УДК 531.38

©2010. **Е.К.Щетинина**

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА В СЛУЧАЕ ТРЕХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ГИРОСТАТА

Рассмотрены условия существования дробно-линейного первого интеграла по компонентам единичного вектора вертикали в случае, когда дифференциальные уравнения динамики допускают три линейных инвариантных соотношения. В полном объеме исследованы данные условия, основанные на уравнениях Пуассона. Показано, что вектор угловой скорости гиростата можно представить в виде суперпозиции постоянного вектора и вектора $G\boldsymbol{\nu}$, где G – антисимметричная матрица, а $\boldsymbol{\nu}$ – вектор вертикали.

Ключевые слова: *обобщенные уравнения динамики гиростата, инвариантное соотношение, инвариантное множество, первый интеграл.*

1. Постановка задачи. Характерной особенностью многих задач динамики гиростата с неподвижной точкой является наличие в их математической модели динамических уравнений и кинематических уравнений Пуассона [1, 6, 8, 9]. В последние годы изучаются условия существования у этих уравнений первых интегралов на инвариантных множествах [2]. Методика получения условий существования первых интегралов на инвариантных множествах имеет много общих принципов с методом исследования инвариантных соотношений [5, 6, 7]. Наиболее общие дифференциальные уравнения задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, которые допускают три первых интеграла, получены в 1963 году итальянским механиком Д.Гриоли [8]. В векторном виде они таковы:

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \times a\boldsymbol{x} + \mu(a\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x}) + \frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times a\boldsymbol{\nu} + \frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times \boldsymbol{\nu}, \\ &\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор момента количества движения; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля; $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – скалярные функции компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$; $\mu(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu})$ – скалярная функция компонент вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = a\boldsymbol{x}$ и вектора $\boldsymbol{\nu}$; a – гирационный тензор; $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \nu_1}, \frac{\partial L}{\partial \nu_2}, \frac{\partial L}{\partial \nu_3}\right)$, $\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \nu_1}, \frac{\partial U}{\partial \nu_2}, \frac{\partial U}{\partial \nu_3}\right)$. Обозначим через (a_{ij}) – компоненты гирационного тензора a, тогда компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \omega_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \omega_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнения Гриоли-Пуассона (1) допускают три первых интеграла:

$$\boldsymbol{x} \cdot a\boldsymbol{x} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nu} + L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = k. \tag{3}$$

Здесь E, k – произвольные постоянные.

Пусть в уравнениях (1) и интегралах (3)

$$\mu \equiv 0, \quad L = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad U = \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}). \tag{4}$$

Тогда из (1), (3) на основе (4) получаем уравнения Кирхгофа-Пуассона

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{x} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \\ &\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{5}$$

и их первые интегралы

$$a\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \tag{6}$$

Отметим, что $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – вектор гиростатического момента; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка.

История формирования уравнений Кирхгофа и различные формы этих и обобщенных уравнений изложены в работах [1, 9].

При построении новых решений уравнений динамики возможны различные подходы. Эффективным является подход, основанный на интегрировании уравнений в случае существования дополнительных инвариантных соотношений и первых интегралов [1, 2, 5–7].

Поставим задачу об исследовании у уравнений Пуассона

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{7}$$

которые допускают первый геометрический интеграл $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$, условий существования дробно-линейного первого интеграла по переменным ν_1, ν_2, ν_3

$$\frac{\alpha_0 + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu})}{\beta_0 + (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu})} = l_0, \tag{8}$$

где l_0 – произвольная постоянная, α_0 и β_0 – фиксированные постоянные, $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ – постоянные векторы. В силу структуры интеграла (8) без ограничения общности можно считать, что $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – единичные и ортогональные векторы

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = 1, \quad |\boldsymbol{\beta}| = 1. \tag{9}$$

Вводя вместо произвольной постоянной l_0 новую произвольную постоянную τ_0 по формуле $l_0 = \operatorname{tg} \tau_0$ соотношение (8) с учетом (9) преобразуем к виду

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = n_0, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор, а $n_i (i = 1, 2, 3)$ и n_0 таковы:

$$n_i = \alpha_i \cos\tau_0 - \beta_i \sin\tau_0, \quad n_0 = \beta_0 \sin\tau_0 - \alpha_0 \cos\tau_0, \tag{11}$$

Вычислим производную от интеграла (10) в силу уравнения (7)

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\nu}) = 0. \tag{12}$$

Таким образом, в силу того, что в интеграле (8) переменные ν_1, ν_2, ν_3 принимают произвольные значения на сфере Пуассона, то соотношение (12) описывает множество в шестимерном пространстве, на котором имеет место интеграл (10).

