УДК 531.38

©2010. **Г. В. Горр, А. В. Мазнев**

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ОТНОСИТЕЛЬНО НАКЛОННОЙ ОСИ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ

В работе получены новые классы регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом, в случае, когда постоянен угол между собственной осью в гиростате и осью, не совпадающей с осью симметрии силовых полей. Механическая модель действующих на гиростат моментов и сил описана уравнениями Кирхгофа-Пуассона.

Ключевые слова: *гиростат, регулярная прецессия, гиростатический момент, потенциальные и гироскопические силы*

1. Введение. В книгах [6,8,11,13] даны обзоры по динамике твердого тела и гиростата, которые посвящены исследованию уравнений движения в предположении, что гиростатический момент постоянен в подвижной системе координат по направлению и величине. Уравнения П. В. Харламова [12] позволяют исследовать и задачи с переменным гиростатическим моментом. В [9] проведен анализ равномерных вращений уравновешенного гиростата; в [10] рассмотрены некоторые случаи равномерных движений гиростата в предположении, что центр тяжести не совпадает с неподвижной точкой; в [1,2,3,5] исследованы условия существования равномерных вращений гиростата в общем случае и регулярных прецессий тяжелого гиростата как относительно вертикали, так и относительно наклонной оси; в [4] изучены маятниковые движения гиростата в поле силы тяжести.

Данная статья посвящена рассмотрению задачи о движении гиростата, которая описывается уравнениями Кирхгофа–Пуассона. Найдены новые классы регулярных прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом в случае невертикальной оси в пространстве.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения гиростата [16] под действием потенциальных и гироскопических сил

$$\begin{gathered} A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda(t)(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) - \dot{\lambda}(t)\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — единичный вектор гиростатического момента $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\lambda}(t)$; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; A — тензор инерции гиростата с компонентами A_{ij}; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ — постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает производную по времени t.

Уравнения (1) допускают первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1,\quad (A\boldsymbol{\omega}+\lambda(t)\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\nu}-\frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})=k. \tag{2}$$

Здесь k — произвольная постоянная.

Рассмотрим регулярные прецессии гиростата относительно оси, не совпадающей по направлению с вектором $\boldsymbol{\nu}$. Введем в неподвижном пространстве единичный вектор $\boldsymbol{\gamma}$ с началом в неподвижной точке. Угол между векторами $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ обозначим через $\varkappa$. Тогда имеем уравнения [7]

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega},\quad \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu}=c_0,\quad (c_0=\cos\varkappa). \tag{3}$$

Свяжем с гиростатом единичный вектор $\boldsymbol{a}$ так, чтобы $\boldsymbol{a}=(0,0,1)$.

Рассмотрим класс регулярных прецессий гиростата относительно вектора $\boldsymbol{\gamma}$ [7]

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}=a_0,\quad \boldsymbol{\omega}=n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{\gamma}, \tag{4}$$

где $a_0=\cos\theta_0,\ \theta_0$, n и m — постоянные параметры.

На основании соотношений (4) в работе [7] получено векторное равенство

$$\boldsymbol{\gamma}=(a_0'\sin t, a_0'\cos t, a_0). \tag{5}$$

Здесь $a_0'=\sin\theta_0$ Подстановка значений $\boldsymbol{\omega}$ из (4) и $\boldsymbol{\gamma}$ (5) в уравнение Пуассона из системы (1) приводит к тождеству. При рассмотрении уравнения (1) найдем разложение вектора $\boldsymbol{\nu}$ в базисе $\boldsymbol{a},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\gamma}$

$$\boldsymbol{\nu}=(c_0+a_0b_0'\sin(mt+\psi_0))\boldsymbol{\gamma}-b_0'\boldsymbol{a}\sin(mt+\psi_0)-b_0'(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\cos(mt+\psi_0), \tag{6}$$

где $b_0'=\frac{b_0}{a_0'},\ b_0=\sin\varkappa,\ \psi_0$ — постоянная.

Подставим выражение $\boldsymbol{\omega}$ из (4) и выражение $\boldsymbol{\nu}$ из (6) в динамическое уравнение из (1)

$$\begin{gathered}
\dot{\lambda}(t)\boldsymbol{\alpha}=[n(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{a})+m(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma})]\lambda(t)+n^2(A\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})+m^2(A\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma})-\\
-nm[\mathrm{Sp}(A)(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})-2(A\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})]+(c_0+a_0b_0'\sin(mt+\psi_0))(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\gamma})-\\
-b_0'(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{a})\sin(mt+\psi_0)-b_0'[\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})]\cos(mt+\psi_0)+\\
+(c_0+a_0b_0'\sin(mt+\psi_0))[n(\boldsymbol{a}\times B\boldsymbol{\gamma})+m(\boldsymbol{\gamma}\times B\boldsymbol{\gamma})]-\\
-b_0'[n(\boldsymbol{a}\times B\boldsymbol{a})+m(\boldsymbol{\gamma}\times B\boldsymbol{a})]\sin(mt+\psi_0)-\\
-b_0'[n(\boldsymbol{a}\times B(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a}))+m(\boldsymbol{\gamma}\times B(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a}))]\cos(mt+\psi_0)+\\
+(c_0+a_0b_0'\sin(mt+\psi_0))^2(\boldsymbol{\gamma}\times C\boldsymbol{\gamma})-\\
-b_0'(\boldsymbol{\gamma}\times C\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times C\boldsymbol{\gamma})(c_0+a_0b_0'\sin(mt+\psi_0))\sin(mt+\psi_0)-\\
-b_0'[\boldsymbol{\gamma}\times C(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\times C\boldsymbol{\gamma}](c_0+a_0b_0'\sin(mt+\psi_0))\cos(mt+\psi_0)+\\
+\frac{b_0'^2}{2}[\boldsymbol{a}\times C(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\times C\boldsymbol{a}]\sin 2(mt+\psi_0)+\\
+b_0'^2(\boldsymbol{a}\times C\boldsymbol{a})\sin^2(mt+\psi_0)+b_0'^2[(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\times C(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})]\cos^2(mt+\psi_0),
\end{gathered} \tag{7}$$

