УДК 517.5

©2010. **В.П. Заставный**

ТЕОРЕМА НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ ЯДЕР, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ БОЛЕЕ ОБЩЕМУ УСЛОВИЮ, ЧЕМ A_n^*

Известная теорема Никольского для ядер, удовлетворяющих условию A_n^*, доказана и для ядер из более широкого класса. Приведены как известные примеры таких ядер (ядра Надя), так и новые.

Ключевые слова: *теорема Никольского, приближение классов функций.*

1. Введение. Пусть L_p – классы 2π-периодических вещественнозначных измеримых функций с конечной нормой $||f||_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}$ при $1 \le p < \infty$ и $||f||_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in [-\pi,\pi]\}$. Коэффициенты Фурье функции $\varphi \in L_1$ определяются по формуле $\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)e^{-ikt}\,dt$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть

$$\mathcal{T}_n = \left\{\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\cos kt + \beta_k\sin kt : \alpha_k,\beta_k \in \mathbb{R}\right\}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

и $H_p^0 = \{\varphi \in L_p : ||\varphi||_p \le 1\}$, $H_p^n = \left\{\varphi \in H_p^0 : \widehat{\varphi}(k) = 0\,,\ |k| \le n-1\,, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно $H_p^{s+1} \subset H_p^s$ при всех $s \in \mathbb{Z}_+$ и $H_p^n \perp \mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$.
По функции $K \in L_1$ определим класс функций $\mathbf{W}_{p,n}(K)$, $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\mathbf{W}_{p,n}(K) := \left\{f(x) = (\varphi * K)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)K(t)\,dt\ ,\ \varphi \in H_p^n\right\}\,.$$

Очевидно $\mathbf{W}_{p,s+1}(K) \subset \mathbf{W}_{p,s}(K)$ при всех $s \in \mathbb{Z}_+$. Известно, что $\mathbf{W}_{p,n}(K) \subset L_p$ при всех $1 \le p \le \infty$, а если $p = \infty$ или $K \in L_\infty$, то $\mathbf{W}_{p,n}(K) \subset C(\mathbb{R})$ (см., например, [1, Гл. 4]). Пусть

$$\psi_{r,\beta}(t) = \sum_{k\ne 0}\frac{e^{-i\beta\pi\,\mathrm{sign}\,k/2}}{|k|^r}\,e^{ikt} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^r}\ ,\ r > 0\ ,\ \beta \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

При $r = 1$ справедливо равенство (см., например, [2, гл. I])

$$\psi_{1,\beta}(t) = -2\cos\frac{\beta\pi}{2}\,\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) + \sin\frac{\beta\pi}{2}\,(\pi - t)\ ,\ 0 < t < 2\pi\,. \tag{2}$$

Известно, что $\psi_{r,\beta} \in L_1$ (см., например, [2, гл. V] или [3, гл. 7]). В этом случае получаются хорошо известные классы $\mathbf{W}_{p,n}^{r,\beta} := \mathbf{W}_{p,n}(\psi_{r,\beta})$. В частных случаях, когда $n = 1$, $\beta = r$ или $\beta = r+1$, получаются классы $W_p^r := W_{p,1}^{r,r}$ и $\widetilde{W}_p^r := W_{p,1}^{r,r+1}$.

Наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами определяется по формуле $E_n(f)_p = \inf_{T\in\mathcal{T}_n}||f - T||_p\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$

Известно, что (см., например, [1, (4.20), (4.24), (4.23)]) при $1 \le p \le \infty$ справедливы соотношения

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_{p,0}(K)} E_n(f)_p = \sup_{f \in \mathbf{W}_{p',n}(K)} ||f||_{p'} \le \frac{1}{2\pi} E_n(K)_1 \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \,, \tag{3}$$

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_{1,0}(K)} E_n(f)_1 = \sup_{f \in \mathbf{W}_{\infty,n}(K)} ||f||_{\infty} = \frac{1}{2\pi} E_n(K)_1 \ , \ n \in \mathbb{N} \,. \tag{4}$$

Определение 1. Говорят, что функция $K \in L_1$ удовлетворяет условию Никольского A_n^*, $n \in \mathbb{N}$, если существуют натуральное $n_* \ge n$ и тригонометрический полином $T^* \in \mathcal{T}_n$ такие, что для функции $\varphi_*(t) = \operatorname{sign}(K(t) - T^*(t))$ почти всюду[1] выполняется равенство $\varphi_*(t + \pi/n_*) = -\varphi_*(t)$.