2. Условия существования интеграла (10) в случае трех инвариантных соотношений. Для параметризации соотношения (10) и геометрического интеграла из (3) положим

$$n_1 = \sin x_0 \sin\sigma_0, \quad n_2 = \sin x_0 \cos\sigma_0, \quad n_3 = \cos x_0, \quad n_0 = \cos\varepsilon_0, \tag{13}$$

где в силу (11), (13) параметры x_0, σ_0 и ε_0 выражаются через параметр τ_0 и компоненты векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} &\cos x_0 = a_3 \cos\tau_0 - \beta_3 \sin\tau_0, && \cos\varepsilon_0 = \beta_0 \sin\tau_0 - \alpha_0 \cos\tau_0, \\ &\sin\sigma_0 = \frac{\alpha_1 \cos\tau_0 - \beta_1 \sin\tau_0}{\sin x_0}, && \cos\sigma_0 = \frac{\alpha_2 \cos\tau_0 - \beta_2 \sin\tau_0}{\sin x_0}. \end{aligned} \tag{14}$$

На основании обозначений (13) соотношение (10) примет вид

$$\nu_1 \sin x_0 \sin\sigma_0 + \nu_2 \sin x_0 \cos\sigma_0 + \nu_3 \cos x_0 = cos\varepsilon_0. \tag{15}$$

Уравнению (15) и геометрическому интегралу $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$ удовлетворим, положив

$$\begin{aligned} &\nu_1 = \sin x_0 \sin\sigma_0 \cos\varepsilon_0 + \cos\sigma_0 \sin\varepsilon_0 \cos u + \cos x_0 \sin\sigma_0 \sin\varepsilon_0 \sin u, \\ &\nu_2 = \sin x_0 \cos\sigma_0 \cos\varepsilon_0 - \sin\sigma_0 \sin\varepsilon_0 \cos u + \cos x_0 \cos\sigma_0 \sin\varepsilon_0 \sin u, \\ &\nu_3 = \cos x_0 \cos\varepsilon_0 - \sin x_0 \sin\varepsilon_0 \cos u, \end{aligned} \tag{16}$$

где u – новая вспомогательная переменная. В формулах (16) следует учитывать (14).

Интеграл (10) имеет следующую геометрическую интерпретацию: при фиксированном значении τ_0 в течение всего времени движения гиростата постоянен угол между вектором $\boldsymbol{n}$, неизменно связанным с телом, и вектором вертикали $\boldsymbol{\nu}$. Такое движение называют прецессией гиростата относительно вертикали. Поскольку конец вектора $\boldsymbol{n}$ при изменении параметра τ_0 описывает окружность с центром в неподвижной точке, лежащую в плоскости векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, то соотношение (10) описывает целое семейство прецессий гиростата, зависящее от одной произвольной постоянной [3]. Таким образом, интеграл (8) можно рассматривать не в виде (8), разрешенном относительно произвольной постоянной, а в виде равенства (10), в которое параметр τ_0 входит и в левую, и в правую части.

Если в равенствах (13), (15) предполагать параметры ε_0, σ_0 переменными и независимыми, то вектор $\boldsymbol{n}$ может и не принадлежать плоскости.

Соотношение (12) будем изучать в случае, когда система уравнений Гриоли-Пуассона (1) или уравнений Кирхгофа-Пуассона (5) допускает три линейных инвариантных соотношения:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3, \\ x_2 &= c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + bc\nu_3, \\ x_3 &= d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3, \end{aligned} \tag{17}$$

где $b_i, c_i, d_i (i = 1, 2, 3)$ – фиксированные постоянные. Пусть подвижная система координат является главной, то есть $a_{ij} = 0 (i \neq j)$ и $a_{ii} = a_i (i = \overline{1, 3})$. Тогда компоненты вектора угловой скорости таковы:

$$\omega_1 = a_1x_1, \quad \omega_2 = a_2x_2, \quad \omega_3 = a_3x_3. \tag{18}$$

