УДК 517.5

©2010. **О.А. Очаковская**

ФУНКЦИИ С НУЛЕВЫМИ ШАРОВЫМИ СРЕДНИМИ И ПЛОТНОСТИ УПАКОВОК

Рассмотрены некоторые примеры функций с нулевыми интегралами по всем шарам одного фиксированного радиуса. Получены новые оценки плотностей укладок шаров.

Ключевые слова: *шаровые средние, плотность укладки*

1. Введение. Пусть G – измеримое по Лебегу множество в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Символом $\mathrm{meas}(G)$ обозначим лебегову меру множества G. Всюду в дальнейшем предполагается, что $0 < \mathrm{meas}(G) < +\infty$.

Семейство $\mathcal{K} = (K_1, \dots, K_s)$ измеримых подмножеств $\mathbb{R}^n$ называется *упаковкой* (или *укладкой*) множества G, если

$$\bigcup_{j=1}^{s} K_j \subset G \quad \text{и} \quad \mathrm{meas}(K_i \cap K_j) = 0 \quad \text{для всех } 1 \le i, j \le s,\ i \ne j.$$

Плотность $d(G, \mathcal{K})$ этой упаковки определяется равенством

$$d(G, \mathcal{K}) = \frac{1}{\mathrm{meas}(G)} \sum_{j=1}^{s} \mathrm{meas}(K_j). \tag{1}$$

Проблема оценки величины $d(G, \mathcal{K})$ при различных G и $\mathcal{K}$ изучалась многими авторами (см., например, [1]–[3] и библиографию к этим работам). Наиболее часто рассматривается следующий частный случай.

Пусть K – заданное измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$, $0 < \mathrm{meas}(K) < +\infty$ и пусть M – заданная подгруппа группы евклидовых движений $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $m(G, K, M)$ наибольшее количество непересекающихся образов $\lambda_j K \subset G,\ \lambda_j \in M$ (то есть, $\mathrm{meas}(\lambda_j K) \cap (\lambda_i K)) = 0$ для $\lambda_i \ne \lambda_j K)$. Требуется оценить сверху величину $m(G, K, M)$ или, эквивалентно, плотность $d(G, \mathcal{K})$, где $\mathcal{K} = \{\lambda_j K\}$ является соответствующей упаковкой G. Для этого случая мы будем использовать обозначение $d(G, K, M)$ вместо $d(G, \mathcal{K})$. Очевидно

$$m(G, K, M) \le \left[\frac{\mathrm{meas}(G)}{\mathrm{meas}(K)}\right] \quad \text{и} \quad d(G, K, M) \le \frac{\mathrm{meas}(K)}{\mathrm{meas}(G)} \left[\frac{\mathrm{meas}(G)}{\mathrm{meas}(K)}\right],$$

где $[t]$ – целая часть числа $t \in \mathbb{R}^n$. Эти оценки называют тривиальными. Один из способов получения нетривиальных оценок для указанных величин предложил Б. Д. Котляр (см. [4], а также [5]). Им было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что существует ненулевая функция* $f \in L^\infty(G)$, *для которой*

$$\int\limits_{\lambda K} f(x)\,dx = 0 \quad \text{для всех } \lambda \in M \text{ таких, что } \lambda K \subset G. \tag{2}$$

Тогда

$$m(G,K,M) \leq \left[\frac{1}{\mathrm{meas}(K)}\left(\mathrm{meas}(G) - \frac{1}{\|f\|_{L^\infty(G)}}\int\limits_G f(x)\,dx\right)\right]. \tag{3}$$

Таким образом, для получения нетривиальной оценки для $m(G,K,M)$ или $d(G,K,M)$ важно иметь ненулевую функцию f, удовлетворяющую (2). Более того, если запас таких функций окажется достаточно велик, можно надеяться на получение хорошей оценки, если взять в правой части (3) нижнюю грань по всем таким f.

