УДК 512.542+512.547.2

©2010. **В.В. Штепин , В.А. Беликова**

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

В работе вводится понятие геометрического графа конечной группы как полного неориентированного графа на единичной сфере в евклидовом пространстве наименьшей размерности, евклидовы расстояния между вершинами которого определяются однозначно по таблице Кэли группы. Для групп C_p и C_{2p}, где p — простое нечетное, исследуются их геометрические графы и отвечающие им геометрические линейные представления.

Ключевые слова: *циклическая группа, геометрический граф конечной группы, геометрическое представление.*

Введение. Пусть G — конечна мультипликативная группа порядка n. Пусть M — фиксированный набор образующих G. Словом назовем конечное произведение элементов M и обратных к ним элементов. Хорошо известно [1], что по группе G можно построить связный граф так, что элементам группы сопоставляются вершины графа, образующим из M–ориентированные ребра определенного цвета, словам — пути на графе.

Это определение графа группы не совсем удобно ввиду следующих причин. Граф группы строится неоднозначно и существенно зависит от выбора набора образующих M. В зависимости от выбора образующих граф группы может иметь разное количество ребер. Кроме того, до сих пор не существует алгоритма, позволяющего построить некий "стандартный" граф группы.

В настоящей работе мы вводим новое понятие "геометрического графа группы", в котором существенную роль играют расстояния между элементами группы. Эти расстояния изначально вычисляются с помощью таблиц Кэли, а затем заменяются обычными евклидовыми расстояниями путем вложения графа в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ наименьшей размерности. В отличие от графа группы геометрический граф группы строится однозначно с точностью до ортогонального преобразования пространства $\mathbb{R}^m$. Важным свойством нашего определения графа является то, что группа G естественным образом действует на множестве вершин, сопоставляя вектору x вектор $g{\cdot}x$. Мы доказываем, что полученное отображение является линейным оператором в $\mathbb{R}^m$ (и в его комплексификации $\mathbb{C}^m$) и задает линейное представление группы G. Такие представления являются новыми объектами теории представлений групп, мы называем их геометрическими представлениями. Эти представления, согласно теореме Машке [2], являются вполне приводимыми. В данной работе мы строим для циклических групп C_p и C_{2p}, где p — простое нечетное число, геометрический граф группы, доказываем его единственность с точностью до ортогонального преобразования и изучаем спектр геометрического представления этих групп, ассоциированного с графом. Отметим, что геометрическое представление всегда имеет размерность меньшую, чем размерность регулярного представления.

Определение. Геометрический граф группы G (геометрическая реализация) — граф группы G на сфере единичного радиуса в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ наименьшей размерности (обозначим его V), в котором евклидовы расстояния ρ (назовем их действительными) между элементами группы удовлетворяют соотношению

$$\rho(g_i, g_j) = \rho(g_k, g_l) \Leftrightarrow \rho'(g_i, g_j) = \rho'(g_k, g_l) \quad \forall i, j, k, l, \tag{1}$$

где ρ' — расстояния (назовем их мнимыми) между элементами группы G, вычисленные по формуле

$$\rho'(g_i, g_j) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in G} \sigma_x(g_i, g_j), & \text{при } i \neq j, \\ 0, & \text{при } i = j \end{cases} \tag{2}$$

где $\sigma_x(g_i, g_j)$ — наименьший неотрицательный показатель степени k, для которого справедливо равенство: $x^k g_i = g_j$ или, если такое k не существует, то $\sigma_x(g_i, g_j) \stackrel{def}{=} 0$. Геометрический граф группы G такой, что $|G| = n$, мы будем рассматривать как набор различных векторов $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ единичной длины в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. В дальнейшем мы будем отождествлять элементы группы G и соответствующие им векторы геометрического графа.

Определение. Две реализации G_1 и G_2 геометрического графа группы G в $\mathbb{R}^m$ назовем эквивалентными, если существует ортогональное преобразование ϑ такое, что $\vartheta G_1 = G_2$.

