УДК 681.511.42

©2010. **А.А. Перкин, В.Б. Смирнова, А.И. Шепелявый**

Прямой метод Ляпунова в исследовании асимптотики фазовых систем

Для сосредоточенных, распределенных и дискретных фазовых систем с помощью второго метода Ляпунова и метода априорных интегральных оценок Попова установлены многопараметрические частотные критерии глобальной асимптотики.

Ключевые слова: *функции Ляпунова, функционалы Попова, фазовые системы.*

1. Введение. Статья посвящена исследованию асимптотического поведения фазовых систем управления, т.е систем непрямого управления с периодическими нелинейностями. В статье рассматриваются сосредоточенные непрерывные фазовые системы, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений, распределенные непрерывные системы, описываемые интегродифференциальными уравнениями Вольтерра, а также дискретные фазовые системы, описываемые системами разностных уравнений.

Рассматриваемые фазовые системы обладают счетным множеством состояний равновесия, как устойчивых в малом по Ляпунову, так и неустойчивых. Основной характеристикой асимптотического поведения фазовой системы является наличие у нее глобальной асимптотики, т.е. стремление любого решения системы к какому-либо состоянию равновесия при стремлении аргумента-времени к бесконечности.

Задаче глобальной асимптотики фазовых систем различной природы с различным математическим описанием посвящено много работ. Подробная библиография приведена в статье [1].

Основным качественным методом исследования асимптотического поведения многомерных систем управления является прямой метод Ляпунова. Однако специфика фазовых систем потребовала развития в рамках идей прямого метода Ляпунова новых методов.

Одним из них является метод нелокального сведения [2], суть которого заключается во введении в функцию Ляпунова для системы высокого порядка траекторий системы низкого порядка (она называется системой сведения), обладающей нужным асимптотическим свойством. Такая функция Ляпунова позволяет распространить асимптотические свойства систем сведения на системы высокого порядка.

Другим методом, развивающим идеи прямого метода Ляпунова, является метод периодических функций Ляпунова [3,2,4]. Периодические функции Ляпунова конструируются в виде квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности, причем нелинейная функция под знаком интеграла формируется на основе исходной нелинейности. Она имеет тот же период, что и исходная нелинейность, те же нули. Однако в отличие от исходной нелинейности она обладает нулевым средним на периоде.

И метод нелокального сведения, и метод периодических функций Ляпунова были развиты для дискретных фазовых систем [5,6]. С помощью метода априорных интегральных оценок В.М. Попова оба метода были распространены на бесконечномерные фазовые системы [7], инструментом исследования для которых являются функционалы Попова.

В настоящей статье исследование асимптотики фазовых систем ведется методом периодических функций Ляпунова. В статье предлагается обобщение известных периодических функций Ляпунова [3,4] и распространение этого обобщения на дискретные функции Ляпунова и функционалы Попова.

Результатом исследования являются достаточные условия глобальной асимптотики фазовых систем, сформулированные в виде многопараметрических частотных неравенств. Полученные частотные критерии позволяют улучшать оценки областей глобальной асимптотики в пространстве параметров для широкого класса фазовых систем.

2. Сосредоточенные непрерывные системы. Рассмотрим автономную фазовую систему, описываемую системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= c^* z + \rho\varphi, \end{aligned} \tag{1}$$

где A – $m \times m$-матрица, b и c – m-векторы, ρ – число, $\varphi(\sigma)$ – нелинейная функция, а символом $*$ обозначено эрмитово сопряжение. Предполагается, что матрица A гурвицева, пара (A, b) управляема, а пара (A, c) наблюдаема. Функция $\varphi(\sigma)$ является Δ-периодической, непрерывно дифференцируемой. Она имеет на промежутке $[0, \Delta)$ два нуля $\sigma_1 < \sigma_2$, причем

$$\varphi^2(\sigma_i) + \big(\varphi'(\sigma_i)\big)^2 \neq 0 \quad (i = 1, 2).$$

