УДК 517.5

©2010. **Д.А Ковтонюк, Р.Р. Салимов**

О ЛОКАЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОТНОСИТЕЛЬНО p-МОДУЛЯ

В работе рассматриваются Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля. Получена оценка меры образа шара при таких отображениях и исследовано асимптотическое поведение в нуле.

Ключевые слова: *p-модуль, Q-гомеоморфизм, асимптотическое поведение.*

1. Введение. Напомним некоторые определения. Борелева функция $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, пишут $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(x)\,ds \geqslant 1 \tag{1}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Пусть $p \geqslant 1$, тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x)\,dm(x). \tag{2}$$

Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем полагаем $M(\Gamma) = M_n(\Gamma)$.

Свойства p-модуля, определённого соотношением (2), в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$. А именно:

1) p-модуль пустого семейства кривых равен нулю:

$$M_p(\varnothing) = 0;$$

2) p-модуль обладает свойством монотонности относительно семейств кривых:

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M_p(\Gamma_1) \leqslant M_p(\Gamma_2);$$

3) p-модуль обладает свойством полуаддитивности:

$$M_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} M_p(\Gamma_i),$$

см. теорему 6.2 разд. 6 гл. I в [1]. Заметим также, что если Γ_∞ – некоторое семейство, состоящее из неспрямляемых кривых, то $M_p(\Gamma_\infty) = 0$, см. разд. 6 гл. I на с. 18 в [1]. Упомянем ещё об одном свойстве модуля. Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2, пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. Известно, что если $\Gamma_1 > \Gamma_2$, то $M_p(\Gamma_1) < M_p(\Gamma_2)$, см. [1].

Хорошо известно, см., напр., разд. 13 гл. II в [1], что в основу геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области G из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, положено условие

$$M(f\Gamma) \leqslant K\, M(\Gamma) \tag{3}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области G, где $M(\cdot)$ – (конформный) модуль семейства кривых, определённый нами выше при $p = n$. Другими словами, стандартное определение квазиконформности сводится к тому, что n-модуль любого семейства кривых искажается не более, чем в K раз. Отметим, что выражение "конформный модуль" употребляется в случае p-модуля, определённого в (2), при $p = n$. Упомянутое выше словосочетание вполне оправдано тем, что для любого конформного отображения $g : G \to \mathbb{R}^n$, заданного в области $G \subset \mathbb{R}^n$, и для произвольного семейства кривых Γ, лежащего в области G, выполнено равенство: $M(g\Gamma) = M(\Gamma)$, см., напр., теорему 8.1 гл. I в [1]. Отметим, что при $p \neq n$, даже линейные отображения $f_k(x) = kx$, $k \neq 0$, не сохраняют модуль семейств кривых, а именно, $M_p\left(f_k\Gamma\right) = k^{n-p} M_p(\Gamma)$, см. теорему 8.2 там же. Предположим, что $p \neq n$ и

$$M_p(f\Gamma) \leqslant K\, M_p(\Gamma) \tag{4}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области G. При дополнительном предположении, что f в (4) является гомеоморфизмом, известным математиком Ф. Герингом установлено, что отображение f является *локально квазиизометричным.* Другими словами, при некоторой постоянной $C > 0$ и всех $x_0 \in G$ справедлива оценка

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant C,$$

см., напр., теорему 2 в [2]. Целью данной работы является получение на основе используемой нами техники исследования аналога следующего результата из работы [3] для более общих классов.

Предположим, что $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – K-квазиконформное отображение, такое что $f(0) = 0$. Тогда

$$\liminf_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}} \leqslant 1,$$

где α – постоянная, зависящая только от коэффициента квазиконформности K.

Для отображения $f : G \to \mathbb{R}^n$, имеющего в G частные производные почти всюду, пусть $f'(x)$ – якобиева матрица отображения f в точке x, $\|f'(x)\| = \max\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|},$$

если *якобиан* $J(x, f) := \det f'(x) \neq 0$, $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках. *Внутренняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l\left(f'(x)\right)^n},$$

если якобиан $J(x,f)\neq 0$, $K_I(x,f)=1$, если $f'(x)=0$, и $K_I(x,f)=\infty$ в остальных точках. В формуле выше, как обычно,

$$l\left(f'(x)\right)=\min_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Всюду далее $B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|<r\}$, $\mathbb{B}^n=B(0,1)$, $B_r=B(0,r)$, ω_{n-1} – площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n – объём единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n\Omega_n=\omega_{n-1}$. Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$ и $Q:G\to[0,\infty]$ – измеримая функция. Тогда $q_{x_0}(r)=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r}Q(x)d\mathcal{A}$ означает среднее интегральное значение над сферой $|x-x_0|=r$, где $d\mathcal{A}$ – элемент площади поверхности. В дальнейшем при $x_0=0$ полагаем $q(t)=q_{x_0}(t)$. Запись $m(A)$ означает меру Лебега множества A в $\mathbb{R}^n$.

