УДК 517.98

©2010. **Ф.С. Стонякин**

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ДАНЖУА-ЮНГ-САКСА О КОНТИНГЕНЦИИ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВА ФРЕШЕ И ОДНО ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ В ТЕОРИИ ВЕКТОРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В работе получен аналог известной теоремы Данжуа-Юнг-Сакса о контингенции для отображений отрезка вещественной оси в пространства Фреше. Доказана новая теорема о представимости обобщённо абсолютно непрерывных отображений в виде узкого интеграла Данжуа-Бохнера.

Ключевые слова: *теорема Данжуа-Юнг-Сакса о контингенции, пространство Фреше, локально выпуклое пространство, σ-абсолютно непрерывное отображение, компактный субдифференциал, узкий интеграл Данжуа-Бохнера.*

Введение. Хорошо известен следующий результат [1], который является следствием теоремы Данжуа-Юнг-Сакса о контингенции [2, 3], описывающей поведение производных чисел любой вещественной функции $f : [a; b] \to \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Для почти всех $x \in [a; b]$ либо f дифференцируема в точке x, либо существует бесконечное производное число f в точке x.*

Как отмечено в [4], для отображений в нормируемые пространства данный результат имеет место для *метрических производных чисел* (предельных точек отношения $\frac{\|f(x+t)-f(x)\|}{t}$ при $t \to 0$).

В настоящей работе получено обобщение теоремы 1 на случай почти всюду сепарабельнозначного отображения вещественного отрезка в пространство Фреше для обычных производных чисел (предельных точек отношения $\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ при $t \to 0$ в топологии соответствующего пространства Фреше) (теорема 3). На базе теоремы 3 доказан новый результат о представимости (сильно) обобщённо абсолютно непрерывных (далее — σ-абсолютно непрерывных) отображений вещественного отрезка в вещественное отделимое локально выпуклое пространство (ЛВП) в виде узкого интеграла Данжуа-Бохнера (теорема 6).

1. Аналог теоремы Данжуа о контингенции. Мы будем рассматривать отображения $F : [a; b] \to E$, где E — пространство Фреше с определяющей системой полунорм $\{\| \cdot \|_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Под почти всюду сепарабельнозначным отображением мы понимаем такое отображение F, что для некоторого множества e нулевой меры (здесь мы имеем в виду классическую меру Лебега на прямой) множество $F([a; b]\backslash e)$ содержится в замкнутом сепарабельном подпространстве $E_0 \subset E$. Напомним [5], что в банаховом случае почти всюду сепарабельнозначность является необходимым условием интегрируемости по Бохнеру. Условимся обозначать через $\widehat{\partial} F(x)$ любое производное число отображения F в точке $x \in [a; b]$ (т.е. $\widehat{\partial} F(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{F(x+h_k)-F(x)}{h_k}$ для некоторой числовой последовательности $h_k \to 0$; в частности, $\widehat{\partial} F(x) = \infty$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\|F(x+h_k)-F(x)\|_j}{h_k} = \infty$ для любого $j \in \mathbb{N}$), через m и m^* — классическую меру

Лебега на прямой и соответствующую внешнюю меру. Напомним некоторые определения и один результат из [3].

Определение 1. Пусть задана произвольная точка $x \in \mathbb{R}$ и множество $G \subset \mathbb{R}$. Если существует предел

$$d(x, G) = \lim_{l=(\widetilde{a};\widetilde{b})\to x} \frac{m^*(l \bigcap E)}{ml} \ ,$$

то он называется *внешней плотностью множества* G *в точке* x.

Определение 2. Если $d(x, G) = 1$ то точка x называется *точкой внешней плотности множества* G.

Теорема 2. *Для любого множества* G *почти все его точки являются точками внешней плотности* G.

Переходим к основному результату данного пункта. Мы отправляемся от доказательства классической теоремы Данжуа-Юнг-Сакса в [3].