где $\mathrm{Sp}(A)$ — след матрицы A.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}
A_2=\frac{a_0'^2}{2}(A_{22}-A_{11}),\quad A_2'=a_0'^2A_{12},\quad A_1=2a_0\sigma_1,\quad A_1'=2a_0\sigma_1',\\
\sigma_1=a_0'A_{23},\quad \sigma_1'=a_0'A_{13},\quad \sigma_0=a_0A_{33},\quad A_0^*=-\frac{a_0'^2}{2}(A_{11}+A_{22}),\\
A_0=\frac{1}{2}[a_0'^2(A_{11}+A_{22})+2a_0^2A_{33}],\quad A_0'=\frac{a_0'^2}{2}(A_{11}+A_{22}-2A_{33}),\\
B_2=\frac{a_0'^2}{2}(B_{22}-B_{11}),\quad B_2'=a_0'^2B_{12},\quad B_1=2a_0\varkappa_1,\quad B_1'=2a_0\varkappa_1',\\
\varkappa_1=a_0'B_{23},\quad \varkappa_1'=a_0'B_{13},\quad \varkappa_0=a_0B_{33},\quad B_0^*=-\frac{a_0'^2}{2}(B_{11}+B_{22}),\\
B_0=\frac{1}{2}[a_0'^2(B_{11}+B_{22})+2a_0^2B_{33}],\quad B_0'=\frac{a_0'^2}{2}(B_{11}+B_{22}-2B_{33}),\\
C_2=\frac{a_0'^2}{2}(C_{22}-C_{11}),\quad C_2'=a_0'^2C_{12},\quad C_1=2a_0\varepsilon_1,\quad C_1'=2a_0\varepsilon_1',\\
\varepsilon_1=a_0'C_{23},\quad \varepsilon_1'=a_0'C_{13},\quad \varepsilon_0=a_0C_{33},\quad C_0^*=-\frac{a_0'^2}{2}(C_{11}+C_{22}),\\
C_0=\frac{1}{2}[a_0'^2(C_{11}+C_{22})+2a_0^2C_{33}],\quad C_0'=\frac{a_0'^2}{2}(C_{11}+C_{22}-2C_{33});
\end{gathered}\tag{8}$$

$$\begin{gathered}
P_2=mB_2+2c_0C_2,\quad P_2'=mB_2'+2c_0C_2',\\
P_1=a_0'a_0s_2+a_0'^2m\varkappa_1+c_0(1-2a_0^2)\varepsilon_1,\quad P_1'=a_0'a_0s_1+a_0'^2m\varkappa_1'+c_0(1-2a_0^2)\varepsilon_1',\\
Q_1=a_0's_2-a_0c_0\varepsilon_1,\quad Q_1'=a_0's_1-a_0c_0\varepsilon_1',\quad Q_0=-mB_0^*,\\
R_2=(1+a_0^2)C_2,\quad R_2'=(1+a_0^2)C_2',\quad R_1=a_0a_0'^2\varepsilon_1,\quad R_1'=a_0a_0'^2\varepsilon_1',\\
S_2=m^2A_2-mc_0B_2+\frac{1}{2}(a_0'^2b_0'^2-2c_0^2)C_2,\\
S_2'=m^2A_2'-mc_0B_2'+\frac{1}{2}(a_0'^2b_0'^2-2c_0^2)C_2',\\
S_1=a_0m^2\sigma_1+a_0'c_0s_2-a_0c_0m\varkappa_1+\frac{a_0}{2}(a_0'^2b_0'^2-2c_0^2)\varepsilon_1,\\
S_1'=a_0m^2\sigma_1'+a_0'c_0s_1-a_0c_0m\varkappa_1'+\frac{a_0}{2}(a_0'^2b_0'^2-2c_0^2)\varepsilon_1';
\end{gathered}\tag{9}$$