Подставим величины n_i, ν_i, ω_i из равенств (13), (16), (18) (с учетом (17)) в уравнение (12)

$$\begin{aligned} &(a_2c_0 \sin\sigma_0 - a_1b_0 \cos\sigma_0) \sin u + (a_1b_0 \cos x_0 \sin\sigma_0 + a_2c_0 \cos x_0 \cos\sigma_0 - \\ &- a_3d_0 \sin x_0) \cos u + (\sin x_0 \sin\sigma_0 \cos\varepsilon_0 + \cos\sigma_0 \sin\varepsilon_0 \cos u + \\ &+ \cos x_0 \sin\sigma_0 \sin\varepsilon_0 \sin u)[(a_2c_1 \sin\sigma_0 - a_1b_1 \cos\sigma_0) \sin u + (a_1b_1 \cos x_0 \sin\sigma_0 + \\ &+ a_2c_1 \cos x_0 \cos\sigma_0 - a_3d_1 \sin x_0) \cos u] + (\sin x_0 \cos\sigma_0 \cos\varepsilon_0 - \\ &- \sin\sigma_0 \sin\varepsilon_0 \cos u + \cos x_0 \cos\sigma_0 \sin\varepsilon_0 \sin u)[(a_2c_2 \sin\sigma_0 - a_1b_2 \cos\sigma_0) \sin u + \\ &+ (a_1b_2 \cos x_0 \sin\sigma_0 + a_2c_2 \cos x_0 \cos\sigma_0 - a_3d_2 \sin x_0) \cos u) + \\ &+ (\cos x_0 \cos\varepsilon_0 - \sin x_0 \sin\varepsilon_0 \sin u)[(a_2c_3 \sin\sigma_0 - a_1b_3 \cos\sigma_0) \sin u + \\ &+ (a_1b_3 \cos x_0 \sin\sigma_0 + a_2c_3 \cos x_0 \cos\sigma_0 - a_3d_3 \sin x_0) \cos u] = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Данное равенство должно выполняться для любых значений переменной u и для любых значений параметров σ_0 и ε_0.

Потребуем, чтобы соотношение (19) было тождеством по переменной u. Тогда получим условия:

$$\begin{aligned} &\sin\varepsilon_0\{(a_2c_1 - a_1b_2) \cos x_0 + [(a_3d_2 - a_2c_3) \sin\sigma_0 - \\ &- (a_3d_1 - a_1b_3) \cos\sigma_0] \sin x_0\} = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\sin\varepsilon_0\{[(a_1b_1 - a_2c_2) \sin 2\sigma_0 + (a_2c_1 + a_1b_2) \cos 2\sigma_0] \cos x_0 + \\ &+ [(a_3d_2 + a_2c_3) \sin\sigma_0 - (a_3d_1 + a_1b_3) \cos\sigma_0] \sin x_0\} = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &\sin\varepsilon_0\{(a_2c_1 + a_1b_2) \sin\sigma_0 \cos\sigma_0 - (a_1b_1 \cos^2\sigma_0 + a_2c_2 \sin^2\sigma_0) + \\ &+ a_3d_3 \sin^2 x_0 + [(a_2c_1 + a_1b_2) \sin\sigma_0 \cos\sigma_0 + a_1b_1 \sin^2\sigma_0 + a_2c_2 \cos^2\sigma_0] \times \\ &\times \cos^2 x_0 - [(a_3d_1 + a_1b_3) \sin\sigma_0 + (a_3d_2 + a_2c_3) \cos\sigma_0] \sin x_0 \cos x_0\} = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&a_2c_0\sin\sigma_0 - a_1b_0\cos\sigma_0 + (a_2c_1\sin\sigma_0 - a_1b_1\cos\sigma_0)\sin x_0\sin\sigma_0\cos\varepsilon_0+\\&+(a_2c_2\sin\sigma_0 - a_1b_2\cos\sigma_0)\sin x_0\cos\sigma_0\cos\varepsilon_0 + (a_2c_3\sin\sigma_0-\\&-a_1b_3\cos\sigma_0)\sin x_0\cos\varepsilon_0 = 0,\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}&a_1b_0\cos x_0\sin\sigma_0 + a_2c_0\cos x_0\cos\sigma_0 - a_3d_0\sin x_0 + (a_1b_1\cos x_0\sin\sigma_0+\\&+a_2c_1\cos x_0\cos\sigma_0 - a_3d_1\sin x_0)\sin x_0\sin\sigma_0\cos\varepsilon_0 + (a_1b_2\cos x_0\sin\sigma_0+\\&+a_2c_2\cos x_0\cos\sigma_0 - a_3d_2\sin x_0)\sin x_0\sin\sigma_0\cos\varepsilon_0 + (a_1b_3\cos x_0\sin\sigma_0+\\&+a_2c_3\cos x_0\cos\sigma_0 - a_3d_3\sin x_0)\cos x_0\cos\varepsilon_0 = 0.\end{aligned}\tag{24}$$

