и дифференциальных уравнениях также часто встречаются так называемые липшицевы границы. Напомним, в связи с этим, что отображение $f : X \to X'$ между метрическими пространствами (X, d) и (X', d') называются *липшицевыми*, если $d'(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$, для некоторой конечной постоянной C. Если в дополнение $d(x_1, x_2) \leq c \cdot d'(f(x_1), f(x_2))$ для любых $x_1, x_2 \in X$, то отображение f называется *билипшицевым*. Говорят, что область D на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ имеет липшицеву границу, если любая точка $x_0 \in \partial D$ имеет окрестность U, которая с помощью некоторого билипшицева отображения f переводится в единичный шар $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$ так, что $\partial D \cap U$ переходит в пересечение $\mathbb{B}^n$ с гиперплоскостью, проходящей через начало координат. Заметим, что билипшицевы отображения f являются квазиконформными, относительно которых модуль является квазиинвариантом. Поэтому такие границы являются слабо плоскими.

Наконец, замечая, что гладкие области являются равномерными на границе, имеем:

Следствие 1. *Выпуклые, квазивыпуклые, гладкие, липшицевы, равномерные и QED области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, имеют слабо плоские границы.*

Для краткости, область D на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, будем называть *регулярной*, если она принадлежит одному из вышеперечисленных классов.

Комбинируя последнее следствие со следствием 3.12 в [14] имеем также:

Следствие 2. *Регулярные области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, локально связны на границе и их границы сильно достижимы.*

4. Интегральные условия для продолжимости гомеоморфизмов на границу. Далее мы предполагаем, что $(\mathbb{M}^n, g)$ – гладкие римановы многообразия.

По теореме 3 в статье [19] и следствиям 1 и 2 получаем следующее общее заключение.

Теорема 1. *Пусть D и D_* – регулярные области на $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geq 2$, соответственно, $\overline{D}$ компактно и $f : D \to D_*$ – кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Тогда $f^{-1} : D_* \to D$ допускает непрерывное продолжение в $\overline{D_*}$.*

Замечание 5. Как показывает пример предложения 6.3 в монографии [14], никакая сколь угодно высокая степень интегрируемости Q не гарантирует продолжения кольцевых Q-гомеоморфизмов f на границу. Условия для этого носят более сложный характер, чем для продолжимости обратных отображений f^{-1}. Некоторые из этих условий приведены ниже.

Говорим, что функция $\varphi : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке*

$x_0 \in \mathbb{M}^n$, сокр. $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon| \ dv(x) < \infty \qquad \forall x_0 \in \mathbb{M}^n, \tag{3}$$

где

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon = \tilde{\varphi}_{\varepsilon,x_0} = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) \ dv(x) = \frac{1}{v(B(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) \ dv(x) \tag{4}$$

– среднее значение функции $\varphi(x)$ по шару $B(x_0,\varepsilon)$ относительно меры объема v. Здесь условие (9) включает предположение, что φ интегрируема относительно меры v по шару $B(x_0,\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Пишем также $\varphi \in FMO$, если $\varphi \in FMO(x_0)$ для всех $x_0 \in \mathbb{M}^n$.

По лемме 6 в [19] и лемме 4.1 в [17], а также ввиду следствий 1 и 2, имеем:

Теорема 2. *Пусть D и D_* – регулярные области на $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, соответственно, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны и $Q \in L^1(D)$. Если Q принадлежит FMO, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

Следствие 3. *В частности, заключение теоремы 2 имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x) dv(x) < \infty \qquad \forall x_0 \in \mathbb{M}^n. \tag{5}$$

Предполагая функцию Q продолженной нулем вне области D и выбирая $\psi(t) = 1/[\int\limits_{S(x_0,t)} Q(x) \ d\mathcal{A}]^{\frac{1}{n-1}}$ в лемме 6 из работы [19], а также на основе следствий 1 и 2 выводим следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть D и D_* – регулярные области на $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, соответственно, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны, $Q \in \mathrm{L}^1(D)$ и*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{\left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q(x) d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \qquad \forall x_0 \in \partial D, \tag{6}$$

где $0 < \varepsilon(x_0) < d_0 = \sup\limits_{x\in D} d(x,x_0)$ таково, что $B(x_0, \varepsilon(x_0))$ – нормальная окрестность точки x_0. Тогда любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.

Действительно, по теореме Фубини в сферических координатах и $r = d(x,x_0)$ для $A = (x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ имеем по условию (6), что

$$\int\limits_A Q(x) \cdot \psi^n(r) \ dv(x) \ = \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(r) dr := I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) = o(I^n_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)).$$

Следствие 4. *В частности, заключение теоремы 3 имеет место, если при* $x \to x_0$

$$Q(x) = O\left(\left[\log \frac{1}{d(x,x_0)}\right]^{n-1}\right) \qquad \forall x_0 \in \partial D. \tag{7}$$