$$\begin{gathered}
L_2=a_0nB_2-c_0C_2,\quad L_2'=a_0nB_2'-c_0C_2',\\
L_1=a_0's_2-a_0'^2n\varkappa_1-a_0c_0\varepsilon_1,\quad L_1=a_0's_1-a_0'^2n\varkappa_1'-a_0c_0\varepsilon_1',\\
U_2=nB_2-a_0c_0C_2,\quad U_2'=nB_2'-a_0c_0C_2',\\
U_1=a_0a_0's_2-c_0(2a_0^2-1)\varepsilon_1,\quad U_1'=a_0a_0's_1-c_0(2a_0^2-1)\varepsilon_1',\\
U_0=nB_0^*-a_0c_0C_0'-a_0'^2s_3,\\
\Pi_2=n(2mA_2-c_0B_2),\quad \Pi_2'=n(2mA_2'-c_0B_2'),\\
\Pi_1=n[(n+2a_0m)\sigma_1-a_0c_0\varkappa_1],\quad \Pi_1'=n[(n+2a_0m)\sigma_1'-a_0c_0\varkappa_1'];
\end{gathered}\tag{10}$$

$$
\begin{gathered}
D_2 = c_0(1-2a_0^2)C_2 - a_0(n+a_0m)B_2, \\
D_2' = c_0(1-2a_0^2)C_2' - a_0(n+a_0m)B_2', \\
D_1 = a_0'^2[-a_0's_2 + (n+2a_0m)\varkappa_1 + 4a_0c_0\varepsilon_1], \\
D_1' = a_0'^2[-a_0's_1 + (n+2a_0m)\varkappa_1' + 4a_0c_0\varepsilon_1'], \\
D_0 = c_0(1-2a_0^2)C_0' - a_0'^2[a_0s_3 + \frac{a_0}{2}(n+a_0m)(B_{11}+B_{22}) + ma_0'^2B_{33}], \\
E_2 = (n+a_0m)B_2 + a_0c_0C_2, \quad E_2' = (n+a_0m)B_2' + a_0c_0C_2', \\
E_1 = a_0'^2(m\varkappa_1 + c_0\varepsilon_1), \quad E_1' = a_0'^2(m\varkappa_1' + c_0\varepsilon_1');
\end{gathered} \tag{11}
$$

$$
\begin{gathered}
G_2 = m(a_0m+2n)A_2 - c_0(n+a_0m)B_2 + \frac{a_0}{2}(a_0'^2b_0'^2 - 2c_0^2)C_2, \\
G_2' = m(a_0m+2n)A_2' - c_0(n+a_0m)B_2' + \frac{a_0}{2}(a_0'^2b_0'^2 - 2c_0^2)C_2', \\
G_1 = a_0'a_0c_0s_2 + [(n+a_0m)^2 - a_0'^2m^2]\sigma_1 - c_0(a_0n + (2a_0^2-1)m)\varkappa_1 + \\
+\frac{2a_0^2-1}{2}(a_0'^2b_0'^2 - 2c_0^2)\varepsilon_1, \\
G_1' = a_0'a_0c_0s_1 + [(n+a_0m)^2 - a_0'^2m^2]\sigma_1' - c_0(a_0n + (2a_0^2-1)m)\varkappa_1' + \\
+\frac{2a_0^2-1}{2}(a_0'^2b_0'^2 - 2c_0^2)\varepsilon_1', \\
G_0 = a_0m^2A_0' - a_0'^2mnA_{33} - a_0'^2c_0s_3 + c_0(nB_0^* - a_0mB_0') + \\
+\frac{a_0}{2}(a_0'^2b_0'^2 - 2c_0^2)C_0'.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Умножим обе части уравнения (7) скалярно на независимые векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\gamma}$. Тогда на основании (7) и обозначений (8)–(12) получим

$$
\alpha_3\dot{\lambda}(t) = a_0'm\alpha_1\cos nt\cdot\lambda(t) + \Phi_1(t), \tag{13}
$$

$$
(\alpha_1a_0'\sin nt + a_0\alpha_3)\dot{\lambda}(t) = -a_0'\alpha_1 n\cos nt\cdot\lambda(t) + \Phi_2(t), \tag{14}
$$

$$
a_0'\alpha_1\cos nt\cdot\dot{\lambda}(t) = a_0'[\alpha_1(n+a_0m)\sin nt - \alpha_3a_0'm]\lambda(t) + \Phi_3(t), \tag{15}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\Phi_1(t) = b_0'(-a_0P_2'\cos 2nt + a_0P_2\sin 2nt + P_1'\cos nt - \\
-P_1\sin nt)\sin(mt+\psi_0) + b_0'(-P_2\cos 2nt - P_2'\sin 2nt + Q_1\cos nt + \\
+Q_1'\sin nt + Q_0)\cos(mt+\psi_0) + \frac{b_0'^2}{2}(-2a_0C_2\cos 2nt - 2a_0C_2'\sin 2nt + \\
+a_0'^2\varepsilon_1\cos nt + a_0'^2\varepsilon_1'\sin nt)\sin 2(mt+\psi_0) + \\
+\frac{b_0'^2}{2}(R_2'\cos 2nt - R_2\sin 2nt - R_1'\cos nt + R_1\sin nt)\cos 2(mt+\psi_0) + \\
+(S_2'\cos 2nt - S_2\sin 2nt + S_1'\cos nt - S_1\sin nt),
\end{gathered} \tag{16}
$$