Следуя работе [4], пару $E=(A,C)$, где $A\subset\mathbb{R}^n$ – открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором.* Конденсатор E называем *кольцевым конденсатором*, если $B=A\setminus C$ – кольцо, т.е., если B – область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B$ состоит в точности из двух компонент. Конденсатор E называем *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят, что конденсатор $E=(A,C)$ лежит в области G, если $A\subset G$. Очевидно, что если $f:G\to\mathbb{R}^n$ – открытое отображение и $E=(A,C)$ – конденсатор в G, то (fA,fC) также конденсатор в fG. Далее $fE=(fA,fC)$.

Пусть $E=(A,C)$ – конденсатор. $W_0(E)=W_0(A,C)$ – семейство неотрицательных функций $u:A\to\mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u\in C_0(A)$, 2) $u(x)\geqslant 1$ для $x\in C$ и 3) u принадлежит классу ACL и пусть

$$|\nabla u|=\left(\sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)^2\right)^{1/2}. \tag{5}$$

При $p\geqslant 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p E=\operatorname{cap}_p(A,C)=\inf_{u\in W_0(E)}\int\limits_A|\nabla u|^p\,dm \tag{6}$$

называют *p-ёмкостью* конденсатора E. В дальнейшем мы будем использовать равенство

$$\operatorname{cap}_p E=M_p(\Delta(\partial A,\partial C;A\setminus C)), \tag{7}$$

где для множеств $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_3$ в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $\Delta(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2;\mathcal{S}_3)$ обозначает семейство всех непрерывных кривых, соединяющих $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ в $\mathcal{S}_3$, см. [5], [6] и [7].

Известно, что при $p\geqslant 1$

$$\operatorname{cap}_p E\geqslant\frac{(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p}{[m(A\setminus C)]^{p-1}}, \tag{8}$$

где $m_{n-1}\,\sigma$ – $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия σ, являющегося границей $\sigma=\partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A, а точная нижняя грань берется по всем таким σ, см. предложение 5 из [8].

Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $Q : G \to [1, \infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f : G \to \mathbb{R}^n$ будем называть *Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля*, если

$$M_p(f\Gamma) \leqslant \int\limits_G Q(x) \cdot \varrho^p(x)\, dm(x) \tag{9}$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ϱ для Γ.

Определение Q-гомеоморфизма относительно p-модуля впервые встречается в работе [9]. Такие отображения являются естественным обобщением квазиконформных и локально квазиизометрических отображений. Заметим, что если $Q(x) \leqslant K$ п.в. при $p = n$, отображение f является K-квазиконформным, см., напр., [1], и локально K-квазиизометричным в случае $1 < p \neq n$, см. [2]. Целью теории Q-гомеоморфизмов является установление взаимосвязей между различными свойствами мажоранты Q и самого отображения f. Неравенство вида (9) при $p = n$ установлено В.Я. Гутлянским в работе [10] совместно с К. Бишопом, О. Мартио и М. Вуориненом для квазиконформных отображений, где Q было равно $K_I(x, f)$. Последнее обстоятельство, собственно, и положило начало рассмотрению классов отображений, удовлетворяющих упомянутому выше соотношению. Отметим также, что неравенство вида (9) при $p = n$ было установлено Ю.Ф. Струговым в работе [11] для так называемых отображений, квазиконформных в среднем. При $p = n$ проблема локального поведения Q-гомеоморфизмов изучалась в $\mathbb{R}^n$ в случае $Q \in \mathrm{BMO}$ (ограниченного среднего колебания), в случае $Q \in \mathrm{FMO}$ (конечного среднего колебания) и в других случаях, см. монографию [2].

2. Искажение объема. В этом разделе получена оценка меры образа шара при Q-гомеоморфизмах относительно p-модуля. Впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в работе М.А. Лаврентьева, см. [13].

Лемма 1. *Пусть $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ – Q-гомеоморфизм относительно p-модуля. Тогда при $1 < p < n$ имеет место оценка*

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n \cdot \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}}, \tag{10}$$

а при $p = n$ имеет место оценка

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n \cdot \exp\left\{-n \int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}. \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $R_t = \{x \in \mathbb{B}^n : t < |x| < t + \triangle t\}$. Пусть $(A_{t+\triangle t}, C_t)$ – конденсатор, где $C_t = \overline{B_t}, A_{t+\triangle t} = B_{t+\triangle t}$. Тогда

$(fA_{t+\triangle t}, fC_t)$ – кольцевой конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и согласно (7) имеем

$$\mathrm{cap}_p(fA_{t+\triangle t}, fC_t) = M_p(\triangle(\partial fA_{t+\triangle t}, \partial fC_t; fR_t)). \tag{12}$$

В силу неравенства (8) получим

$$\mathrm{cap}_p\,(fA_{t+\triangle t}, fC_t) \geqslant \frac{(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p}{m\,(fA_{t+\Delta t}\setminus fC_t)^{p-1}}, \tag{13}$$

где $m_{n-1}\,\sigma$ – $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия σ, являющегося границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего fC_t и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в $fA_{t+\triangle t}$, а точная нижняя грань берется по всем таким σ.