1. Свойства геометрического графа и геометрическое представление. В этом разделе мы изучим простейшие свойства геометрического графа.

Предложение 1.1. Для любых элементов x, y, g группы G имеет место равенство

$$\rho'(x, y) = \rho'(gx, gy). \tag{3}$$

Доказательство. Докажем сначала, что для любых $a, g, x, y \in G$ имеет место равенство

$$\sigma_a(gx, gy) = \sigma_{g^{-1}ag}(x, y). \tag{4}$$

Пусть $\sigma_a(gx, gy) = k$. Тогда

$$a^k gx = gy \Leftrightarrow g^{-1}a^k gx = y \Leftrightarrow (g^{-1}ag)^k x = y,$$

откуда имеем неравенство $\sigma_{g^{-1}ag}(x, y) \leq k$. Если предположить, что верно равенство $\sigma_{g^{-1}ag}(x, y) = l < k$, то

$$(g^{-1}ag)^l x = y \Leftrightarrow g^{-1}a^l gx = y \Leftrightarrow a^l gx = gy.$$

Получили противоречие с тем, что $\sigma_a(gx, gy) = k$. Тем самым равенство (4) доказано. Отображение $\varphi : a \mapsto g^{-1}ag$ — внутренний автоморфизм группы G. Следовательно, если a пробегает G, то $g^{-1}ag$ также пробегает G. Имеем:

$$\sum_{a\in G}\sigma_a(gx, gy) = \sum_{a\in G}\sigma_{g^{-1}ag}(x, y) = \sum_{g^{-1}ag\in G}\sigma_{g^{-1}ag}(x, y) = \sum_{b\in G}\sigma_b(x, y) = \sum_{a\in G}\sigma_a(x, y).$$

Следовательно, $\rho'(x, y) = \rho'(gx, gy)$. Предложение доказано. □

Следствие 1.1. Для любых элементов x, y, g группы G имеют место равенства $\rho(x, y) = \rho(gx, gy)$ и $(x, y) = (gx, gy)$ (здесь (x, y) — скалярное произведение векторов x и y евклидова пространства V).

Доказательство очевидно в силу определения геометрического графа группы.

Предложение 1.2. Если $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — базис евклидова пространства V, состоящий из векторов графа, то $gx_1, gx_2, \ldots, gx_m$ — тоже базис V.

Доказательство. Очевидно, что для доказательства этого предложения достаточно доказать, что $gx_1, gx_2, \ldots, gx_m$ — линейно независимы. Докажем это методом от противного.

Поскольку $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — линейно независимы (так как образуют базис), то их определитель Грама $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ отличен от нуля [3]. Поскольку $gx_1, gx_2, \ldots, gx_m$ — линейно зависимы, то их определитель Грама $G(gx_1, gx_2, \ldots, gx_m)$ равен нулю, то есть:

$$0 = G(gx_1, gx_2, \ldots, gx_m) = \begin{vmatrix} (gx_1, gy_1) & \ldots & (gx_1, gy_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (gx_m, gy_1) & \ldots & (gx_m, gy_m) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (x_1, y_1) & \ldots & (x_1, y_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_m, y_1) & \ldots & (x_m, y_m) \end{vmatrix} = G(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Полученное противоречие доказывает предложение. □

Предложение 1.3. Пусть $x \in G$ и $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$, где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — базис V, состоящий из векторов графа. Тогда $gx = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i gx_i$.

Доказательство. Умножим обе части равенства $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ скалярно на x_i $(i = 1, \ldots, m)$. Таким образом, получим относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ систему линейных неоднородных уравнений, состоящую из m уравнений. Ее определитель равен определителю Грама векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, который отличен от нуля, поскольку $x_1, x_2, \ldots, x_m$ образуют базис. Тогда по теореме Крамера [3], α_i, $i = 1, \ldots, m$ могут быть найдены по формулам

$$\alpha_i = \frac{G_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_m)},$$

где $G_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — определитель, полученный из определителя Грама $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ заменой i-ого столбца на столбец свободных членов.