Теорема 1 (Никольский (1946) [4]). *Если при некотором $n \in \mathbb{N}$ ядро $K \in L_1$ удовлетворяет условию A_n^* и полином $T^* \in \mathcal{T}_n$ из этого условия, то для всех $s = 0, 1, \ldots, n$ имеют место соотношения:*

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_{\infty,s}(K)} E_n(f)_\infty = \sup_{f \in \mathbf{W}_{\infty,n}(K)} ||f||_\infty = \frac{1}{2\pi} E_n(K)_1 = \frac{1}{2\pi} ||K - T^*||_1 \ , \tag{5}$$

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_{1,s}(K)} E_n(f)_1 = \sup_{f \in \mathbf{W}_{1,n}(K)} ||f||_1 = \frac{1}{2\pi} E_n(K)_1 = \frac{1}{2\pi} ||K - T^*||_1 \ . \tag{6}$$

Теореме Никольского предшествовали исследования Колмогорова, Фавара, Ахиезера, Крейна, Надя (более подробно см. [4]).

Определение 2. Мы говорим, что функция $K \in L_1$ удовлетворяет условию B_n^*, $n \in \mathbb{N}$, если существуют тригонометрический полином $T^* \in \mathcal{T}_n$, функция $\varphi_* \in L_\infty$ и натуральное $n_* \ge n$ такие, что почти всюду выполняются соотношения $|\varphi_*(t)| \le 1$, $\varphi_*(t)(K(t) - T^*(t)) = |K(t) - T^*(t)|$ и $\varphi_*(t + \pi/n_*) = -\varphi_*(t)$.

Если ядро K удовлетворяет A_n^* условию, то оно удовлетворяет и B_n^* условию. Обратное, вообще говоря, не верно (см. замечание 2). Отметим, что в условии B_n^*, в отличии от условия A_n^*, нам не важно на каком множестве (нулевой или положительной меры) обращается в ноль разность $K(t) - T^*(t)$. В § 2 данной работы теорема Никольского доказана для ядер, которые удовлетворяют более общему условию B_n^*. В § 3 приведены как известные примеры таких ядер (ядра Надя [4,5]), так и новые.

2. Теорема Никольского для ядер с условием B_n^*.

Лемма 1. *Пусть при некотором $n \in \mathbb{N}$ для ядра $K \in L_1$ существуют тригонометрический полином $T^* \in \mathcal{T}_n$ и функция $\varphi_* \in L_\infty$ такие, что $\varphi_* \perp \mathcal{T}_n$ и соотношения $|\varphi_*(t)| \le 1$ и $\varphi_*(t)(K(t) - T^*(t)) = |K(t) - T^*(t)|$ выполняются почти всюду на $(-\pi, \pi)$. Тогда $E_n(K)_1 = ||K - T^*||_1$.*

Доказательство вытекает из следующих очевидных соотношений, справедливых для всех тригонометрических полиномов $T \in \mathcal{T}_n$:

$$||K - T^*||_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (K(t) - T^*(t))\varphi_*(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (K(t) - T(t))\varphi_*(t)\, dt \le ||K - T||_1 \,.$$

[1] Здесь и далее под *почти всюду* мы подразумеваем почти всюду относительно меры Лебега.

То, что условия в лемме 1 являются и необходимыми для элемента наилучшего приближения, доказано в [6, Теорема 5.2.5].

Замечание 1. Пусть для ядра K выполнено условие B_n^*, а полином $T^* \in \mathcal{T}_n$, функция $\varphi_* \in L_\infty$ и натуральное $n_* \geq n$ из этого условия. Из неравенства $n_* \geq n$ и условия $\varphi_*(t+\pi/n_*) = -\varphi_*(t)$ вытекает, что функция φ_* ортогональна многочленам из $\mathcal{T}_n$. Тогда из леммы 1 вытекает равенство $E_n(K)_1 = ||K - T^*||_1$.

Пример 1. Пусть функция $K \in L_1$ при некоторых значениях $a, A \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \pi/(2n)]$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условиям: $K(t) = A$ почти всюду на $(-\pi+a, \pi+a)\backslash(a-\delta, a+\delta)$ и $K(t) \geq A$ (или $K(t) \leq A$) почти всюду на $(a-\delta, a+\delta)$. Тогда K очевидно удовлетворяет условию B_n^* с $n^* = n$, $T^* \equiv A$, $\varphi_*(t) = \operatorname{sign}(\cos n(t-a))$ (или $\varphi_*(t) = -\operatorname{sign}(\cos n(t-a))$) и, значит, $E_n(K)_1 = ||K - T^*||_1$.