Теорема 3. *Пусть* $F : [a; b] \to E$ *почти всюду сепарабельнозначно на* $[a; b]$. *Тогда для почти всех* $x \in [a; b]$ *выполняется одно из следующих условий:*

(i) *существует производное число* $\widehat{\partial} F(x) = \infty$;

(ii) *для некоторой числовой последовательности* $h_k \to 0$ *последовательность* $\frac{\triangle F(x,h_k)}{h_k}$ *не содержит сходящейся подпоследовательности;*

(iii) *все производные числа* F *в точке* x *конечны и совпадают, т.е. существует производная* $F'(x)$.

Доказательство. Так как отображение F почти всюду сепарабельнозначно, то почти все значения F на $[a; b]$ содержатся в некотором замкнутом сепарабельном подпространстве $E_0 \subset E$. Отсюда следует, что в E_0 содержатся как все дроби $\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}$ $(x_1, x_2 \in [a; b])$, так и все производные числа $\widehat{\partial} F(x)$ $(x \in [a; b])$ в случае, если они существуют и конечны.

Обозначим через Λ произвольное счётное всюду плотное подмножество E_0, а через T — множество всех точек $x \in [a; b]$, в которых не выполняется ни одно из условий (i) — (iii) доказываемой теоремы. Предположим, что $m^*T > 0$.

Для произвольного $x \in T$ найдутся $p, q \in \Lambda$, рациональное число r, а также натуральные числа s, n и j, при которых

1) $\widehat{\partial}^1 F(x) \in B_r^j(p)$, $\widehat{\partial}^2 F(x) \in B_r^j(q)$, где $\widehat{\partial}^1 F(x)$ и $\widehat{\partial}^2 F(x)$ являются некоторыми производными числами отображения F в точке x, а $B_r^j(z) = \{\widetilde{z} \in E \mid \|\widetilde{z} - z\|_j < < r\}$, $B_r^j(p) \bigcap B_r^j(q) = \varnothing$;

2) если $x - 1/n < x' < x + 1/n$, то

$$\frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \in B_s^j(\vartheta) \quad (\vartheta \text{ — нуль в } E) \ .$$

Обозначим через $T(p,q,r,s,n,j)$ множество всех $x \in T$, удовлетворяющих условиям 1) и 2) при фиксированных p,q,r,s,n,j. Поскольку как множество Λ, так и множества рациональных и натуральных чисел счётны, то система $\{T(p,q,r,s,n,j)\}$ также состоит из счётного числа множеств. Так как эта система покрывает T, то существует некоторое множество $H = T(p,q,r,s,n,j)$ с положительной внешней мерой $m^*H > 0$. Следовательно, по теореме 2, H имеет точки внешней плотности. Это означает, что мы можем окружить одну из них интервалом $\overline{\ell} = (\overline{a}, \overline{b})$ с условиями $\overline{a}$, $\overline{b} \in H$, $m\overline{\ell} < \frac{1}{n}$, $m^*(\overline{\ell} \bigcap H) > (1-\delta)m\overline{\ell}$, где $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

Пусть $\widetilde{E}$ — множество точек внешней плотности множества $\overline{\ell} \bigcap H$, которые принадлежат $\overline{\ell} \bigcap H$. Тогда $m^*\widetilde{E} = m^*(\overline{\ell} \bigcap H)$ и к каждой точке $x \in \widetilde{E}$ сходятся две последовательности (для определённости, справа) $x'_l \to x+0$ и $x''_l \to x+0$ точек из $\widetilde{E}$, для которых

$$\frac{F(x'_l)-F(x)}{x'_l - x} \in B^j_r(p)\ , \quad \frac{F(x''_l)-F(x)}{x''_l - x} \in B^j_r(q) \quad (l = 1,2,...)\ .$$

Система отрезков $S' = \{[x; x'_l]\}$, взятых для всех $x \in E$ и $l = 1,2,3,...$, образует покрытие множества E по Витали. Поэтому по теореме Витали [3] из неё можно выбрать конечное число отрезков $d'_k = [a'_k; b'_k]$ с суммой длин $\sum md'_k > (1-2\delta)m\overline{\ell}$.