По доказанному выше предложению 1.2 $gx_1, gx_2, \ldots, gx_m$ образуют базис V. Следовательно, найдутся действительные числа α_i', $i = 1, ..., m$ такие, что $gx = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i' gx_i$. Далее проводим аналогичные рассуждения. Умножим обе части этого равенства скалярно на gx_i, $i = 1, ..., m$. Получим относительно $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_m'$ систему линейных неоднородных уравнений, состоящую из m уравнений. Ее определитель равен определителю Грама векторов $gx_1, gx_2, \ldots, gx_m$ $G(gx_1, gx_2, \ldots, gx_m)$, который в силу следствия из предложения 1.1 равен определителю Грама $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, отличному от нуля. Тогда по теореме Крамера α_i', $i = 1, \ldots, m$ могут быть найдены по формулам

$$\alpha_i' = \frac{G_i(gx_1, gx_2, \ldots, gx_m)}{G(gx_1, gx_2, \ldots, gx_m)} = \frac{G_i(gx_1, gx_2, \ldots, gx_m)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \frac{G_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \alpha_i,$$

то есть $gx = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i gx_i$, что и требовалось доказать. □

Следствие 1.2. Действие g в V является линейным оператором $T(g)$.

Доказательство. Действие оператора задано на базисных векторах, а на остальные распространяется по линейности в силу предложения 1.3. □

Предложение 1.4. Отображение из G в $GL(V)$, задаваемое соответствием $g \to T(g)$, является линейным представлением группы G.

Доказательство. По доказанному следствию из предложения 1.3 оператор $T(g)$ — линейный. Следовательно, достаточно проверить условие гомомофизма, то есть, что $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$, и что $T(g)$ — невырожденный. Имеем: $T(g_1 g_2)a = g_1 g_2 a$, $T(g_1)T(g_2)a = T(g_1)(g_2 a) = g_1 g_2 a$. Следовательно, $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$.

По теореме Лагранжа $T(g)^{|G|} = T\left(g^{|G|}\right) = T(e) = E$ для любого $g \in G$, а значит, $T(g)$ — невырожденный. □

Определение. Построенное представление будем называть геометрическим представлением группы G.

Предложение 1.5. Для любого геометрического графа конечной группы G справедливо тождество

$$\sum_{x \in G} \cos \angle(e, x) = 0, \tag{5}$$

где e — вектор графа, отвечающий нейтральному элементу группы G.

Доказательство. Пусть $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Докажем от противного, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \overrightarrow{0}$. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x \neq \overrightarrow{0}$. Тогда

$$T(g)x = T(g)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = gx_1 + gx_2 + \ldots + gx_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x.$$

Следовательно, $\langle x\rangle$ — одномерное инвариантное подпространство для T. Переходя при необходимости к эквивалентной реализации, мы можем считать, что $e \in \langle x\rangle$. Тогда $T(g)e = e \ \forall g \in G$, но по определению представления T имеем $T(g)e = g$. Получили противоречие, т.к. $g \neq e$. Значит, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \overrightarrow{0}$. Тогда

$$0 = (e, \overrightarrow{0}) = \left(e, \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(e, x_i) = \sum_{i=1}^{n}\cos(e, x_i).$$

□

2. Геометрический граф группы C_p (p — простое).

В этом разделе мы опишем геометрические графы циклических групп простого порядка.

Теорема 2.1. *Геометрическим графом циклической группы C_p, где p — простое, является p–симплекс в $\mathbb{R}^{p-1}$, причем это единственная с точностью до эквивалентности реализация. Кроме того,* $\cos\angle(g_i, g_j) = -\dfrac{1}{p-1}$, *при $i \neq j$.*

Доказательство. Всякий отличный от e элемент группы C_p является ее образующим. Следовательно, уравнение $x^k g_i = g_j$ разрешимо относительно k при любых $g_i \neq g_j$ и $x \neq e$. Очевидно, что наименьшее натуральное решение k удовлетворяет неравенству $1 \leq k \leq p-1$.