Для определенности предположим также,что

$$\int_0^\Delta \varphi(\sigma) d\sigma < 0. \tag{2}$$

Пусть числа α_1, α_2 таковы, что

$$\alpha_1 \leq \frac{d\varphi}{d\sigma} \leq \alpha_2, \quad \forall \sigma \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Заметим, что $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$. Введем в рассмотрение величины

$$\nu = \frac{\int_0^\Delta \varphi(\sigma) d\sigma}{\int_0^\Delta |\varphi(\sigma)| d\sigma}, \tag{4}$$

$$\nu_0 = \frac{\int_0^\Delta \varphi(\sigma) d\sigma}{\int_0^\Delta |\varphi(\sigma)| d\sigma \sqrt{(1 - \alpha_2^{-1}\varphi'(\sigma))(1 - \alpha_1^{-1}\varphi'(\sigma))} d\sigma}. \tag{5}$$

Передаточная функция линейной части системы (1) от входа φ к выходу $(-\dot{\sigma})$ имеет вид

$$K(p) = -\rho + c^*(A - pE_m)^{-1}b \quad (p \in \mathbf{C}), \tag{6}$$

где E_m – единичная $m \times m$-матрица.

Теорема 1. *Пусть существуют такие числа* $æ \neq 0$ *и* $a \in [0,1]$ *и такие положительные числа* ε, η, τ, *что выполняются следующие условия:*

1) для всех $\omega \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\Re e\{æK(i\omega) - \varepsilon|K(i\omega)|^2 - \tau(K(i\omega) + \alpha_1^{-1}i\omega)^*(K(i\omega) + \alpha_2^{-1}i\omega)\} - \eta \geq 0 \quad (i^2 = -1); \tag{7}$$

2) матрица

$$\left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon & \frac{1}{2}æa\nu & 0 \\ \frac{1}{2}æa\nu & \eta & \frac{1}{2}æa_0\nu_0 \\ 0 & \frac{1}{2}æa_0\nu_0 & \tau \end{array} \right\|, \tag{8}$$

где $a_0 = 1 - a$, *является положительно определенной*

Тогда для любого решения системы (1) справедливы предельные соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0; \quad \lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \hat{\sigma}, \quad \text{где } \varphi(\hat{\sigma}) = 0.$$

Доказательство. Следуя [2], преобразуем систему (1) к виду

$$\begin{gathered} \frac{dy(t)}{dt} = Qy(t) + L\xi(t), \\ \frac{d\sigma(t)}{dt} = D^*y(t), \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$Q = \left\| \begin{array}{cc} A & b \\ O^* & 0 \end{array} \right\|, \; L = \left\| \begin{array}{c} O \\ 1 \end{array} \right\|, \; D = \left\| \begin{array}{c} c \\ \rho \end{array} \right\|,$$

$$y = \left\| \begin{array}{c} z(t) \\ \varphi(\sigma(t)) \end{array} \right\|, \; \xi(t) = \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t)), \tag{10}$$

а через O обозначен нулевой m-вектор.

Рассмотрим квадратичную форму переменных $y \in \mathbf{R}^{\mathbf{m+1}}$, $\xi \in \mathbf{R}$:

$$G(y,\xi) = 2y^*H(Qy + L\xi) + \varepsilon(y^*D)^2 + æy^*LD^*y + \eta(y^*L)^2 - \tau(D^*y - \alpha_1^{-1}\xi)(\alpha_2^{-1}\xi - D^*y), \tag{11}$$

где H – $(m+1) \times (m+1)$-симметричная матрица.

Условие 1) теоремы 1 гарантирует [2] существование такой симметричной матрицы H, что справедливо неравенство

$$G(y,\xi) \leq 0, \quad \forall\, y \in \mathbf{R}^{m+1}, \xi \in \mathbf{R}. \tag{12}$$

Введем в рассмотрение периодические функции

$$F(\sigma) = \varphi(\sigma) - \nu|\varphi(\sigma)|, \tag{13}$$

$$\Phi(\sigma)=\sqrt{(1-\alpha_1^{-1}\varphi'(\sigma))(1-\alpha_2^{-1}\varphi'(\sigma))},$$
$$\Psi(\sigma)=\varphi(\sigma)-\nu_0\Phi(\sigma)|\varphi(\sigma)|. \tag{14}$$

Ясно, что

$$\int_0^{\Delta} F(\sigma)d\sigma=0, \quad \int_0^{\Delta}\Psi(\sigma)d\sigma=0. \tag{15}$$