С другой стороны, в силу определения Q-гомеоморфизма относительно p-модуля, имеем

$$\mathrm{cap}_p\,(fA_{t+\triangle t}, fC_t) \leqslant \int\limits_{R_t} Q(x)\varrho^p(x)\,dm(x).$$

Заметим, что функция $\varrho(x) = \frac{1}{|x|\ln\frac{t+\Delta t}{t}}\cdot\chi_{R_t}(x)$, где $\chi_{R_t}(x)$ – характеристическая функция множества R_t, является допустимой для семейства $\triangle(\partial A_{t+\triangle t}, \partial C_t; R_t)$ и поэтому

$$\mathrm{cap}_p\,(fA_{t+\triangle t}, fC_t) \leqslant \frac{1}{\left(\ln\frac{t+\Delta t}{t}\right)^p}\int\limits_{R_t}\frac{Q(x)}{|x|^p}\,dm(x). \tag{14}$$

Комбинируя неравенства (13) и (14), получим

$$\frac{(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p}{m\,(fA_{t+\Delta t}\setminus fC_t)^{p-1}} \leqslant \frac{1}{\left(\ln\frac{t+\Delta t}{t}\right)^p}\int\limits_{R_t}\frac{Q(x)}{|x|^p}\,dm(x).$$

Заметим, что по теореме Фубини имеем

$$\int\limits_{R_t}\frac{Q(x)}{|x|^p}\,dm(x) = \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\frac{dt}{t^p}\int\limits_{S_t}Q(x)\,d\mathcal{A} = \omega_{n-1}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}t^{n-p-1}q(t)\,dt$$

и, таким образом,

$$\inf m_{n-1}\,\sigma \leqslant \omega_{n-1}^{\frac{1}{p}}\frac{\left[m\,(fA_{t+\Delta t}\setminus fC_t)\right]^{\frac{p-1}{p}}}{\ln\frac{t+\Delta t}{t}}\left[\int\limits_{t}^{t+\Delta t}t^{n-p-1}q(t)\,dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Далее, воспользовавшись изопериметрическим неравенством

$$\inf m_{n-1}\,\sigma \geqslant n\cdot\Omega_n^{\frac{1}{n}}\,(m(fC_t))^{\frac{n-1}{n}},$$

получим

$$n\cdot\Omega_n^{\frac{1}{n}}\left(m(fC_t)\right)^{\frac{n-1}{n}}\leqslant\omega_{n-1}^{\frac{1}{p}}\frac{\left[m\left(fA_{t+\Delta t}\setminus fC_t\right)\right]^{\frac{p-1}{p}}}{\ln\frac{t+\Delta t}{t}}\left[\int\limits_t^{t+\Delta t}t^{n-p-1}q(t)\,dt\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (15)$$

Определим функцию $\Phi(t)$ для данного гомеоморфизма f следующим образом $\Phi(t):=m\left(fB_t\right)$. Тогда из соотношения (15) следует, что

$$n\cdot\Omega_n^{\frac{1}{n}}\Phi^{\frac{n-1}{n}}(t)\leqslant\omega_{n-1}^{\frac{1}{p}}\frac{\left[\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}\right]^{\frac{p-1}{p}}}{\frac{\ln(t+\Delta t)-\ln t}{\Delta t}}\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}t^{n-p-1}q(t)\,dt\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (16)$$

Далее, устремляя в неравенстве (16) Δt к нулю, и учитывая монотонное возрастание функции Φ по $t\in(0,1)$, для п.в. t имеем:

$$\frac{n\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\leqslant\frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}(t)}. \qquad (17)$$

Рассмотрим неравенство (17) при $1<p<n$. Интегрируя обе части неравенства по $t\in[r,1]$ и учитывая, что

$$\int\limits_r^1\frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}(t)}\,dt\leqslant\frac{n(p-1)}{p-n}\left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(1)-\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r)\right),$$

см., напр., теорему 7.4. гл. IV в [14], получим

$$\int\limits_r^1\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\leqslant\frac{1}{\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}}\cdot\frac{p-1}{p-n}\left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(1)-\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r)\right). \qquad (18)$$

Из неравенства (18) получаем, что

$$\Phi(r)\leqslant\left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(1)+\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}\,\frac{n-p}{p-1}\int\limits_r^1\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}}.$$

Наконец, обозначая в последнем неравенстве $\Phi(r)=m(fB_r)$ и учитывая, что $m(f\mathbb{B}^n)\leqslant\Omega_n$, имеем оценку

$$m(fB_r)\leqslant\Omega_n\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_r^1\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}}.$$

Неравенство (10) доказано.