В случае, когда K – шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r, ненулевые функции с условием (2) существуют (см., например, [3]) при любом M. Класс всех функций $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$, удовлетворяющих условию (2) для случая, когда M является всей группой движений $\mathbb{R}^n$, обозначается $V_r(G)$. Этот класс изучался во многих работах (см. библиографию в [3]). Остановимся подробнее на свойствах $V_r(G)$ для случая $G = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Многие авторы исследовали вопрос о точных условиях убывания на бесконечности, из которых следует, что функция f, удовлетворяющая уравнению типа (2), равна нулю. Для шаровых средних первый точный результат принадлежит Д. Смиту, [6], который установил, что если $f \in C(\mathbb{R}^n)$ с условием

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)|x|^{\frac{n-1}{2}} = 0 \tag{4}$$

удовлетворяет (2), то $f = 0$. При этом условие (4) нельзя заменить условием $f(x) = O(|x|^{\frac{1-n}{2}})$ при $|x| \to \infty$. Аналогичное утверждение имеет место и для сферических средних в $\mathbb{R}^n$. Известно также, что если при некотором $p \in [1, \frac{2n}{n-1}]$ функция с условием (2) принадлежит классу $L^p(\mathbb{R}^n)$, то $f = 0$, а при $p > \frac{2n}{n-1}$ утверждение уже не имеет места (см. [7], а также [8], где утверждение сформулировано для сферических средних). Существенно более общие и точные результаты в этом направлении получены В. В. Волчковым в [9], [3]. Из [9] следует, в частности, что если при некотором $p \in [1, \frac{2n}{n-1}]$ функция $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (2) при всех $|y| > r$ и

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{1}{\mu_p(R)} \int\limits_{|x|\leqslant R} |\,f(x)|^p\,dx = 0, \tag{5}$$

то $f = 0$ на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > r-1\}$ (здесь $\mu_p(R) = R^{n-\frac{n-1}{2}p}$ при $1 \leqslant p < \frac{2n}{n-1}$ и $\mu_p(R) = \ln R$ при $p = \frac{2n}{n-1}$). При этом условие (5) нельзя заменить условием $\int_{|x|\leqslant R} |\,f(x)|^p\,dx = O(\mu_p(R))$ при $R \to \infty$. Ряд далеко идущих обобщений этого результата получен в [9], а также в [3], где условие (2) заменяется уравнением свертки более общего вида.

Некоторые аналоги подобных результатов на симметрических пространствах получены в [10], [11]. В работах [12], [13] изучались подобные вопросы для функций с нулевыми шаровыми средними, заданными на полупространстве.

Характерной особенностью всех известных ранее условий для поведения f на бесконечности, при которых из (2) следует, что $f = 0$, является их инвариантность относительно группы вращений $\mathbb{R}^n$. Это позволяло использовать в их доказательствах аппарат гармонического анализа на компактных группах (см., например, [3]). В работе [14] впервые рассматривается подобная задача для случая, когда указанная выше инвариантность существенно нарушается и требуются другие методы.

Одним из результатов работы [14] является

Теорема 2. *Имеют место следующие утверждения:*

1) Пусть $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *и удовлетворяет условию (2) при всех* $y \in \mathbb{R}^n$. *Пусть также существуют возрастающая положительная функция* $\varkappa \in C^1[0, +\infty)$ *и постоянные* c_1, $c_2 > 0$ *такие, что*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\varkappa(t)} = +\infty\,, \tag{6}$$

$$\varkappa(t) = o\left(\frac{t}{\ln t}\right), \quad t \to +\infty\,, \tag{7}$$

$$\varkappa(t) = O\left(\varkappa\left(\frac{t}{\varkappa(t)}\right)\right), \quad t \to +\infty\,, \tag{8}$$

$$t\varkappa'(t) = o\left(\varkappa(t)\right), \quad t \to +\infty\,, \tag{9}$$

$$|f(x)| \leqslant c_1 \exp\left(-\frac{|x_1| + \cdots + |x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1| + \cdots + |x_{n-1}|)} + c_2|x_n|\right) \tag{10}$$

при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. *Тогда* $f = 0$.

2) Для любого $\varepsilon > 0$ *и любой возрастающей функции* $\varkappa : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *такой, что*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\varkappa(t)} < +\infty\,, \tag{11}$$

существует ненулевая функция f *класса* $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющая (2) при всех* $y \in \mathbb{R}^n$, *для которой*

$$|f(x)| \leqslant \exp\left(-\frac{|x_1| + \cdots + |x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1| + \cdots + |x_{n-1}|)} + \varepsilon|x_n|\right) \tag{12}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Условия (6)–(9) выполнены для многих медленно растущих функций $\varkappa$. Например, нетрудно видеть, что они выполнены для всякой положительной функции $\varkappa \in C^1[0, +\infty)$, совпадающей при достаточно больших t с функцией

$$\varkappa_m(t) = (\ln t)(\ln\ln t)\ldots(\underbrace{\ln\ln\ldots\ln t}_{m})$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$. С другой стороны, если $\varkappa : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ совпадает при больших t с функцией

$$\varkappa_m(t)(\underbrace{\ln\ln\ldots\ln t}_{m+1})^{1+\delta}$$

для некоторых $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, то выполнено условие (11).