Построим функцию Ляпунова вида

$$v(t)=y^*(t)Hy(t)+\text{æ}\left(a\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)}F(\sigma)d\sigma+a_0\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)}\Psi(\sigma)d\sigma\right). \tag{16}$$

Вычислим ее производную в силу системы (9):

$$\frac{dv(t)}{dt}=2y^*(t)H(Qy(t)+L\xi(t))+\text{æ}\left(aF(\sigma(t))+a_0\Psi(\sigma(t))\right)\dot\sigma(t). \tag{17}$$

Из неравенства (12) следует, что

$$\begin{gathered}\frac{dv(t)}{dt}\le-\varepsilon\dot\sigma^2(t)-\text{æ}\varphi(\sigma(t))\dot\sigma(t)-\eta\varphi^2(\sigma(t))-\\ -\tau(\Phi(\sigma(t))\dot\sigma(t))^2+\text{æ}(aF(\sigma(t))+a_0\Psi(\sigma(t)))\dot\sigma(t),\end{gathered} \tag{18}$$

откуда в силу (13) и (14) получаем оценку

$$\begin{gathered}\frac{dv(t)}{dt}\le\left(-\varepsilon\dot\sigma^2(t)-\eta\varphi^2(\sigma(t))-\tau(\Phi(\sigma(t))\dot\sigma(t))^2-\text{æ}a\nu\varphi(\sigma(t))\dot\sigma(t)-\right.\\ \left.-\text{æ}a_0\nu_0\Phi(\sigma(t))|\varphi(\sigma)|\dot\sigma(t)\right).\end{gathered} \tag{19}$$

Правая часть неравенства (19) является квадратичной формой величин $\dot\sigma(t)$, $|\varphi(\sigma)|$, $\Phi(\sigma(t))\dot\sigma(t)$. Согласно условию 2) теоремы 1 она является отрицательно определенной. Так что

$$\frac{dv(t)}{dt}\le-\mu\dot\sigma^2(t)-\delta\varphi^2(\sigma(t)), \tag{20}$$

где $\mu>0$, $\delta>0$. Тогда

$$v(t)-v(0)\le-\delta\int_0^t\varphi^2(\sigma(t))dt-\mu\int_0^t\dot\sigma^2(t)dt. \tag{21}$$

Из (15) и гурвицевости матрицы A следует ограниченность функции $v(t)$. Таким образом, из (21) следует, что

$$\dot\sigma(t),\varphi(\sigma(t))\in L_2[0,+\infty). \tag{22}$$

Функции $z(t)$, $\dot z(t)$ и $\dot\sigma(t)$ ограничены на полуоси $[0,+\infty)$. Следовательно, $\varphi(\sigma(t))$ и $\dot\sigma(t)$ равномерно непрерывны на $[0,+\infty)$. Тогда из (22) по лемме Барбалата следует, что

$$\dot{\sigma}(t) \to 0 \text{ и } \varphi(\sigma(t)) \to 0 \text{ при } t \to +\infty, \tag{23}$$

откуда в силу леммы 2.5.1 [7] получим, что

$$\sigma(t) \to \hat{\sigma} \text{ при } t \to +\infty, \tag{24}$$

где $\varphi(\hat{\sigma}) = 0$. Запишем первое уравнение системы (1) в виде

$$z(t) = e^{At}z(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}b\varphi(\sigma(\tau))d\tau. \tag{25}$$

Так как свертка двух функций из $L_2[0,+\infty)$ стремится к 0 при $t \to +\infty$, установим, что

$$z(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{26}$$

Теорема 1 доказана. □

Теорема 1 применялась к автономной системе фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) с пропорционально интегрирующим фильтром (ПИФ), передаточная функция которой имеет вид

$$K(p) = T\frac{1+\beta Tp}{1+Tp},$$

где $T > 0$, $\beta \in (0,1)$. В случае $\beta = 0,2$ и $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, где $\gamma \in (0,1)$, были построены оценки областей глобальной асимптотики (полос захвата) на плоскости $\{T^{-1}, \gamma\}$. Теорема 1 позволила сократить разрыв между истинной границей области глобальной асимптотики (полученной численным интегрированием [8]) и оценкой границы, полученной в [7], где применена функция Ляпунова (16) в частном случае $a = 1$, в среднем на 15%.