Аналогично из $S'' = \{[x; x''_l]\}$ можно выбрать конечное число отрезков $d''_k = [a''_k; b''_k]$ с суммой длин $\sum md''_k > (1-2\delta)m\overline{\ell}$.

Чтобы привести к противоречию допущение $m^*H > 0$, подсчитаем двумя способами разность $F(\overline{b}) - F(\overline{a})$.

1°) Интервал $\overline{\ell} = (\overline{a}; \overline{b})$ разобъём на конечное число отрезков $d'_k = [a'_k; b'_k]$ и конечное число оставшихся интервалов $\triangle'_k = (u'_k; v'_k)$. Отрезок d'_k есть некоторое множество вида $[x; x'_l]$. Для него

$$\frac{F(b'_k)-F(a'_k)}{b'_k - a'_k} \in B^j_r(p) \quad \text{и} \quad F(b'_k)-F(a'_k) \in B^j_r(p)\cdot md'_k\ .$$

Суммируя по всем d'_k, получаем

$$\sum [F(b'_k)-F(a'_k)] \in B^j_r(p)\cdot \sum md'_k\ . \tag{1}$$

У интервала $\triangle'_k = (u'_k, v'_k)$ оба конца u'_k, $v'_k \in H$, причём $v'_k - u'_k < \frac{1}{n}$. Поэтому

$$\frac{F(v'_k)-F(u'_k)}{v'_k - u'_k} \in B^j_s(\vartheta) \quad \text{и} \quad F(v'_k)-F(u'_k) \in B^j_s(\vartheta)\cdot m\triangle'_k\ .$$

Суммарно по всем $\triangle'_k$ будет

$$\sum [F(v'_k)-F(u'_k)] \in B^j_s(\vartheta)\cdot \sum m\triangle'_k\ . \tag{2}$$

Разность $F(\overline{b}) - F(\overline{a})$ складывается из сумм (1) и (2). Следовательно,

$$F(\overline{b}) - F(\overline{a}) \in B^j_r(p)\cdot \sum md'_k + B^j_s(\vartheta)\cdot \sum m\triangle'_k\ . \tag{3}$$

Подставляя в (3) тождество $\sum md'_k = m\overline{\ell} - \sum m\triangle'_k$ и неравенство $\sum m\triangle'_k < < 2\delta m\overline{\ell}$, получаем

$$F(\overline{b}) - F(\overline{a}) \in B^j_r(p) \cdot m\overline{\ell} + (B^j_s(\vartheta) - B^j_r(p)) \cdot \sum m\triangle'_k \subset$$

$$\subset B^j_r(p) \cdot m\overline{\ell} + (B^j_s(\vartheta) - B^j_{s+2r}(\vartheta)) \cdot \sum m\triangle'_k = B^j_r(p) \cdot m\overline{\ell} +$$

$$+ B^j_{2s+2r}(\vartheta) \cdot \sum m\triangle'_k \subset B^j_r(p) \cdot m\overline{\ell} + 2\delta B^j_{2s+2r}(\vartheta) \cdot m\overline{\ell} \ ,$$

в силу выпуклости $B^j_r(p)$ и $B^j_{2s+2r}(\vartheta)$.