В данной работе строятся новые примеры функций класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ (см. теорему 3 ниже). Это позволило обобщить второе утверждение теоремы 2, а также получить нетривиальную оценку сверху для плотностей упаковок шаров с радиусами, пропорциональными нулям бесселевой функции (см. теоремы 4 и 5).

2. Примеры функций класса $V_r(\mathbb{R}^n)$. Всюду в дальнейшем считаем $n \geq 2$. Как обычно, символом J_μ обозначается функция Бесселя первого рода порядка μ. Как известно, при $\mu > -1$ функция J_μ имеет бесконечно много нулей, причем все они вещественные (см., например, [15]). Пусть $\{\nu_1, \nu_2, \ldots\}$ — множество всех нулей $J_{\frac{n}{2}}$ на $(0, +\infty)$, расположенных в порядке возрастания. Положим $I_\mu(z) = J_\mu(z) z^{-\mu}$. Отметим, что I_μ является четной целой функцией переменной z. Обозначим через Φ множество всех функций $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$ с компактным носителем. Пусть также $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *Пусть $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\lambda > 0$, $r > 0$ и $\lambda r \in \{\nu_1, \nu_2, \ldots\}$. Тогда для любой $\varphi \in \Phi$ функция*

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} I_{\frac{k-2}{2}}\bigl(t\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}\bigr) I_{\frac{n-k-2}{2}}\Bigl(\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2)}\Bigr)\varphi(t)\, dt \qquad (13)$$

принадлежит классу $V_r(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если φ не является нечетной, то f – ненулевая функция.

Доказательство. Из формул дифференцирования функций Бесселя (см. [15] , формулы (6.1) и (6.2)]) имеем

$$I'_\mu(z) = -z I_{\mu+1}(z), \quad \frac{d}{dz}(z^{2\mu} I_\mu(z)) = z^{2\mu-1} I_{\mu-1}(z) \qquad (14)$$

при всех $z \neq 0$, $\mu \in \mathbb{R}^1$. Далее рекуррентное соотношение для функций Бесселя [15], формула (6.5)] приводит к равенству

$$I_{\mu-1}(z) + z^2 I_{\mu+1}(z) = 2\mu I_\mu(z), \quad z \in \mathbb{C}. \qquad (15)$$

Используя (14) и (15), при любом $t \in \mathbb{R}^1$ находим

$$\Delta\bigl(I_{\frac{k-2}{2}}\bigl(t\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\bigr)\bigr) = -t^2 I_{\frac{k-2}{2}}\bigl(t\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}\bigr),$$

$$\Delta\bigl(I_{\frac{n-k-2}{2}}\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2)}\bigr)$$
$$= (t^2 - \lambda^2) I_{\frac{n-k-2}{2}}\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2)},$$

где Δ – оператор Лапласа. Полученные соотношения показывают, что $\Delta f + \lambda^2 f = 0$ в $\mathbb{R}^n$. По теореме о среднем для решения уравнения Гельмгольца имеем

$$\int\limits_{|x|\le r} f(x+y)\,dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n I_{\frac{n}{2}}(\lambda r) f(y) \tag{16}$$

для любых $y \in \mathbb{R}^n$. Учитывая, что $\lambda r \in \{\nu_1, \nu_2, \dots\}$, получаем, что выражение справа в (16) равно нулю тождественно по y. Это означает, что $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$. Используя четность I_μ, запишем равенство (13) в виде

$$f(x) = 2\int\limits_0^\infty I_{\frac{k-2}{2}}\big(t\sqrt{x_1^2+\dots+x_k^2}\big)$$
$$\times I_{\frac{n-k-2}{2}}\Big(\sqrt{(\lambda^2-t^2)(x_{k+1}^2+\dots+x_n^2)}\Big)(\varphi(t)+\varphi(-t))\,dt. \tag{17}$$