3. Распределенные непрерывные системы. Рассмотрим систему фазовой синхронизации, описываемую интегродифференциальным уравнением Вольтерра

$$\dot{\sigma}(t) = \alpha(t) + \rho\varphi(\sigma(t-h)) - \int_0^t \gamma(t-\tau)\varphi(\sigma(t))dt \quad (t \geq 0; h \geq 0). \tag{27}$$

Для уравнения (27) определено начальное условие

$$\sigma_{|t\in[-h,0]}(t) = \sigma^0(t). \tag{28}$$

Предполагается, что функции $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ обладают следующими свойствами:

1. $\alpha(t) \in C[0,+\infty), \gamma(t)$ измерима.
2. Существует такое положительное число c, что справедливы неравенства

$$|\alpha(t)| \leq M_1e^{-ct}, \quad |\gamma(t)| \leq M_2e^{-ct} \quad (M_1, M_2 > 0).$$

Начальная функция $\sigma^0(t)$ предполагается непрерывной на $[-h,0]$. Относительно функции $\varphi(\sigma)$ остаются в силе все предположения и обозначения раздела 2.

Передаточная функция линейной части (27) от входа φ к выходу $(-\dot{\sigma})$.

$$K(p) = -\rho e^{-ph} + \int_0^\infty \gamma(t) e^{-pt} dt \qquad (p \in \mathbf{C}). \tag{29}$$

Исследование асимптотического поведения уравнения (27) проводится в этом параграфе методом априорных интегральных оценок В.М. Попова. Именно с помощью этого метода удается распространить частотный критерий глобальной асимптотики, полученный в разделе 1, на интегродифференциальное уравнение (27)

Теорема 2. *Пусть для передаточной функции (29) выполнены все условия теоремы 1. Тогда для любого решения уравнения (27) справедливы предельные соотношения*

$$\begin{array}{l} \dot{\sigma} \to 0 \ \text{при} \ t \to +\infty, \\ \sigma \to \hat{\sigma} \ \text{при} \ t \to +\infty, \end{array} \tag{30}$$

где $\varphi(\hat{\sigma}) = 0$.

Доказательство. Пусть $\sigma(t)$ – произвольное решение уравнения (27).
Пусть $T > 1$. Введем в рассмотрение функции

$$\mu(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{при} & t < 0, \\ t & \text{при} & t \in [0,1], \\ 1 & \text{при} & t > 1 \end{array} \right\},$$

$$r(t) = \varphi(\sigma(t));$$

$$r_T(t) = \left\{ \begin{array}{cc} r(t) & t \le T, \\ r(T) e^{\lambda(T-t)} & t > T > 1 \quad (\lambda > 0). \end{array} \right\},$$

$$\sigma_T = \rho r_T(t-h) - \int_0^t \gamma(t-\tau) r_T(\tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned} \sigma_0(t) = \alpha(t) + (1 - \mu(t-h)\rho r_T(t-h)) \\ - \int_0^t (1-\mu(t-h))\gamma(t-\tau) r_T(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Заметим, что при $t \in [0, T]$ справедливо равенство

$$\dot{\sigma}(t) = \sigma_0(t) + \sigma_T(t) \tag{31}$$

Свойства функций $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ и специальный вид функции $r_T(t)$ гарантируют для каждого $T > 0$ справедливость включений

$$\sigma_T, r_T, \dot{r}_T \in L_2[0, +\infty) \quad . \tag{32}$$

Рассмотрим семейство функционалов

$$\rho_T = \int_0^\infty \left\{ æ \sigma_T(t) r_T(t) + \eta r_T^2(t) + \varepsilon \sigma_T^2(t) + \right.$$

$$+\tau\left(\sigma_T(t)-\alpha_1^{-1}\dot r_T(t)\right)\left(\sigma_T(t)-\alpha_2^{-1}\dot r_T(t)\right)\Big\}\,dt.$$

Обозначим через $\tilde\sigma_T$, $\tilde r_T$, $\tilde{\dot r}_T$ – преобразования Фурье от функций σ_T, r_T, $\dot r_T$, соответственно, и воспользуемся равенством Парсеваля. Тогда

$$\rho_T=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big\{æ\tilde\sigma_T^*(i\omega)\tilde r_T(i\omega)+\tilde\eta|\tilde r_T(i\omega)|^2+\varepsilon|\tilde\sigma_T(i\omega)|^2+$$
$$+\tau\left(\tilde\sigma_T(i\omega)-\alpha_1^{-1}\tilde{\dot r}_T(i\omega)\right)^*\left(\tilde\sigma_T(i\omega)-\alpha_2^{-1}\tilde{\dot r}_T(i\omega)\right)\Big\}\,d\omega.$$