Лемма 4. *Пусть* $\mathbb{B}_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$ *– нормальная окрестность точки* x_0 *на римановом многообразии* $(\mathbb{M}^n, g)$*,* $n \geq 2$*,* $Q : \mathbb{B}_0 \to [0,\infty]$ *– измеримая функция и* $\Phi : [0,\infty] \to (0,\infty]$ *– возрастающая выпуклая функция. Тогда*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{c}{n} \int\limits_{eM_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} \qquad \forall\, p \in (0,\infty), \tag{8}$$

где M_0 *– среднее значение функции* $\Phi \circ Q$ *над* $\mathbb{B}_0$*,* $q(r), r \in (0, \varepsilon_0)$*, – среднее значение функции* $Q(x)$ *над геодезической сферой* $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x,x_0) = r\}$*,* c *– постоянная, произвольно близкая к единице для малых* ε_0*.*

Доказательство. В нормальной системе координат точка x_0 имеет нулевые координаты, а коэффициенты g_{ij} фундаментальной формы $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ равны единице, если $i = j$, и нулю, если $i \neq j$, см. предложение 1 и замечание 1 выше. Следовательно, в малых окрестностях точки x_0 матрица g_{ij} произвольно близка к единичной. Поэтому элементы объема и площади на геодезических сферах в таких окрестностях эквивалентны евклидовым с коэффициентом эквивалентности, произвольно близким к единице. Таким образом, заключение леммы 4 следует из ее евклидового аналога, см. лемму 3.1 в [18]. □

Комбинируя теорему 3 с леммой 4 при $p = n-1$, получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* D *и* D_* *– регулярные области на* $(\mathbb{M}^n, g)$ *и* $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$*, соответственно,* $\overline{D}$ *и* $\overline{D_*}$ *компактны и пусть* $f : D \to D_*$ *– кольцевой* Q*-гомеоморфизм,*

$$\int\limits_D \Phi(Q(x))dv(x) < \infty \tag{9}$$

для выпуклой возрастающей функции $\Phi : [0,\infty] \to (0,\infty]$ *такой, что*

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{10}$$

при $\delta_0 > \Phi(0)$*. Тогда* f *допускает гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$*.*

Следствие 5. *В частности, заключение теоремы 4 имеет место, если при некотором* $\alpha > 0$

$$\int\limits_D e^{\alpha Q(x)} dv(x) < \infty. \tag{11}$$

Замечание 6. Можно показать, что условие (10) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу кольцевых Q-гомеоморфизмов с интегральными условиями (9) на Q, см. лемму 5.1 в [9].

5. Следствия для гомеоморфизмов класса Соболева. Наконец, приведем соответствующие следствия для гомеоморфизмов f класса Соболева $W^{1,n}_{loc}$ между областями на римановых n-мерных многообразиях. Запись $f \in W^{1,n}_{loc}$ означает, что в локальных координатах любая координатная функция f принадлежит классу $W^{1,n}_{loc}$, то есть имеет первые обобщенные производные, локально интегрируемые в степени n. Далее $K_I(x,f)$ – внутренняя дилатация отображения f: $K_I(x,f) = \frac{J(x,f)}{l^n(x,f)}$, где $J(x,f) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{v(f(B(x,r)))}{v(B(x,r))}$ п.в. и $l(x,f) = \liminf\limits_{y\to x} \frac{d_*(f(x),f(y))}{d(x,y)}$. Заметим, что определения класса Соболева $W^{1,n}_{loc}$ и внутренних дилатаций на римановых многообразиях корректны, поскольку они инвариантны относительно замен локальных координат.

Лемма 5. *Пусть $f : D \to D_*$ – гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n}_{loc}$ между областями D и D_* на римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, соответственно. Если $K_I(x,f) \in L^1_{loc}$, то f является кольцевым $Q-$гомеоморфизмом с $Q(x) = K_I(x,f)$.*

Доказательство. Заключение леммы следует из ее евклидового аналога, см. теорему 4.1 в монографии [14], ввиду предложения 1 и замечания 1.□

Таким образом, вся теория граничного поведения, развитая в секции 5, применима к таким гомеоморфизмам.

Теорема 5. *Пусть D и D_* – регулярные области на $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, соответственно, $\overline{D}$ компактно и пусть $f : D \to D_*$ – гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n}_{loc}(D)$ с $K_I(x,f) \in L^1(D)$. Тогда обратный гомеоморфизм $g = f^{-1} : D_* \to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g} : \overline{D_*} \to \overline{D}$.*

Теорема 6. *Пусть D и D_* – регулярные области на $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, соответственно, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны, $Q : \mathbb{M}^n \to [0,\infty]$ и $Q \in FMO$. Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D_*$ класса Соболева $W^{1,n}_{loc}(D)$ с $K_I(x,f) \le Q(x)$ п.в. в D допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

Следствие 6. *В частности, заключение теоремы 6 имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} K_I(x,f)\,dv(x) < \infty \qquad \forall x_0 \in \overline{D}.$$

Здесь мы продолжаем $K_I(x,f)$ нулем вне области D.

Теорема 7. *Пусть D и D_* – регулярные области на $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, соответственно, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны. Если $f : D \to D_*$ – гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n}_{loc}(D)$ такой, что $K_I(x,f) \in \mathrm{L}^1(D)$ и*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{\left(\int\limits_{D(x_0,r)} K_I(x,f)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \qquad \forall x_0 \in \partial D, \tag{12}$$

где $D(x_0, r) = D \cap S(x_0, r)$, *то* f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.