Если φ не является нечетной, имеем $\varphi(t)+\varphi(-t) \ne 0$. Отсюда, из (17) и [3, Part 1, (6.13)] следует, что f ненулевая и теорема 3 доказана. $\square$

Теорема 4. *Пусть $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $r > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любой возрастающей функции $\varkappa : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, удовлетворяющей (2), существует ненулевая функция $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, для которой*

$$|f(x)| \le \exp\Big(-\frac{\sqrt{x_1^2+\dots+x_k^2}}{\varkappa(\sqrt{x_1^2+\dots+x_k^2})} + \varepsilon\sqrt{x_{k+1}^2+\dots+x_n^2}\Big) \tag{18}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Для доказательства теоремы 4 нам потребуется

Лемма. *Пусть $b > \lambda > a > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C^m[a,b]$ и $\varphi^{(j)}(a) = \varphi^{(j)}(b) = 0$ для всех $j \in \{0, \dots, m-1\}$. Тогда при любых $\delta > 0$, $\xi \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $Im\, z \ge 0$ для функции*

$$g(z,\xi) = \int\limits_a^b e^{itz} I_{\frac{n-k-2}{2}}\big(\sqrt{\lambda^2-t^2}\,\xi\big)\varphi(t)\,dt \tag{19}$$

выполнено неравенство

$$|g(z,\xi)| \le c\frac{(b-a)m!}{|z|^m} e^{-aIm\,z+|\xi|\sqrt{(\delta+b-a)(\delta+b)}} \sum_{j=0}^m \frac{\|\varphi^{(j)}\|_{C[a,b]}}{j!\,\delta^{m-j}},$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от n.

Доказательство. Полагая $u(t,\xi) = I_{\frac{n-k-2}{2}}(\sqrt{\lambda^2-t^2}\,\xi)\varphi(t)$ и интегрируя в (19) по частям, получаем оценку

$$|g(z,\xi)| \le \frac{e^{-a\mathrm{Im}\,z}}{|z|^m}\int\limits_a^b \Big|\frac{\partial^m u}{\partial t^m}(t,\xi)\Big|\,dt. \tag{20}$$

Применяя формулу Лейбница, имеем

$$\Big|\frac{\partial^m u}{\partial t^m}(t,\xi)\Big| \leq \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} |\varphi^{(j)}(t)| \big| I_{\frac{n-k-2}{2}}\big(\sqrt{\lambda^2 - t^2}\xi\big)_t^{(m-j)}\big|, \tag{21}$$

где $\binom{m}{j}$ – биномиальные коэффициенты. Далее, используя интегральную формулу Коши, находим

$$\big|I_{\frac{n-k-2}{2}}\big(\sqrt{\lambda^2 - t^2}\xi\big)_t^{(m-j)}\big| \leq \frac{(m-j)!}{\delta^{m-j}} \max_{|\mu - t| = \delta} \big|I_{\frac{n-k-2}{2}}\big(\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}\xi\big)\big| \tag{22}$$

для любого $\delta > 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \big|I_{\frac{n-k-2}{2}}\big(\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}\xi\big)\big| &\leq C \exp\big(|\xi|\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}\big) \\ &\leq C \exp\big(|\xi|\sqrt{\mu - \lambda}\sqrt{|\mu| + |\lambda|}\big), \end{aligned}$$

где $C > 0$ зависит только от n (см. [3, Part 1, (4.50)]). При $|\mu - t| = \delta$ имеем

$$|\mu| \leq \delta + |t| \leq \delta + b \quad \text{и} \quad |\mu - \lambda| \leq |\mu - t| + |t - \lambda| \leq \delta + b - a,$$

откуда

$$\big|I_{\frac{n-k-2}{2}}\big(\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}\xi\big)\big| \leq C \exp(|\xi|(\delta + b - a)(\delta + b)).$$

Из полученной оценки и (22) следует утверждения леммы 1. $\square$

Доказательство теоремы 4. Из (11) следует, что существует последовательность $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{k\varkappa(k)} < +\infty, \tag{23}$$

и последовательность $\eta_k/(k\varkappa(k))$ не убывает.