При анализе решения системы (20)–(24) возникает особый случай

$$a_2c_1 = a_1b_2,\quad a_3d_1 = a_1b_3,\quad a_3d_2 = a_2c_3,\tag{25}$$

для которого уравнение (20) становится тождеством. На основании равенств (25) уравнения (21), (22) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}&[(a_1b_1 - a_2c_2)\sin 2\sigma_0 + 2a_1b_2\cos 2\sigma_0]\cos x_0 + 2(a_2c_3\sin\sigma_0-\\&-a_1b_3\cos\sigma_0)\sin x_0 = 0,\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}&2[2a_1b_2\sin 2\sigma_0 + (a_2c_2 - a_1b_1)\cos 2\sigma_0]\cos^2 x_0 - 2(a_1b_3\sin\sigma_0+\\&+a_2c_3\cos\sigma_0)\sin 2x_0 + [2a_1b_2\sin 2\sigma_0 + (a_2c_2 - a_1b_1)\cos 2\sigma_0+\\&+(a_3d_3 - a_1b_1) + (a_3d_3 - a_2c_2)]\sin^2 x_0 = 0.\end{aligned}\tag{27}$$

Исключая из соотношений (26), (27) параметр x_0 и требуя, чтобы полученное равенство было тождеством по параметру σ_0, найдем условия $b_2 = b_3 = c_1 = c_3 = 0$, $a_1b_1 = a_2c_2 = a_3d_3$.

Тогда из уравнений (23), (24) вытекает, что $b_0 = c_0 = d_0 = 0$, то есть в силу (18) $\boldsymbol{\omega} = a_1b_1\boldsymbol{\nu}$. Подстановка этого значения $\boldsymbol{\omega}$ в уравнение Пуассона (7) приводит к выводу, что вектор $\boldsymbol{\nu}$ постоянен. Следовательно, гиростат вращается равномерно. Этот случай не представляет интереса, так как левая часть интеграла (8) вырождается в постоянную.

Пусть равенства (25) одновременно не выполняются. В этом случае на основании (13) соотношения (20)–(24) становятся тождествами по τ_0 при выполнении условий:

$$\begin{aligned}&a_2c_2 = a_1b_1,\quad a_3d_3 = a_1b_1,\quad a_2c_1 = -a_1b_2,\quad a_3d_1 = -a_1b_3,\quad a_3d_2 = -a_2c_3,\\&a_2c_3\alpha_1 - a_1b_3\alpha_2 + a_1b_2\alpha_3 = 0,\qquad a_2c_3\beta_1 - a_1b_3\beta_2 + a_1b_2\beta_3 = 0,\\&a_2c_3b_0 - a_2b_3c_0 + a_3b_2d_0 = 0,\qquad a_1b_0\alpha_2 - a_2c_0\alpha_1 - a_1b_2\alpha_0 = 0,\\&a_1b_0\beta_2 - a_2c_0\beta_1 - a_1b_2\beta_0 = 0.\end{aligned}\tag{28}$$

Для исследования системы (28) введем векторы

$$\boldsymbol{g} = (-a_2c_3, a_1b_3, -a_1b_2),\qquad \boldsymbol{m} = (a_1b_0, a_2c_0, a_3d_0).\tag{29}$$

Тогда шестое, седьмое и восьмое уравнения запишутся в виде $\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$, $\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$, $a_1(\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{m}) = 0$, то есть, если $a_1 \neq 0$, то $\boldsymbol{g} = \mu_0(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})$, где μ_0 – параметр.