Используя равенства

$$\begin{array}{rcl}\tilde\sigma_T(i\omega)&=&-K(i\omega)\tilde r_T(i\omega),\\ \tilde{\dot r}_T(i\omega)&=&i\omega\tilde\eta_T(i\omega),\end{array}\tag{33}$$

преобразуем функционал ρ_T к виду

$$\rho_T=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big\{æReK(i\omega)-\eta-\varepsilon|K(i\omega)|^2-$$
$$-\tau Re\left((K(i\omega)+\alpha_1^{-1}i\omega)^*(K(i\omega)+\alpha_2^{-1}i\omega)\right)\Big\}\,|\tilde r_T(i\omega)|^2d\omega.$$

Из частотного условия (7) следует, что

$$\rho_T<0.\tag{34}$$

Используя равенство (30), представим функционал ρ_T как сумму двух функционалов

$$\rho_T=I_T+\rho_{0T},$$

где

$$\begin{array}{rcl}I_T&=&\displaystyle\int_0^T\Big\{æ\dot\sigma(t)r(t)+\eta r^2(t)+\varepsilon\dot\sigma^2(t)+\\ &&+\tau\left(\dot\sigma(t)-\alpha_1^{-1}\dot r(t)\right)\left(\dot\sigma(t)-\alpha_2^{-1}\dot r(t)\right)\Big\}\,dt.\end{array}$$

Свойства функций $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ и специальный вид функций $\mu(t)$, $r_T(t)$ позволяют показать [7], что для всех $T>1$ справедлива оценка

$$|\rho_{0T}|<C,\tag{35}$$

где C – постоянная, не зависящая от T.

Из (34) и (35) следует, что для любого $T>1$

$$I_T<C.\tag{36}$$

Воспользуемся теперь функциями $F(\sigma)$, $\Psi(\sigma)$, определенными формулами (13), (14), и представим I_T в виде

$$\begin{aligned} I_T \;\; = \;\; & \int_0^T \{æa\nu|\varphi(\sigma)|\dot\sigma(t) + æa_0\nu_0|\varphi(\sigma)|\Phi(\sigma)\dot\sigma(t) + \\ & +\varepsilon\dot\sigma^2(t) + \eta\varphi^2(\sigma(t)) + \tau\Phi^2(\sigma(t))\dot\sigma^2(t)\big\}\,dt + \\ & \int_0^T æaF(\sigma(t))\dot\sigma(t)dt + \int_0^T æa_0\nu_0\Psi(\sigma(t))\dot\sigma(t)dt. \end{aligned}$$

В силу формул (15) $\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} F(\sigma)d\sigma$ и $\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} \Psi(\sigma)d\sigma$ ограничены постоянными, не зависящими от T. Тогда

$$\int_0^T \left\{æa\nu|r|\dot\sigma + æa_0\nu_0|r|(f\dot\sigma) + \varepsilon\dot\sigma^2 + \eta r^2 + \tau(f\dot\sigma)^2\right\}dt, \tag{37}$$

где $f(t) = \Phi(\sigma(t))\dot\sigma(t)$, также ограничен постоянной, не зависящей от T. Под знаком интеграла (37) стоит квадратичная форма переменных $|r|$, $\dot\sigma$, $f\dot\sigma$. Она является положительно определенной в силу условий теоремы 2.