В качестве простого примера рассмотрим функцию $K(t) = \chi_h(t)$, $t \in (-\pi, \pi)$, где χ_h - характеристическая функция интервала $(-h, h)$, $0 < h < \pi$. Если $0 < h \leq \pi/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$, то $E_n(K)_1 = 2h$ (см. пример 1 при $a = A = 0$, $\delta = h$). Если $0 < \pi - h \leq \pi/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$, то $E_n(K)_1 = 2(\pi - h)$ (см. пример 1 при $a = \pi$, $A = 1$, $\delta = \pi - h$). Другое доказательство этих равенств, основанное на двойственности, содержится в работе [7] (см. также [8, § 5]).

Теорема 2. *Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ для ядра $K \in L_1$ выполнено условие B_n^*, а полином $T^* \in \mathcal{T}_n$ из этого условия. Тогда для всех $s = 0, 1, \ldots, n$ справедливы равенства* (5) *и* (6).

Замечание 2. Если ядро K удовлетворяет A_n^* условию, то оно удовлетворяет и B_n^* условию. Обратное, вообще говоря, не верно. Условие A_n^* может не выполняться в случае, когда ядро $K(t)$ совпадает с полиномом наилучшего приближения в L_1 на множестве положительной меры. Например, функция $K(t) = (\alpha - |t|)_+$, $t \in (-\pi, \pi)$ при $0 < \alpha < \pi/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$, очевидно удовлетворяет условию B_n^* при $T^* = 0$, $n_* = n$ и $\varphi_*(t) = \operatorname{sign}(\cos nt)$. Если предположить, что функция $K(t)$ удовлетворяет условию A_n^* с некоторым многочленом $T_* \in \mathcal{T}_n$, то в силу теоремы Джексона о единственности многочлена наилучшего приближения в L_1 для непрерывных функций (см., например, [9], [10, § 49], [11, § 2.4]) получим, что $T_* = T^*$. Тогда функция $\operatorname{sign} K(t)$ должна быть ортогональна многочленам из $\mathcal{T}_n$, но $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} K(t)\, dt = 2\alpha \neq 0$. Поэтому функция $K(t)$ не удовлетворяет условию A_n^*. Нетрудно показать, что любое непрерывное ядро, которое удовлетворяет условию A_n^*, можно исправить на множестве положительной меры так, чтобы исправленное ядро удовлетворяло условию B_n^*, но не удовлетворяло условию A_n^*.

Доказательство теоремы 2. Пусть для ядра K выполнено условие B_n^*, а полином $T^* \in \mathcal{T}_n$, функция $\varphi_* \in L_\infty$ и натуральное $n_* \geq n$ из этого условия. В силу замечания 1 ядро K удовлетворяет условиям леммы 1 и, значит, $E_n(K)_1 = ||K - T^*||_1$. Докажем сначала равенства

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_{\infty,s}(K)} E_n(f)_\infty = \sup_{f \in \mathbf{W}_{1,n}(K)} ||f||_1 = \sup_{f \in \mathbf{W}_{\infty,n}(K)} ||f||_\infty = \frac{1}{2\pi} E_n(K)_1 \,. \tag{7}$$

Доказательство точно такое же как и соответствующее доказательство в теореме

Никольского в [1, Теорема 4.3.3]. Так как последовательность, стоящая в левой части (7) очевидно убывает по $s \in \mathbb{Z}_+$, то в силу леммы 1 и соотношений (3) при $p = \infty$ и (4) достаточно доказать неравенство

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_{\infty,n}(K)} E_n(f)_\infty \geq \frac{1}{2\pi} E_n(K)_1 \,. \tag{8}$$

Если $E_n(K)_1 = 0$, то неравенство очевидно. Поэтому считаем $E_n(K)_1 > 0$.

Берем функцию

$$f_*(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_*(t-x) K(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_*(t-x)(K(t) - T^*(t))\, dt \,. \tag{9}$$

Очевидно $f_* \in \mathbf{W}_{\infty,n}(K)$ с функцией $\varphi(t) = \varphi_*(-t) \in H_\infty^n$ и $f_* \in C(\mathbb{R})$. Кроме того, функция f_* имеет период $2\pi/n_*$ и для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения $|f_*(x)| \leq f_*(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K(t) - T^*(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi} E_n(K)_1$, $f_*(x + \pi/n_*) = -f_*(x)$. Поэтому $f_*(\pi j/n_*) = (-1)^j f_*(0) = (-1)^j ||f_*||_C$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. Таким образом, функция f_* в точках $\pi j/n_*$, $j \in \mathbb{Z}$, принимает наибольшее по абсолютной величине значение, последовательно меняя знак. Так как $n_* \geq n$, то этих точек на $[-\pi, \pi)$ не меньше $2n$ и по теореме Чебышева (см., например, [1, § 3.2] или [6, § 5.3]) $E_n(f_*)_\infty = E_n(f_*)_C = ||f_*||_C = \frac{1}{2\pi} E_n(K)_1$. Неравенство (8) доказано и, значит, доказаны равенства (7).