Но $\delta > 0$ выбиралось после того, как p, q, r, s, n и j были зафиксированы. Поэтому для достаточно малых $\delta > 0$ будет

$$\frac{F(\overline{b}) - F(\overline{a})}{m\overline{\ell}} \in B^j_r(p) \ . \tag{4}$$

2°) Разбивая интервал $\overline{\ell} = (\overline{a}, \overline{b})$ на конечное число отрезков $d''_k = [a''_k; b''_k]$ и конечное число оставшихся интервалов $\triangle''_k = (u''_k; v''_k)$, по схеме пункта 1°), аналогично получаем

$$\frac{F(\overline{b}) - F(\overline{a})}{m\overline{\ell}} \in B^j_r(q) \ . \tag{5}$$

Остаётся лишь заметить, что оценки (4) и (5) несовместны ввиду условия $B^j_r(p) \bigcap B^j_r(q) = \varnothing$. $\square$

Замечание 1. Условие (ii) теоремы 3 характерно только для отображений в бесконечномерные пространства. В конечномерных пространствах любая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность (пусть к ∞). Что же касается бесконечномерного случая, то существуют банаховозначные отображения, для которых условие (ii) теоремы 3 выполняется всюду на области определения. Приведём пример такого отображения, которое рассматривалось в [5] как пример липшицева отображения, нигде не имеющего производной.

Пример. Пусть $\mathcal{L}_1(I)$ — пространство вещественных измеримых по Лебегу функций $x = \xi(t)$, заданных на $I = [0; 1]$ с нормой $\|x\| = \int\limits_0^1 |\xi(t)| dt$. Рассмотрим отображение $y(\cdot) : I = [0; 1] \to \mathcal{L}_1(I)$, определяемое равенствами

$$y(s)(t) = 1 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant s \ , \quad y(s)(t) = 0 \quad \text{для} \quad s \leqslant t \leqslant 1 \ .$$

Предположим, что существует точка $s_0 \in I$ и некоторая числовая последовательность $h_k \searrow 0$ такие, что соответствующая последовательность

$$\widetilde{y}_k = \frac{y(s_0 + h_k) - y(s_0)}{h_k} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

сходится в $\mathcal{L}_1(I)$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geqslant k_0 : \quad \|\widetilde{y}_k - \widetilde{y}_{k_0}\| < \varepsilon \ . \tag{6}$$

Поскольку

$$\frac{y(s+h)-y(s)}{h}(t)=\begin{cases}\frac{1}{h}\ ,\ \text{для } s\leqslant t\leqslant s+h\ ,\\ 0\ ,\ \text{в противном случае}\ \ ,\end{cases}$$

то мы имеем

$$\|\widetilde{y}_k-\widetilde{y}_{k_0}\|=\left\|\frac{y(s_0+h_k)-y(s_0)}{h_k}-\frac{y(s_0+h_{k_0})-y(s_0)}{h_{k_0}}\right\|=$$

$$=\int\limits_0^1\left|\left(\frac{y(s_0+h_k)-y(s_0)}{h_k}-\frac{y(s_0+h_{k_0})-y(s_0)}{h_{k_0}}\right)(t)\right|dt=$$

$$=\int\limits_{s_0}^{s_0+h_k}\left|\frac{1}{h_k}-\frac{1}{h_{k_0}}\right|dt+\int\limits_{s_0}^{s_0+h_{k_0}}\frac{dt}{h_{k_0}}=h_k\cdot\left(\frac{1}{h_k}-\frac{1}{h_{k_0}}\right)+$$

$$+\frac{h_{k_0}-h_k}{h_{k_0}}=2-2\frac{h_k}{h_{k_0}}\to 2 \text{ при } k\to\infty\ ,$$

что противоречит (6) при $\varepsilon<2$, то есть условие (ii) теоремы 3 выполняется всюду на I.

2. Компактные субдифференциалы отображений в ЛВП. В данном пункте мы рассмотрим определение изучавшегося ранее (см. [6] — [9]) компактного субдифференциала, которое потребуется нам в дальнейшем. Обозначим через $U(0)$ произвольную замкнутую абсолютно выпуклую окрестность нуля в вещественном отделимом локально выпуклом пространстве (ЛВП) E.