Осталось рассмотреть случай $p = n$. В этом случае неравенство (17) примет вид:

$$\frac{n}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)} \leqslant \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}. \tag{19}$$

Интегрируя обе части неравенства (19) по $t \in [r, 1]$, учитывая, что

$$\int\limits_r^1 \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\, dt \leqslant \ln \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)},$$

см., напр., теорему 7.4. гл. IV в [14], получим

$$n \int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)} \leqslant \ln \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)}.$$

И, следовательно, имеем

$$\exp\left\{ n \int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right\} \leqslant \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)},$$

а потому

$$\Phi(r) \leqslant \Phi(1) \cdot \exp\left\{ -n \int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right\}.$$

Наконец, обозначая в последнем неравенстве $\Phi(r) = m(fB_r)$, получим оценку

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n \cdot \exp\left\{ -n \int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right\}.$$

Неравенство (11) доказано, что завершает доказательство леммы. □

3. Поведение в точке. Лемма, приведенная в предыдущей секции, позволяет нам также описать асимптотическое поведение Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля в нуле.

Предложение 1. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, – гомеоморфизм, $f(0) = 0$. Тогда если*

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n\, R^n(r), \tag{20}$$

то

$$\liminf_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{R(|x|)} \leqslant 1. \tag{21}$$

Доказательство. Положим $\min\limits_{|x|=r}|f(x)| = l_f(r)$. Тогда, учитывая, что $f(0) = 0$, получаем $\Omega_n\, l_f^n(r) \leqslant m(fB_r)$ и, следовательно,

$$l_f(r) \leqslant \left(\frac{m(fB_r)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{22}$$

Таким образом, учитывая неравенства (22) и (20), имеем

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{R(|x|)} = \liminf_{r\to 0}\frac{l_f(r)}{R(r)} \leqslant \liminf_{r\to 0}\left(\frac{m(fB_r)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{R(r)} \leqslant 1.$$

Предложение доказано. □

Комбинируя лемму и предложение с функцией $R(r) = \left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_r^1\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}$ при $1<p<n$ и $R(r)=\exp\left\{\int\limits_r^1\frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}$ при $p=n$, получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, $n\geqslant 2$, – Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $f(0)=0$. Тогда при $1<p<n$ имеет место оценка*

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\cdot\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^1\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{n-p}} \leqslant 1,$$

а при $p=n$ имеет место оценка

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\cdot\exp\left\{\int\limits_{|x|}^1\frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} \leqslant 1.$$

1. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings // Lecture Notes in Math. 1971. – V. 229. – Berlin etc., Springer-Verlag, 229 pp.
2. *Gehring F.W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies. – 1971. – V. 66. – P. 175–193.
3. *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – V. 25. – P. 175-203.
4. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – V. 448. – P. 1-40.
5. *Gehring F.W.* Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications, V. 2. – International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.
6. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Arc. Mat. – 1975. – V. 13. – P. 131-144.
7. *Shlyk V. A.* On the equality between p-capacity and p-modulus // Sibirsk. Mat. Zh. – 1993. – V. 34, no. 6. – P. 216-221.
8. *Кругликов В.И.* Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. – 1986. – Т. 130, № 2. – С. 185-206.

9. *Golberg A.* Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms // Further Progress in Analysis, World Scientific Publ. – 2009. – P. 218-228.
10. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. – 2003. – V. 22. – P. 1397-1420.
11. *Стругов Ю.Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // ДАН СССР. – 1978. – Т. 243, № 4. – С. 859-861.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
13. *Лаврентьев М.А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – М., 1962. – 136 с.
14. *Сакс С.* Теория интеграла, – М., ИЛ, 1949.

D.A. Kovtonyuk, R.R. Salimov

On local behavior of Q-homeomorphisms with respect to p-modulus.

In this article we consider the Q-homeomorphisms with respect to the p-modulus. It is obtained a measure estimate of the volume for the image of the ball and study the asymptotic behavior at zero under such mappings.

Keywords: *p-modulus, Q-homeomorphism, asymptotic behavior.*

Д.О. Ковтонюк, Р.Р. Салімов

Про локальну поведінку Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля.

У роботі розглядаються Q-гомеоморфізми відносно p-модуля. Отримано оцінку міри образу кулі при таких відображеннях і досліджено асимптотичну поведінку в нулі.

Ключові слова: *p-модуль, Q-гомеоморфізм, асимптотична поведінка.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`denis_kovtonyuk@bk.ru, ruslan623@yandex.ru`

Получено 21.11.10