Далее точно так же, как и в [1, Теорема 4.3.3], можно доказать, что (см. доказательство неравенства (4.32) из [1]) $\sup_{f \in \mathbf{W}_{1,n}(K)} E_n(f)_1 \geq \frac{1}{2\pi} E_n(K)_1$. Отсюда, учитывая равенство (4), вытекает, что для всех $s = 0, 1, \ldots, n$ справедливы равенства

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_{1,s}(K)} E_n(f)_1 = \frac{1}{2\pi} E_n(K)_1 = \frac{1}{2\pi} ||K - T^*||_1 \,. \tag{10}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Если две функции $K_1, K_2 \in L_1$ совпадают почти всюду и функция K_1 при некотором $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию B_n^*, то и функция K_2, очевидно, удовлетворяет этому условию.

Исследования наилучших приближений на классах сверток тригонометрическими полиномами содержатся, например, в работах Дзядыка [12, 13], Стечкина [14], Ефимова [15], Сунь Юн-шеня [16], Стечкина и Теляковского [17], Моторного [18], Шевалдина [19], Сердюка [20], Покровского [21]. Отметим также обзор Теляковского [22], работы Бабенко и Крякина [7, 8] о приближении характеристической функции интервала. Во всех указанных работах изложена история вопроса и имеется большой список литературы по этой тематике.

3. Примеры ядер с условием B_n^*. Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ для ядра $K \in L_1$ выполнено условие B_n^* с некоторой функцией $\varphi_* \in L_\infty$ и

$$K(t) \sim \frac{\mu_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cos kt + \lambda_k \sin kt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt} \,,$$

$$\varphi_*(t) \sim \frac{\widetilde{\mu}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mu}_k \cos kt + \widetilde{\lambda}_k \sin kt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widetilde{c}_k e^{ikt}\,.$$

Тогда $\widetilde{\mu}_0 = \widetilde{c}_0 = 0$. Так как свертка $\varphi * K$, где $\varphi(t) = \varphi_*(-t)$, непрерывна на $\mathbb{R}$, то средние арифметические ее ряда Фурье сходятся к ней равномерно на $\mathbb{R}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\, E_n(K)_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_*(t-x) K(t)\, dt \bigg|_{x=0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} c_k \widetilde{c}_{-k} \left(1 - \frac{|k|}{m}\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_k \widetilde{\mu}_k + \lambda_k \widetilde{\lambda}_k}{2} \left(1 - \frac{k}{m}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k \widetilde{\mu}_k + \lambda_k \widetilde{\lambda}_k}{2}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Последнее равенство в (11) справедливо, если ряд сходится.

Замечание 4. Так как $K \in L_1$, то (см. [2, гл. II, Теорема 8.7]) сходится равномерно на $\mathbb{R}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k \sin kx - \lambda_k \cos kx)/k$. Поэтому этот ряд является рядом Фурье своей суммы $S(x) \in C(\mathbb{R})$ и, значит, при любом $n \in \mathbb{N}$ ряд Фурье функции $F(x) = \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p S(x + p\pi/n)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Ряд Фурье функции F легко вычисляется (аналогично как в [2, гл. II, § 1]). Пусть $T_n(t) = \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p e^{ip\,t}$. Тогда

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{S}(k) T_n\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{ikx} = 2n \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{S}((2p+1)n) e^{i(2p+1)nx} \\ &= 2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mu_{(2p+1)n} \sin(2p+1)nx - \lambda_{(2p+1)n} \cos(2p+1)nx}{2p+1}\,. \end{aligned}$$

Полагая $x = 0$ и $x = \pi/(2n)$, получаем сходимость двух рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{(2k+1)n}}{2k+1}\,;\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_{(2k+1)n}}{2k+1}\,.$$

Пример 2. Если для ядра $K \in L_1$ условие B_n^* выполнено с функцией

$$\varphi_*(t) = \operatorname{sign}(\sin nt) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)nt}{2k+1}\,,$$