Докажем методом от противного, что если $x^k g_i = g_j$, то не существует элемента $y \in C_p$ отличного от x такого, что $y^k g_i = g_j$. Действительно, если $x^k = y^k = g_j g_i^{-1}$, то $\left(xy^{-1}\right)^k = e$. Теперь, учитывая, что $1 \leq k \leq p-1$ и p — простое, получаем $xy^{-1} = e$ или $x = y$. Противоречие. Следовательно, уравнения $x^k g_i = g_j$ при различных $x \in C_p$, $x \neq e$ имеют попарно различные решения, принадлежащие $\{1, 2, \ldots, p-1\}$. Но тогда $\rho'(g_i, g_j) = \sum\limits_{x\in G} \sigma_x(g_i, g_j) = \dfrac{p(p-1)}{2}$ *для любых g_i, g_j, $i \neq j$.* В этом случае, как известно [5], геометрическим графом группы C_p будет p–симплекс в $\mathbb{R}^{p-1}$, причем это единственная с точностью до эквивалентности реализация. Координаты a_α^k вершины A_α n–симплекса в $\mathbb{R}^{p-1}$ могут быть найдены по формулам [5]:

$$\begin{cases} a_\alpha^k = -\sqrt{\dfrac{n}{k(k+1)(n-1)}}, \quad 1 \leq \alpha < k+1, \\ a_\alpha^k = \sqrt{\dfrac{kn}{(k+1)(n-1)}}, \quad \alpha = k+1, \\ a_\alpha^k = 0, \quad k+1 < \alpha \leq n. \end{cases} \tag{6}$$

Равенство для $\cos\angle(g_i, g_j)$ сразу получается из предложения 1.5. □

Определение. Характером представления $\rho : G \to GL(V)$ над полем $\mathbb{K}$ называется $\mathbb{K}$–значная функция χ_ρ на группе G, определяемая равенством $\chi_\rho(g) = tr(\rho_g)$ [4].

Предложение 2.1. Характер геометрического представления любой циклической группы C_p, где p — простое, может быть вычислен по формуле

$$\chi_g(a^k) = \begin{cases} p-1, & k=0, \\ -1, & k \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно доказательству теоремы 2.1, координаты векторов $a, a^2, \ldots, a^{p-1}$ геометрического графа группы C_p относительно стандартного базиса $\mathbb{R}^{p-1}$ образуют верхнетреугольную невырожденную матрицу. Следовательно, указанные $p-1$ векторов линейно независимы и сами могут быть приняты за базис в $\mathbb{R}^{p-1}$. Кроме того, по свойству суммы векторов геометрического графа, $\sum\limits_{k=0}^{p-1} a^k = 0$. Тогда в базисе $a, a^2, \ldots, a^{p-1}$ оператор $T(a)$ геометрического представления запишется матрицей

$$T(a) = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & \ldots & 0 & -1 \\ \hdashline & & & -1 \\ & E & & \vdots \\ & & & -1 \end{array}\right).$$

Тогда

$$T(a^k) = \left(\begin{array}{c:c:c} & -1 & \\ O & -1 & E \\ & \ldots & \\ \hdashline 0 \ \cdots \ 0 & -1 & 0 \ \cdots \ 0 \\ \hdashline & \ldots & \\ E & -1 & O \\ & -1 & \end{array}\right),$$

где единичная матрица в правом верхнем углу имеет порядок $k-1$, а в левом нижнем — $p-k-1$. Отсюда сразу имеем $tr\, T(a) = tr\, T(a^2) = \ldots = tr\, T(a^{p-1}) = 1$. Т.о., предложение 2.1 доказано. $\square$

Кратность вхождения m_i неприводимого представления T_i, соответствующего характеру χ_i, в T_G может быть вычислена по формуле $m+i = (\chi_i, \chi_G)$ [4].

Предложение 2.2. Для любой циклической группы C_p, где p — простое, справедливо равенство $T_G = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_{p-1}$, где T_i — представление, соответствующее характеру χ_i, $i = 1, ..., p-1$.