Итак, на основании (28), (29) доказано следующее утверждение: если параметры $\alpha_i, \beta_i (i = 0, 1, 2, 3)$ заданы, то для существования дробно-линейного интеграла (8) в случае трех инвариантных соотношений (17) должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} &a_2c_2 = a_1b_1, \quad a_3d_3 = a_1b_1, \quad a_2c_1 = -a_1b_2, \quad a_3d_1 = -a_1b_3, \quad a_3d_2 = -a_2c_3, \\ &a_2c_3 = \mu_0(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2), \quad a_1b_3 = -\mu_0(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3), \quad a_1b_2 = \mu_0(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1), \\ &a_1b_0 = p_0\alpha_1 + q_0\beta_1, \quad a_2c_0 = p_0\alpha_2 + q_0\beta_2, \quad a_3d_0 = p_0\alpha_3 + q_0\beta_3, \end{aligned} \tag{30}$$

где $p_0 = \frac{a_1b_2\beta_0}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$, $q_0 = \frac{a_1b_2\alpha_0}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}$.
Из (18), (30) имеем

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{m} + G\boldsymbol{\nu}, \quad G = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ -a_1b_2 & a_1b_1 & a_2c_3 \\ -a_1b_3 & -a_2c_3 & a_1b_1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{m} + \boldsymbol{\nu} \times G\boldsymbol{\nu}, \tag{32}$$

то есть матрица G является антисимметричной.

Уравнение Пуассона (32) допускает два интеграла: геометрический и дробно-линейный (8). Поэтому оно интегрируется в квадратурах.

Поскольку динамические уравнения движения гиростата не рассматривались в данном исследовании, то полученные на основе анализа уравнений Пуассона и геометрического интеграла условия (30) можно назвать кинематическими условиями существования дробно-линейного интеграла (8) в случае трех линейных инвариантных соотношений. Они имеют место для любой задачи динамики, уравнения которой содержат уравнение Пуассона (7).

Как уже отмечено выше, такими уравнениями могут быть уравнения (1) с интегралами (3), уравнения (5) с интегралами (6). Примеры интегрирования уравнения Пуассона (32) рассмотрены в работе [4].

1. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296с.
2. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Об условиях существования первого интеграла уравнений Кирхгофа-Пуассона на инвариантном множестве // Механика твердого тела. – 2009. – Вып.39. – С.50-61.
3. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222с.
4. *Горр Г.В., Узбек Е.К.* Об интегрировании уравнений Пуассона в случае трех линейных инвариантных соотношений // Прикл. математика и механика. – 2002. – Т.66, вып.3. – С.418-426.
5. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т.2. – Динамика систем с конечным числом степеней свободы. – 555с.
6. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып.6. – С.15-24.
7. *Чаплыгин С.А.* О принципе последнего множителя // Собр. соч. – Т.1. – М.-Л.: Гостехиздат. – 1948. – С.5-14.
8. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. e natur. – 1963/ – 35, 1-2. – P.35-39.

9. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. // J. Theor. and Appl. Mechan. – 1986. – T.5. – №5. – P.747-762.

E.K. Schetinina

Necessary conditions of existence of linear-fractional integral in the case of three invariant relations of gyrostat's dynamic equations.

The conditions of fractional-linear first integral's existence on components of the unit vector vertically were considered in the case when the differential equations of dynamics allow three linear invariant relations. These conditions, based on the Poisson's equations, are investigated in full. It is shown that the angular velocity vector of gyrostat can be represented as a superposition of a constant vector and a vector $G\boldsymbol{\nu}$, where G - antisymmetric matrix, and $\boldsymbol{\nu}$ - vector of vertical.

Keywords: *generalized dynamic equations of gyrostat, the invariant relation, the invariant set, the first integral.*

О.К. Щетініна

Необхідні умови існування дробово-лінійного інтеграла у випадку трьох інваріантних співвідношень рівнянь динаміки гіростата.

Розглянуто умови існування дробово-лінійного першого інтеграла по компонентах одиничного вектора вертикалі у випадку, коли диференціальні рівняння динаміки припускають три лінійних інваріантних співвідношення. У повному обсязі досліджено дані умови, засновані на рівняннях Пуассона. Показано, що вектор кутової швидкості гіростата можна зобразити у вигляді суперпозиції постійного вектора і вектора $G\boldsymbol{\nu}$, де G - антисиметрична матриця, а $\boldsymbol{\nu}$ - вектор вертикалі.

Ключові слова: *узагальнені рівняння динаміки гіростата, інваріантне співвідношення, інваріантна множина, перший інтеграл.*

Донецкий национальный ун-т экономики и торговли им. М.Туган-Барановского
elenaschetinina@mail.ru

Получено 27.05.2010