$$\begin{gathered}\Phi_2(t)=b_0'(L_2'\cos 2nt-L_2\sin 2nt+L_1'\cos nt-\\ -L_1\sin nt)\sin(mt+\psi_0)+b_0'(U_2\cos 2nt+U_2'\sin 2nt+U_1\cos nt+\\ +U_1'\sin nt+U_0)\cos(mt+\psi_0)+\frac{b_0'^2}{2}(-R_2\cos 2nt-R_2'\sin 2nt+\\ +2R_1\cos nt+2R_1'\sin nt+a_0'^2C_0')\sin 2(mt+\psi_0)+b_0'^2(a_0C_2'\cos 2nt-\\ -a_0C_2\sin 2nt-a_0'^2\varepsilon_1'\cos nt+a_0'^2\varepsilon_1\sin nt)\cos 2(mt+\psi_0)+\\ +(-\Pi_2'\cos 2nt+\Pi_2\sin 2nt-\Pi_1'\cos nt+\Pi_1\sin nt),\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\Phi_3(t)=b_0'(D_2\cos 2nt+D_2'\sin 2nt+D_1\cos nt+D_1'\sin nt+\\ +D_0)\sin(mt+\psi_0)+b_0'(E_2'\cos 2nt-E_2\sin 2nt-E_1'\cos nt+\\ +E_1\sin nt)\cos(mt+\psi_0)+\frac{a_0'^2b_0'^2}{2}(-C_2'\cos 2nt+C_2\sin 2nt-\\ -a_0\varepsilon_1'\cos nt+a_0\varepsilon_1\sin nt)\sin 2(mt+\psi_0)+\\ +\frac{a_0'^2b_0'^2}{2}(-a_0C_2\cos 2nt-a_0C_2'\sin 2nt+(1-2a_0^2)\varepsilon_1\cos nt+\\ +(1-2a_0^2)\varepsilon_1'\sin nt-a_0C_0')\cos 2(mt+\psi_0)+\\ +(G_2\cos 2nt+G_2'\sin 2nt+G_1\cos nt+G_1'\sin nt+G_0).\end{gathered} \tag{18}$$

При выводе формул (13)–(18) использована подвижная система координат, в которой $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,0,\alpha_3)$, что не ограничивает общности задачи.

3. Случай $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a}$, $a_0=0$, $m=n$, $\psi_0=0$. Положим в уравнениях (13)–(15) $\alpha_1=0$, $a_0=0$, $m=n$. Эти условия примем и в обозначениях (8)–(12), (16)–(18). Тогда уравнения (13)–(15) принимают вид

$$\dot\lambda(t)=\Phi_1(t),\quad \Phi_2(t)=0,\quad \lambda(t)=\frac{1}{n}\Phi_3. \tag{19}$$

Потребуем, чтобы уравнения из системы (19) были совместными. Тогда с помощью (16)-(18) и обозначений (8)–(12) получим

$$\begin{gathered}A_{12}=0,\quad C_{22}=C_{11},\quad B_{33}=-B_{22},\quad nB_{12}=-b_0C_{23},\\ b_0^2C_{23}=n^2A_{23},\quad n(B_{22}-B_{11})=2b_0C_{13},\quad s_2=nB_{23}+C_{23},\\ b_0(s_1-nB_{13}-c_0C_{13})+n^2(A_{22}-A_{11})=0,\\ b_0^2(C_{11}-C_{33})+n^2(A_{22}-A_{11})=0,\quad b_0n(B_{11}+B_{22})+2b_0s_3+2n^2A_{13}=0.\end{gathered} \tag{20}$$

В силу условий (20) функцию $\lambda(t)$ из (19) представим так

$$\begin{gathered}\lambda(t)=\frac{1}{n}\Big[-\frac{b_0^2}{4}C_{23}\cos 3nt-\frac{b_0^2}{4}C_{13}\sin 3nt+\Big(\frac{n^2}{2}(A_{22}-A_{11})-\\ -\frac{b_0n}{2}B_{13}-c_0b_0C_{13}\Big)\cos 2nt+b_0(c_0C_{23}-nB_{23})\sin 2nt+\\ +(c_0nB_{23}+(c_0^2+\frac{b_0^2}{4})C_{23})\cos nt+(b_0c_0(C_{11}-C_{33})-nb_0B_{33}+c_0nB_{13}-\\ -(b_0^2-c_0^2)C_{13})\sin nt-\frac{b_0s_1}{2}+n^2A_{33}-\frac{c_0}{2}(2s_3+b_0C_{13}+n(B_{11}+B_{22}))\Big].\end{gathered} \tag{21}$$

Решение уравнений (1), описывающее регулярную прецессию (4), (5), можно записать так

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\gamma} = (\sin nt, \cos nt, 0),\\ \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\gamma}\cos\varkappa - \boldsymbol{a}\sin\varkappa\sin nt - (\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\cos\varkappa\cos nt,\\ \boldsymbol{\omega} = n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\gamma}).\end{gathered}\tag{22}$$

Если гиростат движется под действием силы тяжести, то из формулы (21) вытекает, что $\lambda(t) = const$. Это значит, что аналога решения (21), (22) для классической задачи нет. Данное свойство отражено в [5].