Определение 3. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложениям при $\delta\to+0$ система замкнутых выпуклых подмножеств отделимого вещественного ЛВП $E,\ B\subset E$. Будем говорить, что множество $B=\bigcap\limits_{\delta\to+0}B_\delta$ есть K-*предел* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta\to+0: B=K-\lim\limits_{\delta\to+0}B_\delta$, если:

$$\forall U=U(0)\subset E\ \exists\delta=\delta_U>0:\ (0<\delta<\delta_U)\Rightarrow(B_\delta\subset B+U(0))\ .$$

Из определения 3 вытекает замкнутость и выпуклость множества B. Далее будем обозначать через $I\subset\mathbb{R}$ — некоторый отрезок, E — произвольное вещественное отделимое ЛВП, $\overline{conv}A$ — выпуклую замкнутую оболочку множества A и рассматривать отображения $F:I\to E$.

Определение 4. Пусть $x\in I,\ \delta>0$. *Частный K-субдифференциал* отображения F в точке x_0, отвечающий данному $\delta>0$, есть замкнутое выпуклое множество

$$\partial_K F(x_0,\delta)=\overline{conv}\left\{\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\ \middle|\ 0<|\,h\,|<\delta\right\}\ .$$

Определение 5. Назовём отображение $F : I \to E$ *компактно субдифференцируемым* или *K-субдифференцируемым* в точке $x_0 \in I$, если существует K-предел частных K-субдифференциалов $\partial_K F(x_0) = K - \lim\limits_{\delta \to +0} \partial_K F(x_0, \delta)$. Полученное множество $\partial_K F(x_0)$ назовём *компактным субдифференциалом*, или *K-субдифференциалом* отображения F в точке x_0.

Если отображение F дифференцируемо в точке x_0 в обычном смысле, то оно является компактно субдифференцируемым, причём $\partial_K F(x_0) = F'(x_0)$. В то же время, как показано в [7], существуют компактно субдифференцируемые отображения, не имеющие обычной производной.

Из теоремы 3 вытекает важное следствие, которое будет использовано далее.

Теорема 4. *Если E — пространство Фреше, а отображение $F : [a;b] \to E$ почти всюду сепарабельнозначно и K-субдифференцируемо на $[a;b]$, то оно почти всюду дифференцируемо на $[a;b]$.*

Доказательство. Легко видеть, что в любой точке компактной субдифференцируемости множество предельных точек $\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ при $t \to 0$ конечно. Следовательно, по теореме 3, это множество одноточечно почти всюду на $[a;b]$, откуда и вытекает справедливость доказываемого утверждения. $\square$

3. Теорема о представимости σ-абсолютно непрерывных отображений в виде интеграла Данжуа-Бохнера. В работе [9] для отображений $F : I = [a;b] \to E$, где E — произвольное вещественное отделимое локально выпуклое пространство, получен следующий результат о представимости (сильно) абсолютно непрерывных отображений в виде неопределённого интеграла Бохнера. Напомним вначале, что селектором многозначного отображения $\Phi : A \to 2^E$ $(A \subset \mathbb{R})$ называется произвольное отображение $\widehat{\Phi} : A \to E$ такое, что $\widehat{\Phi}(x) \in \Phi(x)$ для всех $x \in A$.

Теорема 5. *Пусть $F : I = [a;b] \to E$ абсолютно непрерывно и почти всюду компактно субдифференцируемо на $[a;b]$. Тогда любой селектор $\widehat{\partial}_K F \in \partial_K F$ интегрируем по Бохнеру на I и верно равенство*

$$F(x) = F(a) + (B)\int\limits_a^x \widehat{\partial}_K F(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b) \ .$$

Замечание 2. Напомним, что интегрируемость по Бохнеру некоторого отображения в ЛВП E означает его интегрируемость во всех фактор-пространствах, построенных по ядрам определяющих полунорм локально выпуклого пространства E, пополненных относительно фактор-норм.