Доказательство. Для любой циклической группы C_n ее характер $\chi_l(a^k) = e^{2\pi lki/n}$. Кроме того, в случае, когда $C_n = C_p$, где p - простое,

$\chi_g(a^k) = \begin{cases} p-1, & k=0, \\ -1, & k \neq 0. \end{cases}$. Здесь χ_g - характер геометрического представления. Тогда, очевидно, выполняются равенства

$$(\chi_l, \chi_g) = \frac{1}{p}\left(p-1-\sum_{k=1}^{p-1} e^{2\pi lki/p}\right) = \frac{1}{p}\left(p-1-\left(\frac{(e^{2\pi lki/p})^p-1}{e^{2\pi lki/p}-1}-1\right)\right) = 1, l = \overline{1, p-1},$$

и $(\chi_0, \chi_G = \frac{1}{p}(p-1-(p-1)) = 0$. А значит, $T_G = T_1 \oplus T_2 \oplus ... \oplus T_{p-1}$, что и требовалось доказать. $\square$

3. Геометрический граф группы C_{2p} (p — простое нечетное).

Теорема 3.1. *Геометрическим графом циклической группы C_{2p}, где p - простое, является объединение двух центрально-симметричных p-симплексов в $\mathbb{R}^{p-1}$, причем это единственная с точностью до эквивалентности реализация.*

Доказательство. Очевидно $dimV \geq p-1$, т.к. $C_{2p} \supset \tilde{C}_p = \{e, a^2, a^{2(p-1)}\} \cong C_p$, а граф реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{p-1}$. Найдем реализацию C_{2p} в $\mathbb{R}^{p-1}$. Для этого нам нужны будут мнимые расстояния. Проведя рассуждения, аналогичные проделанным при доказательстве теоремы 2.1, получим, что

$$\cos\angle(g_i, g_j) = \begin{cases} \cos\alpha, & g_i g_j^{-1} \notin \tilde{C}_p, g_i g_j^{-1} \neq a^p \\ \cos\beta, & g_i g_j^{-1} \in \tilde{C}_p \\ \cos\gamma, & g_i g_j^{-1} = a^p. \end{cases} \tag{7}$$

Отметим, что подматрица M_1 в матрице мнимых расстояний для группы C_{2p} , отвечающая подгруппе $\tilde{C}_p$, с точностью до пропорциональности совпадает с матрицей мнимых расстояний для группы C_p. Следовательно, применяя при необходимости ортогональное вращение, мы можем считать, что подгруппа $\tilde{C}_p$ имеет геометрическим графом p-симплекс в $\mathbb{R}^{p-1}$, вершины которого имеют координаты (6) относительно фиксированного базиса (e) . Отсюда мы сразу получаем, что $\cos\beta = -\frac{1}{p-1}$. Далее, согласно предложению 1.5, $(p-1)\cos\alpha + (p-1)\cos\beta + \cos\gamma = -1$, откуда получаем соотношение между $\cos\alpha$ и $\cos\gamma$:

$$(p-1)\cos\alpha + \cos\gamma = 0. \tag{8}$$

Оставшимся элементам $\{a, a^3, ..., a^{2p-1}\} = C_{2p} \setminus \widetilde{C}_p$ в матрице мнимых расстояний отвечает подматрица, совпадающая с M_1 , а это означает, что $C_{2p} \setminus \widetilde{C}_p$ также имеет минимальную геометрическую реализацию в виде p-симплекса в $\mathbb{R}^{p-1}$. Выясним теперь взаиморасположение симплексов $C_{2p} \setminus \widetilde{C}_p$ и $\widetilde{C}_p$.

Пусть вектор a^{p-2} имеет в базисе (e) координаты $(x_1, x_2, ..., x_{p-1})$. В этом же базисе $a^{2p-2} = (0, ..., 0, 1)$, $a^{2p-4} = \left(0, ..., 0, \frac{\sqrt{p(p-2)}}{p-1}, -\frac{1}{p-1}\right)$. Учитывая (7), имеем

$(a^{p-2}, a^{2p-2}) = \cos\gamma$, $(a^{p-2}, a^{2p-4}) = \cos\alpha$, что вместе с (8) приводит к системе

$$\begin{cases} x_{p-1} = \cos\gamma \\ \sqrt{p(p-2)}x_{p-2} - x_{p-1} = (p-1)\cos\alpha \\ (p-1)\cos\alpha + \cos\gamma = 0 \end{cases},$$

откуда $x_{p-2} = 0$.