4. Случай $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{a}$, $m = n$, $\psi_0 = 0$, $a_0 \neq 0$. При выполнении указанных условий систему уравнений (13)–(15) запишем так

$$\dot{\Phi}_3(t) - a_0'^2 n\Phi_1(t) = 0, \quad \Phi_2(t) - a_0\Phi_1(t) = 0, \quad \lambda(t) = \frac{1}{a_0'^2 n}\Phi_3(t).\tag{23}$$

Подставим функции Φ_i из (16)–(18) в первые два уравнения системы (23) и потребуем, чтобы полученные равенства были тождествами по t. Тогда получим следующие условия на параметры задачи (1):

$$\begin{gathered}A_{12} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{ij} = 0 \ (i \neq j),\\ C_{22} = C_{11}, \quad b_0^2(C_{11} - C_{33}) + n^2(A_{22} - A_{11}) = 0, \quad s_2 = n(a_0+1)B_{23},\\ b_0[s_1 - n(a_0+1)B_{13}] + n^2(a_0+1)(A_{22} - A_{11}) = 0,\\ n[(a_0+1)^2 B_{11} + a_0'^2 B_{33}] + 2a_0 s_3 = 0, \quad b_0'^2(1-a_0)[n(a_0+1)B_{11} + s_3]+\\ +a_0' b_0'(a_0+1)n^2 A_{13} - a_0 c_0 n^2 (A_{22} - A_{11}) = 0.\end{gathered}\tag{24}$$

Функцию $\lambda(t)$ определим из последнего равенство системы (23) с учетом равенств (24)

$$\begin{gathered}\lambda(t) = \frac{1}{n}\Big\{ -\frac{a_0+1}{2}[a_0 b_0' n B_{13} - n^2(A_{22} - A_{11})]\cos 2nt+\\ +\frac{a_0+1}{2} b_0' n B_{23}\sin 2nt + a_0' c_0 n B_{23}\cos nt + \frac{1}{b_0'}[a_0'^2 b_0'^2 n B_{11}+\\ +a_0' b_0' c_0 B_{13} + a_0' a_0 b_0' n A_{13} - c_0(a_0+1)n^2(A_{22} - A_{11})]\sin nt + \lambda_*\Big\},\\ \lambda_* = \frac{1}{2a_0'^2}(b_0' D_1' - b_0' E_1' + 2G_0).\end{gathered}\tag{25}$$

Таким образом, из (25) вытекает, что $\lambda(t)$ — тригонометрический многочлен второго порядка. Это свойство отличает функцию $\lambda(t)$ из (21).

Запишем решение в исследуемом варианте

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\gamma} = (a_0'\sin nt, a_0'\cos nt, a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\gamma}),\\ \boldsymbol{\nu} = (c_0 + a_0 b_0'\sin nt)\boldsymbol{\gamma} - b_0'\boldsymbol{a}\sin nt - b_0'(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\cos nt.\end{gathered}\tag{26}$$

Рассмотрим классический случай, то есть положим в равенствах (24), (25) $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ $(i,j = \overline{1,3})$. Тогда получим: $A_{22} = A_{11}$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$,

$A_{13} = 0$, $\lambda(t) = const$. Это значит, что аналог решения (25), (26) в классической задаче отсутствует. Этот факт согласуется с результатом [5].

5. Случай $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{a}$, $m = 2n$, $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Положим в уравнениях (13)–(15) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $m = 2n$, $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Тогда можно показать, что при выполнении условий

$$\begin{gathered} C_{33} = C_{22} = C_{11}, \quad B_{22} = B_{11}, \quad A_{ij} = 0 \ (i \neq j), \\ B_{ij} = 0 \ (i \neq j), \quad C_{ij} = 0 \ (i \neq j), \quad s_2 = s_1 = 0, \\ b_0'[n(1+2a_0)B_{11} + s_3] + 2n^2(a_0+1)(A_{22} - A_{11}) = 0, \\ a_0'^2 b_0'(B_{33} + B_{11}) - 2a_0(a_0+1)n(A_{22} - A_{11}) = 0, \end{gathered} \tag{27}$$

система (13)–(15) допускает решение

$$\lambda(t) = a_0'^2[b_0' B_{11} + n(A_{22} - A_{11})] \cos 2nt. \tag{28}$$

Регулярная прецессия гиростата относительно наклонной оси описывается формулами

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\gamma} = (a_0' \sin nt, a_0' \cos nt, a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = n(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{\gamma}), \\ \boldsymbol{\nu} = (c_0 + a_0 b_0' \cos 2nt)\boldsymbol{\gamma} - b_0' \boldsymbol{a} \cos 2nt + b_0'(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{a}) \sin 2nt. \end{gathered} \tag{29}$$

Прецессия (29) имеет аналог в классической задаче о движении гиростата при $a_0 = 0$ ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$). Условия на параметр s_3 и функцию $\lambda(t)$ упрощаются

$$b_0 s_3 + 2n^2(A_{22} - A_{11}) = 0, \quad \lambda(t) = n(A_{22} - A_{11}) \cos 2nt. \tag{30}$$

Для обобщенной задачи (1) из условий (27), (28) следует, что матрицу C в первом уравнении из системы (1) можно считать нулевой. Важное свойство прецессии (29) при условиях (27) состоит в том, что $a_0 \neq 0$.