Таким образом,

$$\delta_0\int_0^{+\infty}\varphi^2(\sigma(t))dt + \mu_0\int_0^{+\infty}\dot\sigma_j^2(t)dt < C_1 \quad (\mu_0, \delta_0 > 0), \tag{38}$$

откуда следует справедливость для произвольного решения уравнения (27) предельных соотношений (23) и (24). Теорема 2 доказана. □

Теорема 2 применялась к системе ФАПЧ с ПИФ и запаздыванием в петле обратной связи, передаточная функция которой имеет вид

$$K(p) = T\frac{1+\beta Tp}{1+Tp}e^{-ph} \qquad (T>0, h>0, \beta\in(0,1)). \tag{39}$$

Для $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$ ($\gamma \in (0,1)$); $\beta = 0,2$; $h = 0,01; 0,1; 1$ были построены области глобальной асимптотики на плоскости $\left\{T^2, \gamma\right\}$. Было установлено, что области устойчивости, доставляемые теоремой 2, имеют ту же структуру, что области устойчивости, полученные в [9] качественно-численными методами. При $T^2 < h^{-1}$ области, доставляемые теоремой 2, отличаются от областей, полученных [9] в среднем на 15-25%. Различие областей тем существеннее, чем больше запаздывание h. Однако уже при $h = 1$ полосы захвата, полученные в [9], для $T > 1$ равны нулю.

Теорема 2 применялась также к исследованию задачи о самосинхронизации двух дебалансных механических вибровозбудителей, находящихся на общей колеблющейся платформе[10]. В итоге ряда предположений[10] и преобразований получена система уравнений относительно медленно меняющихся составляющих фаз вращения роторов $\Theta_s(t)$ ($s = 1, 2$)

$$\left\{\begin{array}{l} I_1\ddot\Theta_1 + K_1\dot\Theta_1 + A\sin(\Theta_1-\Theta_2) - \beta = 0, \\ I_2\ddot\Theta_2 + K_2\dot\Theta_2 - A\sin(\Theta_1-\Theta_2) + \beta = 0, \end{array}\right\}, \tag{40}$$

где I_1, I_2, K_1, K_2, β – положительные параметры. Задача самосинхронизации роторов сводится к получению условий на параметры системы (40), при которых разность $\sigma = \Theta_1 - \Theta_2$ стремится к одному из нулей функции $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \beta/A$.

Система (40) может быть сведена [11] к уравнению (27) с $\rho = 0$ и передаточной функцией

$$K(p) = A\left(\frac{1}{I_1p + K_1} + \frac{1}{I_2p + K_2}\right). \tag{41}$$

В монографии [11] приведен ряд утверждений относительно коэффициентов системы (40), которые гарантируют справедливость предельных соотношений (30). При этом удовлетворяются условия теоремы 2 для $a = 1$. Варьирование параметра a позволяет ослабить условия на коэффициенты системы (40).

Предположим, что

$$A > \sqrt{\frac{K_1K_2\left(K_1^2I_2^2 + K_2^2I_1^2\right)}{2\left(K_1 + K_2\right)\left(K_1^2I_2^2 + K_2^2I_1^2\right)}} \cdot \frac{I_1K_2 + I_2K_1}{I_1 \cdot I_2}. \tag{42}$$

Результаты, доставляемые теоремой 2, сравнивались с результатами монографии [11] в случае $A = 2\beta$. Сравнение велось по параметру

$$y = \frac{K_1K_2(K_1I_2 + K_2I_1)}{AI_1I_2(K_1 + K_2)}.$$

Установлено, что теорема 2 обеспечивает менее жесткие условия синхронизации, чем теоремы [11] ($y > 0,97$ и $y > 1.13$, соответственно).

4. Дискретные системы. Рассмотрим фазовую систему, описываемую разностными уравнениями

$$\begin{aligned} &z(n+1) = Az(n) + b\varphi(\sigma(n)),\\ &\sigma(n+1) = \sigma(n) + c^*z(n) + \rho\varphi(\sigma(n)) \qquad (n = 0, 1, 2, ...), \end{aligned} \tag{43}$$

где A, b, c, ρ описаны в параграфе 2. Пара (A, b) предполагается управляемой, пара (A, c) – наблюдаемой. Предполагается также, что все собственные значения матрицы A лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга. Все свойства функции $\varphi(\sigma)$, приведенные в разделе 2, остаются в силе. Нам понадобятся далее числа $k_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2$, $k_2 = 2\alpha_2 - \alpha_1$. Передаточная функция линейной части системы (43) имеет вид (6).