Рассуждая индуктивно, покажем, что все остальные координаты вектора a^{p-2} в базисе (e), кроме x_{p-1}, тоже равны 0. Предположение индукции: пусть $x_{k+1} = x_{k+2} = ... = xp - 2 = 0$. Покажем, что $x_k = 0$. Согласно (6), вектор $a^{2k+2} \in \widetilde{C}_p$ в базисе (e) имеет координаты

$$\left(\underbrace{0, ..., 0}_{k-1}, \sqrt{\frac{kp}{(p-1)(k+1)}}, -\sqrt{\frac{p}{(p-1)(k+1)(k+2)}}, ..., -\sqrt{\frac{p}{(p-1)^2 p}}\right).$$

Равенство $(a^{p-2}, a^{2k+2}) = \cos\alpha$, учитывая предположение индукции, дает равенство

$$\sqrt{\frac{kp}{(p-1)(k+1)}}x_k - \sqrt{\frac{p}{(p-1)^2 p}}x_{p-1} = \cos\alpha,$$

откуда сразу получаем $x_k = 0$.

Согласно индуктивному доказательству, имеем теперь $a^{p-2} = (0, ..., 0, \cos\gamma)$. Но так как длина любого вектора графа группы равна 1, то $\cos\gamma = \pm 1$. Откуда $\cos\gamma = -1$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{p-1}$, $\cos\alpha = \frac{1}{p-1}$, т.к. $\cos\gamma \neq 1$. Согласно формуле (6), векторы a, a^3, $\ldots$, a^{2p-1} симплекса $C_{2p} \setminus \widetilde{C}_p$ получаются из векторов e, a^2, ..., a^{2p-2} симплекса $\widetilde{C}_p$ умножением на (-1). Следовательно, эти симплексы центрально симметричны. $\square$

Предложение 3.1. Характер геометрического представления любой циклической группы C_{2p}, где p- простое нечетное число, может быть вычислен по формуле

$$\chi_g(a^k) = \begin{cases} p-1, k = 0 \\ -(p-1), k = p \\ 1, k = 2l-1, k \neq p \\ -1, k = 2l, l > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку $-a^{p+2k} = a^{2k} = a_p^k$, где a_p^k - элемент a^k группы C_p, причем графы групп C_{2p} и C_p реализуются в одном и том же пространстве, то понятно, что верны равенства $-T(a^{p+2k}) = T(a^{2k}) = T(a_p^k)$. А отсюда как раз и следует доказываемое равенство. $\square$

Предложение 3.2. Для любой циклической группы C_{2p}, где p- простое нечетное число, справедливо равенство

$T_g = T_1 \oplus T_3 \oplus ... \oplus T_{p-2} \oplus \widehat{T}_p \oplus T_{p+2} \oplus ... \oplus T_{2p-1}$,
где T_{2i-1} - представление, соответствующее характеру χ_{2i-1}, $i = \overline{1,p}$, $i \neq \frac{p+1}{2}$.

Доказательство. Для любой циклической группы C_n $\chi_l(a^k) = e^{2\pi lki/n}$. Кроме того, в случае, когда $n = 2p$, где p - простое нечетное число, верно равенство (9).

$(\chi_0, \chi_g) = 0$, $(\chi_p, \chi_g) = 0$,

$$(\chi_l, \chi_g) = \frac{1}{2p}\left(p - 1 - (p-1)e^{\pi li} + \sum_{s=1}^{p} e^{\pi l(2s-1)i/p} - e^{\pi li} - \sum_{s=1}^{p-1} e^{2\pi lsi/p}\right) =$$

$$= \frac{1}{2p}\left(p - 1 - p(-1)^l + (e^{-\pi li/p} - 1)\left(\frac{e^{2\pi li} - 1}{e^{2\pi li/p} - 1} - 1\right) + e^{-\pi li/p}\right) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^l),$$ при $l \neq p$.