Система уравнений (13)–(15) при $\psi_0 = 0$ и $m = 2n$ допускает решение

$$\begin{gathered} \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}, \quad B_{ij} = 0, \quad C_{ij} = 0 \ (i, j = \overline{1,3}), \quad a_0 = -\frac{1}{2}, \quad A_{22} = A_{11}, \\ \lambda(t) = -n\sqrt{3}(A_{13} \sin nt + A_{23} \cos nt) + A_{11} n, \end{gathered} \tag{31}$$

которое очевидно отличается от решения (30). В случае (31) первое уравнение системы (1) можно записать в виде

$$\frac{d(A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha})}{dt} = \boldsymbol{0}. \tag{32}$$

Из (32) следует, что вектор $A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор. То есть система (1) становится системой Жуковского с переменным гиростатическим моментом. Этот вектор можно принять за вектор, сонаправленный с вектором $\boldsymbol{\nu}$. Прецессию, соответствующую случаю (31), можно интерпретировать, как движение, для которого ось, ортогональная круговому сечению эллипсоида инерции, будет составлять угол 120° с некоторой осью в пространстве.

6. Случай $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \psi_0 = 0,\ m = n$**.** Приведенные выше примеры регулярных прецессий гиростата характеризовались свойством, что вектор гиростатического момента сонаправлен с вектором, определяющим ось собственного вращения гиростата. Представляет интерес случай, когда $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a} = 0$. В уравнениях (13)–(15) положим $\psi_0 = 0,\ m = n$. Тогда из первого уравнения этой системы следует

$$\begin{gathered}\lambda(t) = \frac{1}{a_0' n \cos nt}(-T_4' \cos 4nt + T_4 \sin 4nt + T_3 \cos 3nt + T_3' \sin 3nt + \\ + T_2 \cos 2nt + T_2' \sin 2nt + T_1 \cos nt + T_1' \sin nt + T_0),\end{gathered} \tag{33}$$

где

$$\begin{gathered}T_4' = \frac{1}{4} b_0'^2 (1 + a_0)^2 C_2', \quad T_4 = \frac{1}{4} b_0'^2 (1 + a_0)^2 C_2, \\ T_3 = \frac{b_0'}{4}(a_0 + 1)(2P_2 + b_0' a_0'^2 \varepsilon_1'), \quad T_3' = \frac{b_0'}{4}(a_0 + 1)(2P_2' + b_0' a_0'^2 \varepsilon_1), \\ T_2 = -\frac{b_0'}{2}[a_0'(a_0 + 1)s_2 + a_0'^2 n \varkappa_1 + c_0(1 - 2a_0^2 - a_0)\varepsilon_1] - n^2 A_2' + \\ + n c_0 B_2' - \frac{1}{2}(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2) C_2', \\ T_2' = -\frac{b_0'}{2}[a_0'(a_0 + 1)s_1 + a_0'^2 n \varkappa_1' + c_0(1 - 2a_0^2 - a_0)\varepsilon_1'] + n^2 A_2 - \\ - n c_0 B_2 + \frac{1}{2}(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2) C_2, \\ T_1 = \frac{b_0'}{2}(1 - a_0)P_2 - b_0' Q_0 - a_0 n^2 \sigma_1' - a_0' c_0 s_1 + a_0 c_0 n \varkappa_1' - \\ - \frac{1}{4} a_0'^2 b_0'^2 (a_0 + 1)\varepsilon_1 + a_0 c_0^2 \varepsilon_1', \\ T_1' = \frac{b_0'}{2}(1 - a_0)P_2' + a_0 n^2 \sigma_1 + a_0' c_0 s_2 - a_0 c_0 n \varkappa_1 - \\ - \frac{1}{4} a_0'^2 b_0'^2 (1 - 3a_0)\varepsilon_1' + a_0 c_0^2 \varepsilon_1, \\ T_0 = \frac{1}{4}[2b_0' P_1 - 2b_0' Q_1 + b_0' C_2'(2a_0 - 1 - a_0^2)].\end{gathered} \tag{34}$$

Подстановка функции (33) в уравнение (14) и требование того, чтобы полученное равенство было тождеством для всех значений t приводит к условиям на параметры, из которых выпишем часть условий

$$C_{ij} = 0 \ (i \neq j), \quad C_{22} = C_{11}, \quad B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}. \tag{35}$$

На основании обозначений (8)–(10), (34) функция (33) примет вид

$$\lambda(t) = \frac{1}{a_0' n \cos nt}(T_2 \cos 2nt + T_2' \sin 2nt + T_1 \cos nt + T_1' \sin nt + T_0). \tag{36}$$

Здесь T_i, T_i' в силу (34), (35) имеют значения

$$\begin{gathered} T_2 = -\frac{1}{2}[b_0 a_0'((a_0+1)s_2 + a_0' n \varkappa_1) + 2n^2 A_2'], \\ T_2' = -\frac{1}{2}[b_0 a_0'((a_0+1)s_1 + a_0' n \varkappa_1') - 2n^2 A_2], \\ T_1 = -b_0' Q_0 - a_0 n^2 \sigma_1' - a_0' c_0 s_1 + a_0 c_0 n \varkappa_1', \\ T_1' = a_0 n^2 \sigma_1 + a_0' c_0 s_2 - a_0 c_0 n \varkappa_1. \end{gathered} \tag{37}$$