Следствие 7. *В частности, заключение теоремы 7 имеет место, если при* $x \to x_0$

$$K_I(x, f) = O\left(\left[\log \frac{1}{d(x, x_0)}\right]^{n-1}\right) \qquad \forall x_0 \in \partial D.$$

Теорема 8. *Пусть* D *и* D_* *– регулярные области на многообразиях* $(\mathbb{M}^n, g)$ *и* $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, *соответственно,* $\overline{D}$ *и* $\overline{D_*}$ *компактны. Тогда любой гомеоморфизм* $f : D \to D_*$ *класса Соболева* $W^{1,n}_{loc}(D)$ *такой, что*

$$\int\limits_D \Phi(K_I(x, f))\, dv(x) < \infty \tag{13}$$

для некоторой выпуклой возрастающей функции $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ *с условием (10) допускает гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.

Следствие 8. *В частности, заключение теоремы 8 имеет место, если при некотором* $\alpha > 0$

$$\int\limits_D e^{\alpha K_I(x,f)} dv(x) < \infty. \tag{14}$$

1. *Афанасьева Е.С.* К теории отображений квазиконформных в среднем на римановых многообразиях // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 21. – С. 3-10.
2. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры // М.: Наука. – 1969.
3. *Gehring F.W.* Characteristic Properties of Quasidisk, Les presses de l'Universite de Montreal // Montreal. – 1982.
4. *Gehring F.W., Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. d'Anal. Math. – 1985. – V. 24. – P. 181-206.
5. *Hakobyan H., Herron A.* Euclidean quasiconvexity // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2008. – 33. – 205-230 pp.
6. *Jones P.W.* Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces // Acta Math. – 1981. – 147. – P. 71-88.
7. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере // М.: Изд. МГУ. – 1960.
8. *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И.* О границах пространственных областей // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – Т. 13. – С. 110-120.
9. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On boundary behavior of generalized quasi-isometries // ArXiv: 1005.0247v1 [math.CV]. – 3 May.
10. *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И.* О теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вестник. – 2008. – Т. 5. – № 2. – С. 159-184.
11. *Куратовский К.* Топология // М.: Мир. – 1969.
12. *John M. Lee* Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature // New York: Springer. – 1997.
13. *Martio O.* Definitions for uniform domains // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1980. – 5. – P. 197–205.
14. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematics // New York: Springer. – 2009.
15. *Martio O. and Sarvas J.* Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1978/1979. – V. 4. – P. 383-401.

16. *Näkki R., Vaisala J.* John disks // Expo Math. – 1991. - V. 9. – N.1. – P. 3-43.
17. *Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестник. – 2007. – Т. 4. - № 2. – С. 199-234.
18. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вестник. – 2010. – Т. 7. – № 1. – С. 73-87.
19. *Смоловая Е.С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62. – № 5. – С. 682-689.
20. *Suominen K.* Quasiconformal maps in manifolds // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.1 Math. – 1966. – V. 393. – P. 1-39.
21. *Väisälä J.* Invariants for quasisymmetric, quasi–Mobius and bi–Lipschitz mappings // J. Analyse Math. – 1988. – 50. – P. 201-223.
22. *Väisälä J.* Lectures on $n-$Dimensional Quasiconformal Mappings // Lecture Notes in Math. – 229. – Berlin etc., Springer–Verlag. – 1971.
23. *Whyburn G.T.* Analytic Topology // Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1942.

O.S. Afanas'eva, V.I. Ryazanov

Regular domains in the theory of mappings on Riemannian manifolds.

Properties of the smooth, Lipschitz, convex, quasiconvex, uniform and QED-domains on Riemannian manifolds are investigated. On this basis new theorems about continuous and homeomorphic extension to the boundary of ring Q-homeomorphisms and, in particular, of the mappings of the Sobolev class $W^{1,n}_{loc}(D)$ on smooth $n-$dimensional Riemannian manifolds are obtained.

Keywords: *Riemannian manifolds, integral conditions, regular domains, weakly flat boundaries, smooth, Lipschitz, convex, quasiconvex, uniform, $QED-$domains.*

О.С. Афанасьєва, В.І. Рязанов

Регулярні області в теорії відображень на ріманових багатовидах.

Досліджуються властивості гладких, ліпшицевих, опуклих, квазіопуклих, рівномірних та QED-областей на ріманових багатовидах. На цій основі отримано нові теореми неперервного та гомеоморфного продовження на межу кільцевих Q-гомеоморфізмів та, зокрема, відображень класу Соболєва $W^{1,n}_{loc}(D)$ на гладких $n-$вимірних ріманових багатовидах.

Ключові слова: *ріманові багатовиди, інтегральні умови, регулярні області, слабко плоскі межі; гладкі, ліпшицеві, опуклі, квазіопуклі, рівномірні, $QED-$області.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
es.afanasjeva@yandex.ru, vlryazanov1@rambler.ru

Получено 15.04.11