Положим

$$\mu_k = \Big(\frac{\eta_k}{k\varkappa(k)}\Big)^{-k}, \quad E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_k^2 \geq \alpha\}, \quad \alpha \geq 0. \tag{24}$$

При всех $q \in \mathbb{N}$ получаем

$$\frac{q}{\mu_q^{1/q}} < \sum_{j=1}^{q} \mu_j^{-1/j} < \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{-1/j}. \tag{25}$$

Кроме того, при любых $k, l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mu_k \mu_l \leq (\mu_k^{1/k})^k (\mu_l^{1/l})^l \leq (\mu_{k+l}^{1/(k+l)})^k (\mu_{k+l}^{1/(k+l)})^l = \mu_{k+l}. \tag{26}$$

Выберем теперь $a, b, \delta > 0$ так, чтобы

$$b > \lambda > a, \quad (\delta + b - a)(\delta + b) < \varepsilon^2. \tag{27}$$

Из второго условия в (23) вытекает [16, раздел 1.3], что существует ненулевая неотрицательная функция $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ с носителем на $[a, b]$ такая, что

$$\|\varphi_0^{(j)}\|_{C_{[a,b]}} \leq \mu_j \tag{28}$$

при всех $j \in \mathbb{N}$.

Положим

$$f_0(x) = \int_a^b I_{\frac{k-2}{2}}\big(t\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}\big)u_0(t, x_{k+1}, \ldots, x_n)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{29}$$

где $u_0(t, x_{k+1}, \ldots, x_n) = I_{\frac{n-k-2}{2}}\big(\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(x_{k+1} + \cdots + x_n)}\big)\varphi_0(t)$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\lambda > 0$, $r > 0$ и $\lambda r \in \{\nu_1, \nu_2, \ldots\}$. При $k = 1$ равенство (29) можно переписать в виде

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\int_a^b e^{itx_1}u_0(t, x_{k+1}, \ldots, x_n)\,dt. \tag{30}$$

При $k \geq 2$ из [15, формула (14.6)] и (29) следует равенство

$$f_0(x) = \lambda_k\left(\int_{-1}^{-1/2} + \int_{1/2}^{1}\right)(1 - \xi^2)^{\frac{k-3}{2}}\left(\int_a^b e^{it\rho\xi}u_0(t, x_{k+1}, \ldots, x_n)\,dt\right)d\xi$$

$$-\lambda_k\int_\gamma (1 - z^2)^{\frac{k-3}{2}}\left(\int_a^b e^{it\rho\xi}u_0(t, x_{k+1}, \ldots, x_n)dt\right)dz, \tag{31}$$

где $\lambda_k = 2^{1-\frac{k}{2}}(\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{k-2}{2}))^{-1}$, $\rho = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$, γ – полуокружность радиуса $1/2$ с центром в нуле, лежащая в верхней полуплоскости, и интегрирование вдоль γ ведется против часовой стрелки. Пусть $q \in \mathbb{N}$ и $\rho \geq 1$. Используя лемму 1 при $m = q + k + 2$ и оценки (25)–(28), из равенств (30), (31) получаем

$$|f_0(x)| \leq \exp\big(\varepsilon\sqrt{x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2}\big)\mu_{q+k+2}\Big(\frac{C_1}{\rho}\Big)^{q+k+2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{32}$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от x и q. Кроме того, $f_0 \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ по теореме 3 и для любых $\alpha > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n \setminus E_\alpha$ выполнено неравенство

$$|f_0(x)| \leq C_2 \exp\big(\varepsilon\sqrt{x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2}\big), \tag{33}$$

где $C_2 > 0$ не зависит от x. При достаточно большом $\alpha > 0$ для всех $x \in E_\alpha$ имеем

$$\varkappa(q+k+2) \leq \varkappa\big(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2}\big), \tag{34}$$

где $q+k+2 = \Big[\frac{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2}}{\varkappa(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2})}\Big]$ и $[\,\cdot\,]$ – целая часть.