Теорема 3. *Пусть существуют такие числа* $æ \neq 0$ *и* $a \in [0, 1]$ *и такие положительные числа* ε, η, τ, *что выполняются следующие условия:*

1) для всех $p \in \mathbf{C}$, $|p| = 1$, *справедливо неравенство*

$$Re\left\{æK(p) - \tau(K(p) + (p-1)k_1^{-1})^*(K(p) + (p-1)k_2^{-1})\right\} - \varepsilon|K(p)|^2 - \eta \geq 0;$$

2) матрица

$$\left\| \begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\varepsilon - 0.5æ\alpha_0(a(1+|\nu|)+ \\ +a_0(1+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\sqrt{|\alpha_1|\alpha_2}}|\nu_0|))\end{array} & \frac{1}{2}æa\nu & 0 \\ \frac{1}{2}æa\nu & \eta & \frac{1}{2}æ_k a_{0k}\nu_{0k} \\ 0 & \frac{1}{2}æa_0\nu_0 & \tau\frac{\alpha_1\alpha_2}{k_1k_2} \end{array} \right\|,$$

где $a_0 = 1-a$, $\alpha_0 = \alpha_2$, *если* $æ > 0$ *или* $\alpha_0 = \alpha_1$, *если* $æ < 0$, *является положительно определенной.*

Тогда при $n \to \infty$ *выполнены предельные соотношения*

$$\varphi(\sigma(n)) \to 0, \quad z(n) \to 0, \quad (\sigma(n+1) - \sigma(n)) \to 0, \sigma(n) \to \hat{\sigma},$$

где $\varphi(\hat{\sigma}) = 0$.

Теорема 3 является обобщением теоремы 1 [12].

1. *Леонов Г.А.* Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. 2006. N 10. С. 47–85.
2. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., Наука, 1978. 400 с.
3. *Бакаев Ю.И., Гуж А.А.* Оптимальный прием сигналов частотной модуляции в условиях эффекта Допплера // Радиотехника и электроника. 1965. Т. 10, N 1. С. 175–196.
4. *Brokett* . On the asymptotic properties of solutions of differential equations with multiple equilibria // J.Diff.Equations. 1982. Vol.44. P. 249-262.
5. *Корякин Ю.А., Леонов Г.А.* Определение полос захвата в системе импульсно-фазовой автоподстройки частоты.// Радиотехника. 1977. N 6. С. 65–72.
6. *Леонов Г.А., Шепелявый А.И.* Частотный критерий неустойчивости дискретных фазовых систем. Деп. в ВИНИТИ, N 4502-84 от 2 июля 1984 г.
7. *G.A. Leonov, D.V. Ponomarenko and V.B. Smirnova* Frequency-Domain Metods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications, World Scientific, Syngapore–New Jersey–London–Hong Kong; 1996. 498 p.
8. *Первачев С.В.* Исследование режима захвата следящего автоселектора // Радиотехника. 1962. Т. 17. N 2. С. 51–55.
9. *Белюстина Л.Н., Киняпина М.С., Фишман Л.З.* Динамика систем фазовой синхронизации с запаздыванием // Теоретическая электротехника. 1990. Львов.
10. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М., Наука, 1981. 350 с
11. *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. С.-Пб., Наука, 2000. 400 с.
12. *V.B. Smirnova and A.I Shepeljavyi* A modified frequency-domain criterion for gradient-like behavior of discrete phase systems // Proceedings of Third IFAC Workshop "Periodic Control Systems". St.Petersburg, Russia. 2007, http://lib.physcon.ru/getfile.html?item1427.

A.A. Perkin, V.B. Smirnova, A.I. Shepeljavyi

Lyapunov direct method for asymptotics analisys of phase systems.

In the paper by means of Lyapunov functions and Popov functionals a number of multiparameter frequency-domain criteria for gradient-like behavior of lumped, distributed and discrete systems is

obtained.

Keywords: *Lyapunov functions, Popov functionals, phase systems..*

А.А. Перкін, В.Б. Смірнова, А.І. Шепелявий

Прямий метод Ляпунова в дослідженні асимптотики фазових систем.

Для зосереджених, розподілених і дискретних фазових систем за допомогою другого методу Ляпунова і методу апріорних інтегральних оцінок Попова встановлено багатопараметричні частотні критерії глобальної асимптотики.

Ключові слова: *функції Ляпунова, функціонали Попова, фазові системи..*

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург
Санкт-Петербургский государственный университет
as@as1020.spb.edu

Получено 09.12.10