Т.о., $(\chi_l, \chi_g) = \begin{cases} 0, l = 2k, \\ 0, l = p, \\ 1, l = 2k - 1 \neq p, \end{cases}$,

откуда и следует справедливость доказываемого равенства. □

Заключение. В работе вводятся новые понятия: геометрического графа и геометрического представления конечной группы. Геометрический граф группы определен с точностью до ортогонального вращения соответствующего евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, а геометрическое представление - с точностью до изоморфизма. В отличие от обычного графа группы, геометрический граф является полным, то есть любые две его вершины соединены ребром, причем длины ребер определены однозначно, так как они отражают свойства симметрии самой группы G. Таким образом, геометрический граф лишен недостатков, присущих обычному графу группы (прежде всего - неоднозначности построения).

Основной целью работы являлось построение геометрического графа групп C_p и C_{2p}, где $2 < p$ - простое число. Для этих групп размерность геометрического представления оказалась равной $\dim(V) = \varphi(|G|)$, где φ - функция Эйлера. Однако предположение, что это равенство справедливо для геометрического представления любой конечной группы, неверно. Для циклической группы восьмого порядка C_8, можно проверить, $\dim V = 5$, в то время как $\varphi(|C_8|) = \varphi(8) = 4$. Вместе с тем векторы любого геометрического графа удовлетворяют тождеству $\sum\limits_{x \in G} \cos\angle(e, x) = 0$, где e - вектор графа, отвечающий нейтральному элементу G. Отметим, что тождество равносильно тому, что $\sum\limits_{x \in G} x = \overline{0}$. Аналогичное свойство выполняется для векторов, соединяющих центр правильного многогранника с его вершинами, а также для системы корней всякой простой комплексной алгебры Ли. С другой стороны, выпуклая оболочка геометрического графа конечной группы не обязана быть правильным многогранником (хотя это так, например, для группы C_p), так как ее ребра могут быть разной длины, и геометрический граф не обязан быть системой корней простой алгебры Ли, так как большая часть систем корней состоит из корней разной длины.

Для рассмотренных в работе циклических групп найдены разложения геометрических представлений в сумму неприводимых. Большой интерес представляет изучение геометрических представлений неабелевых групп и описание их спектров.

1. *Гроссман И., Магнус В.* Группы и их графы.- М.:Мир, 1971.
2. *Винберг Э.Б.* Линейные представления групп. — М.:Мир, 1970.
3. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: учебник для вузов. — М.: Физико-математическая литература, 2000.
4. *Серр Ж.–П.* Линейные представления конечных групп. — М.: Наука, 1985.
5. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1966.

V.V. Shtepin, V.A. Belikova

About geometric representations of the cyclic groups

We introduce the notion the geometric graph of the finite group as a complete non oriented graph on the unit sphere in Euclidean space of the smallest dimension. The Euclidean distances between vertexes of the geometric graph are defined uniquely by the Caley table of the group. We study geometric graphs and linear representations corresponding to them for the groups C_p and C_{2p} , where p is the odd prime number.

Keywords: *cyclic group, geometric graph of the finite group, geometric representation.*

В.В. Штепін, В.О. Бєлікова

Про геометричні зображення циклічних груп

У роботі вводяться поняття геометричного графа скінченної групи як повного неорієнтованого графа на одиничній сфері в евклідовому просторі найменшої вимірності, евклідові відстані між вершинами якого визначаються однозначно за таблицею Келі групи. Для груп C_p і C_{2p} , де p - просте непарне число, досліджуються їх геометричні графи й відповідаючі їм геометричні лінійні зображення.

Ключові слова: *циклічна група, геометричний граф скінченної групи, геометричне зображення.*

Донецкий национальный университет
vadim-shtepin@rambler.ru

Получено 30.03.2010