Поскольку $\lambda(t)$ должна быть ограниченной функцией времени, то из формулы (36) следует, что должны выполняться равенства $T_0 = T_2,\ T_1' = 0$. Тогда из (36) вытекает

$$\lambda(t) = \frac{1}{a_0' n}(2T_2' \sin nt + T_1). \tag{38}$$

Внесем функцию (38) в уравнения (14), (15) и потребуем, чтобы полученные равенства были тождествами по t. Тогда в дополнение к условиям (35) получим равенства

$$\begin{gathered} s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad B_{23} = 0, \quad s_1 = \frac{1}{3} a_0(a_0 - 1) n B_{13}, \\ (a_0+1) n B_{13} + b_0(C_{11} - C_{33}) = 0, \\ b_0[a_0 c_0 (C_{11} - C_{33}) + s_3] + n^2(a_0+1)A_{13} - c_0 s_1 = 0, \\ b_0'(a_0+1)s_1 + a_0' n^2[a_0 A_{22} - (a_0+1)A_{33}] - a_0' c_0 s_3 + \\ + a_0' c_0 n [a_0 B_{33} - (a_0+1) B_{11}] + \frac{a_0 a_0'}{2}(C_{11} - C_{33})(b_0^2 - 2c_0^2) = 0, \\ b_0 n[(a_0+1)^2 B_{11} + a_0'^2 B_{33}] - 2a_0(a_0+1)n^2 A_{13} + (a_0+1)c_0 s_1 - \\ - c_0 n^2 a_0'^2 (1 - a_0) B_{13} = 0. \end{gathered} \tag{39}$$

При выполнении условий (35), (38), (39) движение гиростата является регулярной прецессией (26).

Рассмотрим частный случай: $a_0 = 0$. Запишем в этом случае условия (35), (39)

$$\begin{gathered} s_2 = 0,\ s_1 = 0, \quad A_{12} = 0,\ A_{23} = 0, \quad B_{12} = 0,\ B_{23} = 0,\ B_{22} = B_{11}, \\ C_{ij} = 0\ (i \neq j), \quad C_{22} = C_{11}, \quad n B_{13} + b_0(C_{11} - C_{33}) = 0, \\ s_3 = -\frac{n^2}{b_0} A_{13}, \quad n(b_0 A_{33} - c_0 A_{13}) + b_0 c_0 B_{11} = 0, \\ b_0(B_{11} + B_{33}) - c_0 B_{13} = 0, \end{gathered} \tag{40}$$

где $b_0 = \sin\varkappa,\ c_0 = \cos\varkappa$. Величины T_1, T_1' из (38) упрощаются и так как $a_0' = 1$, то

$$\lambda(t) = n(A_{22} - A_{11}) \sin nt - B_{11}. \tag{41}$$

Для задачи о движении гиростата в поле силы тяжести из (40), (41) имеем

$$s_3 = -\frac{n^2}{\sin\varkappa} A_{13}, \quad \operatorname{tg}\varkappa = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad \lambda(t) = n(A_{22} - A_{11}) \sin nt. \tag{42}$$

В работе [5] условия (42) получены несколько другим способом. Интересно отметить, что значение угла $\varkappa$ между векторами совпадает со значением $\varkappa$ в решении Гриоли [15]. Но в силу условий $s_2 = 0$, $s_1 = 0$, $A_{22} - A_{11} \neq 0$ центр масс не лежит на перпендикуляре к круговому сечению эллипсоида инерции.

7. Об исследовании условий существования прецессий в общем случае. В общем случае можно исключить из уравнений (13), (14) $\dot{\lambda}(t)$

$$\lambda(t) = \frac{\alpha_3\Phi_2(t) - (\alpha_1 a_0' \sin nt + a_0\alpha_3)\Phi_1(t)}{a_0'\alpha_1[\alpha_1 a_0' m \sin nt + \alpha_3(a_0 m + n)]\cos nt}. \tag{43}$$

Второе выражение для $\lambda(t)$ найдем, подставив в левую часть равенства (14) $\alpha_3\dot{\lambda}(t)$ из уравнения (13), а $a_0'\alpha_1\dot{\lambda}(t)$ из уравнения (15)

$$\lambda(t) = \frac{(\Phi_2(t) - a_0\Phi_1(t))\cos nt - \Phi_3(t)\sin nt}{a_0'[\alpha_1(n + a_0 m) - a_0'\alpha_3 m \sin nt]}. \tag{44}$$

Приравнивая правые части равенств (43), (44), получим

$$\varphi_1(t)\Phi_1(t) + \varphi_2(t)\Phi_2(t) + \varphi_3(t)\Phi_3(t) = 0, \tag{45}$$

где

$$\begin{gathered}
\varphi_1(t) = -a_0 a_0' m \alpha_1^2 \sin^2 nt + \alpha_1\alpha_3[(a_0'^2 - a_0^2)m - a_0 n]\sin nt + a_0'(a_0\alpha_3^2 m - \alpha_1^2 n), \\
\varphi_2(t) = a_0'\alpha_1^2 m \sin^2 nt + \alpha_1\alpha_3(n + a_0 m)\sin nt - a_0' m, \\
\varphi_3(t) = \alpha_1[a_0'\alpha_1 m \sin nt + \alpha_3(a_0 m + n)]\cos nt.
\end{gathered} \tag{46}$$