Замечание 3. В работе [9] также построен пример всюду компактно субдифференцируемого абсолютно непрерывного отображения, которое почти везде не имеет обычной производной. Это означает, что в условии теоремы 5 нельзя заменить компактную субдифференцируемость обычной дифференцируемостью.

В данном пункте, используя теорему 4, мы обобщим предыдущий результат на случай (сильно) σ-абсолютно непрерывных отображений. Начнём с обобщения на отображения в ЛВП понятий абсолютной непрерывности, σ-абсолютной непрерывности и интегрируемости по Данжуа-Бохнеру (в узком смысле), которые хорошо известны для банаховозначных отображений [10].

Определение 6. Отображение $F : I = [a; b] \to E$ называется *(сильно) абсолютно непрерывным на множестве* $G \subset [a; b]$, если для произвольной непрерывной полунормы $\| \cdot \|$ на E и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого набора неперекрывающихся отрезков $\{[\alpha_i; \beta_i]\}_{i=1}^{n}$, имеющих непустое пересечение с G и удовлетворяющих условию $\sum\limits_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, выполняется неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \|F(\beta_i) - F(\alpha_i)\| < \varepsilon$.

Определение 7. Отображение $F : I = [a; b] \to E$ называется *(сильно) σ-абсолютно непрерывным на множестве* $G \subset [a; b]$, если G представимо в виде счётного объединения множеств, на каждом из которых F является абсолютно непрерывным.

Замечание 4. Легко видеть, что любое абсолютно непрерывное отображение является σ-абсолютно непрерывным. Однако существуют σ-абсолютно непрерывные отображения, которые не являются абсолютно непрерывными в обычном смысле. Соответствующий пример построен в [11].

Определение 8. Пусть E — банахово пространство. Отображение $f : [a; b] \to E$ называется *интегрируемым по Данжуа-Бохнеру (в узком смысле)*, если существует почти всюду дифференцируемое (сильно) σ-абсолютно непрерывное отображение $F : I = [a; b] \to E$ такое, что $F'(t) = f(t)$ почти всюду.

Подобно интегрируемости по Бохнеру, будем определять интегрируемость по Данжуа-Бохнеру в ЛВП E как интегрируемость во всех фактор-пространствах, построенных по ядрам определяющих полунорм ЛВП E и пополненных относительно фактор-норм.

Перейдём к основному результату данного пункта.

Теорема 6. *Пусть отображение $F : [a; b] \to E$ (сильно) σ-абсолютно непрерывно и почти всюду компактно субдифференцируемо на $[a; b]$. Тогда любой селектор $\widehat{\partial}_K F \in \partial_K F$ интегрируем по Данжуа-Бохнеру на I и верно равенство*

$$F(x) = F(a) + (DB)\int\limits_{a}^{x} \widehat{\partial}_K F(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b)\ . \tag{7}$$

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала случай банахова пространства E. Непосредственно из определений 6 и 7 вытекает, что если F σ-абсолютно непрерывно, то оно непрерывно в каждой точке области определения, а следовательно, сепарабельнозначно. Далее, согласно теореме 4 почти всюду на $[a; b]$ существует производная $f(t) = F'(t)$. Положим $f(t) = \vartheta$ (ϑ — нуль в E) в точках недифференцируемости отображения F. Таким образом, для отображения $f : [a; b] \to E$ существует σ-абсолютно непрерывное отображение $F : [a; b] \to E$, удовлетворяющее условию

$f(t) = F'(t)$ для почти всех $t \in I$, откуда ввиду определения 8 и вытекает представление (7) для отображений в банаховы пространства.