Используя (23), (24), (33), (34) и оценку (32) для указанных q, получаем, что f_0 удовлетворяет (18) при всех $x \in E_\alpha$, если $\alpha > 0$ достаточно велико. Следовательно, функция $f = cf_0$ для достаточно малой константы $c > 0$ удовлетворяет (18) при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, теорема 4 полностью доказана. $\square$

3. Оценки плотности упаковок. Пусть $\lambda > 0$, $\varphi \in \Phi$. Символом $F(x,\varphi)$ обозначим функцию переменной $x \in \mathbb{R}^n$ в правой части равенства (13). Одним из приложений теоремы 3 является следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{K}$ – упаковка множества G, состоящая из шаров, радиусы которых принадлежат множеству $\{\frac{\nu_1}{\lambda}, \frac{\nu_2}{\lambda}, \dots\}$. Тогда*

$$d(G,\mathcal{K}) \leq 1 - \frac{1}{\operatorname{meas}(G)} \sup \frac{1}{\|F(\cdot,\varphi)\|_{L^\infty(G)}} \bigg| \int\limits_G F(x,\varphi)\,dx \bigg|,$$

где $\sup$ *берется по множеству всех $\varphi \in \Phi$, не являющихся нечетными.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{K} = (K_1, \dots, K_s)$ и $A = \bigcup_{j=1}^s K_j$. Согласно теореме 3,

$$\int\limits_{K_j} F(x,\varphi)\,dx \quad \text{для всех } j \in \{1,\dots,s\}.$$

Отсюда имеем

$$\bigg|\int\limits_G F(x,\varphi)\,dx\bigg| = \bigg|\int\limits_{G\setminus A} F(x,\varphi)\,dx + \int\limits_A F(x,\varphi)\,dx\bigg|$$
$$= \bigg|\int\limits_{G\setminus A} F(x,\varphi)\,dx\bigg| \leq \|F(\cdot,\varphi)\|_{L^\infty(G)} \operatorname{meas}(G \setminus A).$$

Следовательно, для $\varphi \in \Phi$, не являющейся нечетными,

$$\sum_{j=1}^s \operatorname{meas}(K_j) = \operatorname{meas}(D) = \operatorname{meas}(G) - \operatorname{meas}(G \setminus A)$$
$$\leq \operatorname{meas}(G) - \frac{1}{\|F(\cdot,\varphi)\|_{L^\infty(G)}} \bigg|\int\limits_G F(x,\varphi)\,dx\bigg|.$$

В силу произвольности φ отсюда и из (1) следует утверждение теоремы 5. $\square$

1. *Конвей Дж., Слоен Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. – Т. 1,2. – М. Мир. – 1990.
2. *Рожджерс К.* Укладки и покрытия. – М. Мир. – 1968.
3. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers. – 2003.
4. *Kotlyar B.D.* Packing of parallelotopes and some another sets. – Sibirsk. Mat. Zh. –V. 25. – № 2. – C. 222–225.
5. *Kotlyar B.D.* Densities of packings of bounded sets. – Soobsheniya A. N. Gruz. SSR. – V. 126. –№ 3. – C. 469–672.
6. *Smith I. D.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403–416.
7. *Sitaram A.* Fourier analysis and determining sets for Radon measures on $\mathbb{R}^n$ // Illinois J. Math. – 1984. – V. 28. – P. 339–347.
8. *Thangavelu S.* Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // J. Anal. Math. – 1994. – V. 63. – P. 255–286.
9. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Матем. сб. – 1997. – Т. 188. – № 9. – С. 13–30.
10. *Shahshahani M., Sitaram A.* The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric space // Contemp. Math. – 1987. – V. 63. – P. 267–277.
11. *Волчков В. В.* Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах // Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – № 9. – С. 17–38.
12. *Очаковская О. А.* О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса на полупространстве // Докл. РАН. -2001. – Т. 381. – № 6. – С. 745–747.
13. *Очаковская О. А.* О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2002. – Т. 9. – № 3. – С. 493–501
14. *Очаковская О. А.* Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними // Матем. сб. 2008. – Т. 199. – №1. – С. 47-66.
15. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971.
16. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 1. М.: Мир, 1986.

O.A.Ochakovskaya

Function with vanishing ball means and densities of packings.

Some examples of functions with zero integrals over ball of one fixed radius are considered. New estimates for the densities of ball packing are obtained

Keywords: *spherical means, density of packing.*

О.О.Очаковська

Функції з нульовими шаровими середніми та щільність упаковок.

Розглянуто деякі приклади функцій з нульовими інтегралами по усіх кулях фіксованого радіуса. Отримано нові оцінки щільностей для укладок куль

Ключові слова: *сферичні середні, щільність укладок.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`ochakovskaja@yandex.ua`

Получено 20.11.10