Второе уравнение получим, рассмотрев уравнение, которое является линейной комбинацией соотношений (43), (44) и не содержит выражения $n + a_0 m$. Вычислим производную по времени левой части полученного уравнения в силу уравнения (13) и используем (44)

$$\begin{gathered}
a_0\Phi_1(t)[-a_0'\alpha_1 m(a_0 m + \alpha_3^2 n)\sin nt + \alpha_3(\alpha_1^2 n(n + a_0 m) + \\
+ a_0'^2 m^2)]\cos nt + a_0' m^2(\alpha_1 a_0 \sin nt - \alpha_3 a_0')\Phi_2(t)\cos nt + \\
+ a_0'\alpha_1 m(n + a_0 m \cos^2 nt)\Phi_3(t) + \alpha_1[\alpha_1(n + a_0 m) - \\
- a_0'\alpha_3 m \sin nt][(a_0'\alpha_1 + a_0\alpha_3 \sin nt)\dot{\Phi}_1(t) - \alpha_3(\Phi_2(t)\sin nt + \\
+ \Phi_3(t)\cos nt)^{\cdot}\,] = 0.
\end{gathered} \tag{47}$$

Условия существования получим, требуя, чтобы уравнения (45), (47) были тождествами по t.

В [5] даны необходимые условия существования регулярных прецессий в классической задаче. В обозначениях, принятых в данной работе, часть условий можно записать так

$$\boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{a}, \quad a_0 = 0, \quad \alpha_1 A_{12} = 0. \tag{48}$$

В обобщенной задаче (1) первые два условия из (48) могут не выполняться (см., например, условия (27), (39)). Это значит, что регулярная прецессия гиростата относительно наклонной оси в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил может существовать при более общих условиях, чем в классической задаче.

1. *Волкова О. С.* О стабилизации равномерных вращений вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховики // Труды Ин-та прикладной математики и механики. — 2007. — Т. 14. — С. 41–51.
2. *Волкова О. С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. — 2008. — Вып. 38. — С. 80–86.
3. *Волкова О. С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труды Ин-та прикладной математики и механики. — 2009. — Т. 19. — С. 30–35.
4. *Волкова О. С., Гашененко И. Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. — 2009. — Вып. 39. — С. 42–49.
5. *Волкова О. С.* Некоторые классы движений тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом. — Автореферет диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук по специальности 01.02.01 — теоретическая механика. ИПММ НАНУ. — Донецк 2010. — 19 с.
6. *Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978. — 296 с.
7. *Горр Г. В., Мазнев А. В., Щетинина Е. К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. — Донецк: ДонНУ, 2009. — 222 с.
8. *Горр Г. В., Мазнев А. В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. — Донецк: ДонНУ, 2010. — 364 с.
9. *Дружинин Э. И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. — 1999. — **63**, вып. 5. — С. 825–826.
10. *Ковалева Л. М., Позднякович Е. В.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. — 2000. — Вып. 30. — С. 100–105.
11. *Харламов П. В.* Лекции по динамике твердого тела. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та. — 1965. —221 с.
12. *Харламов П. В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. — 1972. — Вып. 4. — С. 52–73.
13. *Харламова Е. И., Мозалевская Г. В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. — Киев: Наук. думка. — 1986. — 269 с.
14. *Яхъя Х. М.* Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // Вестник Моск. ун-та. Сер. Математика и механика. — 1987. — Вып. 4. — С. 88–90.
15. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura et Appl. Ser. 4 — 1947. — V. 26, f. 3–4. — P. 271–281.
16. *Yehia H. M.* On the motion of a rigid body acted upon potential and gyroscopic forces. I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan Theor. Appl. — 1986. — V. 5, N 5. — P. 742–754.

G.V. Gorr,O.V. Maznyev

About some classes of regular precession of gyrostat with a variable gyrostatic moment in relation to a sloping ax in the generalized task of dynamics.

The new classes of regular precession of gyrostat are in-process got with a variable gyrostatic moment in the case when a corner is permanent between an own ax in a gyrostat and ax which does not coincide with the ax of symmetry of the power fields. The mechanical model of moments and forces operating on a gyrostat is described by equalizations of Kirchhofa-Poissona.

Keywords: *gyrostat, regular precession, gyrostatic moment, pendulum motions, potential and gyroscopic forces.*

Г. В. Горр, О. В. Мазнев

Про деякі класи регулярної прецесії гіростата зі змінним гіростатичним моментом відносно похилої осі в узагальненій задачі динаміки.

У роботі отримано нові класи регулярної прецесії гіростата зі змінним гіростатичним моментом, у випадку, коли є сталим кут між власною віссю в гіростаті та віссю, яка не співпадає з віссю симетрії силових полів. Механічну модель діючих на гіростат моментів та сил описано рівняннями Кірхгофа-Пуассона.

Ключові слова: *гіростат, регулярна прецесія, гіростатичний момент, потенційні та гіроскопічні сили.*

Донецкий национальный университет
maznev_av@rambler.ru

Получено 12.12.10