2) Пусть теперь E — произвольное вещественное отделимое ЛВП. Обозначим через $\widehat{E}_j$ пополнения фактор-пространств $E_j = E/ker\|\cdot\|_j$ относительно фактор-норм $\|\cdot\|\widehat{_j} = \|\cdot\|_j$, $\varphi_j : E \to E_j$ — канонические вложения. Для каждого из отображений $F_j = \varphi_j(F) : I \to \widehat{E}_j$ выполнены условия теоремы (непосредственной проверкой можно установить, что если F К-субдифференцируемо в E, то $F_j : I \to \widehat{E}_j$ является К-субдифференцируемым в банаховом пространстве E_j). В силу пункта 1) настоящего доказательства, $\forall j \in J$ имеет место представление

$$F_j(x) = F_j(a) + (DB)\int\limits_a^x \widehat{\partial}_K F_j(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b)\ . \tag{8}$$

И, наконец, из (8) согласно определению 8 вытекает утверждение теоремы. □

Замечание 5. Как следует из замечаний 3 и 4, в условии теоремы 6 нельзя ни заменить К-субдифференцируемость обычной дифференцируемостью (в случае произвольного ЛВП), ни заменить σ-абсолютную непрерывность обычной абсолютной непрерывностью.

1. *Garg K. M.* A unified theory of bilateral derivatives.// Real Analysis Exchange. — 2002. — Vol. 27. — № 1. — P. 81 – 122.
2. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: «Факториал Пресс», 2004. — 496 с.
3. *Брудно А. Л.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1971. — 119 с.
4. *Duda J., Maleva O.* Metric derivative numbers and continuous metric differentiability via homeomorphisms.// arXiv: math/0608403v1 [math.CA], 15 Aug 2006. — P. 1 – 21.
5. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962 — 829 с.
6. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* К-субдифференциалы и К-теорема о среднем для отображений в локально выпуклые пространства.// Международная конференция, посвящённая памяти И.Г. Петровского «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы». Тезисы докладов. — М.: МГУ, 2007. — С. 220 – 221.
7. *Стонякин Ф. С.* Компактный субдифференциал вещественных функций.//Динамические системы. — 2007.— Вып. 23 — С. 99 – 112.
8. *Стонякин Ф. С.* Сравнение компактного субдифференциала с субдифференциалами Кларка, Фреше и обобщёнными дифференциалами Сассманна. // Компьютерная математика. — 2008. — № 2. — С. 50 – 56.
9. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral.// Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15. — № 1. — P. 74 – 90.
10. *Солодов А. П.* Определение типа Римана для узкого интеграла Данжуа – Бохнера .// Фундаментальная и прикладная математика. — 2001.— Т.7. — № 3. — С. 887 – 895.
11. *Bruckner A. M., Fleissner R. J., Fordan J.* The minimal integral which includeds Lebesgue integrable functions and derivatives. // Colloq. Math. — 1986.— Vol. 50. — P. 289 – 293.

F.S. Stonyakin

Analog of Denjoy-Young-Saks's theorem about contingency for mappings into Frechet spaces and one its application in vector integration theory.

In the paper an analog of well-known Denjoy-Yuong-Saks's theorem about contingency for real segment mappings into Frechet spaces is obtained. A new theorem about representation of each generalized absolutely continuous mapping as narrow Denjoy-Bochner integral is proved.

Keywords: *Denjoy-Yuong-Saks's theorem, Frechet space, locally convex space, σ-absolutely continuous mapping, compact subdifferential, narrow Denjoy-Bochner integral.*

Ф. С. Стонякін

Аналог теореми Данжуа- Юнг- Сакса про контингенцію для відображень у просторі Фреше та одне його застосування в теорії векторного інтегрування.

У роботі отримано аналог відомої теореми Данжуа-Юнг-Сакса про контингенцію для відображень відрізка дійсної вісі в просторі Фреше. Доведено нову теорему про зображуваність узагальнено абсолютно неперервних відображень у вигляді вузького інтеграла Данжуа-Бохнера.

Ключові слова: *теорема Данжуа-Юнг-Сакса про контингенцію, простір Фреше, локально опуклий простір, σ- абсолютно неперервне відображення, компактний субдиференціал, вузький інтеграл Данжуа-Бохнера.*

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь
fedyor@mail.ru

Получено 19.02.09