то из теоремы 2, соотношения (11) и замечания 4 вытекает равенство

$$\sup_{f\in \mathbf{W}_{\infty,n}(K)} ||f||_\infty = \sup_{f\in \mathbf{W}_{1,n}(K)} ||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\, E_n(K)_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{(2k+1)n}}{2k+1}\,. \tag{12}$$

i) Этот случай реализуется, например, для ядер Надя [4, 5] $K \in L_1$ вида

$$K(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin kt\,, \tag{13}$$

где последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ убывает к нулю и выпукла вниз (т.е. $\lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} \geq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$). Так как $K \in L_1$, то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k/k$ (см. замечание 4 при $x = 0$). В этом случае (даже без предположения выпуклости) сумма ряда (13) $\widetilde{K} \in L_1 \bigcap C(0, 2\pi)$ и ряд (13) является рядом Фурье для $\widetilde{K}$, а частные суммы ряда (13) сходятся в L_1 к функции $\widetilde{K}$ (см., например, [3, § 7.3]). Из полноты тригонометрической системы вытекает, что $K(t) = \widetilde{K}(t)$ при почти всех $t \in (-\pi, \pi)$. В работе [5, § 2] (см. также [4, § 7]) показано, что при любом $n \in \mathbb{N}$ существует нечетный полином $T^* \in \mathcal{T}_n$ такой, что при всех $t \in (-\pi, \pi)$ выполняется неравенство $\sin nt\,(\widetilde{K}(t) - T^*(t)) \geq 0$ (приведенное в [5] доказательство этого факта для положительных λ_k верно и для неотрицательных λ_k). Поэтому для ядра $\widetilde{K}$, и, значит, для K, при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие B_n^* с функцией $\varphi_*(t) = \mathrm{sign}(\sin nt)$. В этом случае равенство (12) справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$.

ii) При $n = 1$ этот случай реализуется также и для ядер $K \in L_1$ вида (13), где $\lambda_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, а последовательность $\{k\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ убывает. Тогда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k/k$. Поэтому сумма ряда (13) $\widetilde{K} \in L_1 \bigcap C(0, 2\pi)$ и ряд (13) является рядом Фурье для $\widetilde{K}$, а частные суммы σ_m ряда (13) сходятся в L_1 к функции $\widetilde{K}$ и $K(t) = \widetilde{K}(t)$ при почти всех $t \in (-\pi, \pi)$. Кроме того $\sigma_m(t) \geq 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$ и $t \in (0, \pi)$ (см., например, [23]). Отсюда следует, что $\mathrm{sign}(\sin t)\,\widetilde{K}(t) \geq 0$ при всех $t \in (-\pi, \pi)$. Поэтому для ядра $\widetilde{K}$, и, значит, для K, выполнено условие B_1^* с функцией $\varphi_*(t) = \mathrm{sign}(\sin t)$ и $T^* = 0$. В этом случае равенство (12) справедливо при $n = 1$.

iii) При $n = 1$ этот случай реализуется также и для ядер $K = K_r \in L_1$ вида (13), где $\lambda_k = c\,(1 - \nu_k)/k^r$, $k \in \mathbb{N}$, $r = 1$ или $r \geq 2$, а $\{\nu_k\}_{k=0}^{\infty}$ такая последовательность, что ряд $\nu_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \cos kt$ является рядом Фурье функции $S \in L_1$ и $S(t) \geq 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$ и $\nu_0 \leq 1$. Так как $E_n(cK)_1 = |c| E_n(K)_1$, то для простоты рассуждений считаем $c = 1$. Пусть

$$K_r(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \nu_k}{k^r} \sin kt\,. \tag{14}$$

Если $r > 1$, то ряд (14) сходится равномерно к функции $\widetilde{K}_r \in C(\mathbb{R})$ и, значит, этот ряд является рядом Фурье своей суммы. Поэтому $K_r(t) = \widetilde{K}_r(t)$ при почти всех $t \in (-\pi, \pi)$. Пусть $r = 1$. В этом случае

$$K_1(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{k} \sin kt\,. \tag{15}$$

Первый ряд в (15) является рядом Фурье своей суммы, которая при $t \in (0, 2\pi)$ равна $(\pi - t)/2$. Второй ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции $F(t) = \int_0^t (S(x) - \nu_0/2)\,dx$ (см. [2, гл. II, Теоремы 2.5 и 8.7]) и, значит, этот ряд является рядом Фурье своей суммы $F(t)$. Поэтому сумма ряда (15) $\widetilde{K}_1 \in L_\infty \bigcap C(0, 2\pi)$, а ряд (15) является рядом Фурье для $\widetilde{K}_1$ и, значит, $K_1(t) = \widetilde{K}_1(t)$ при почти всех $t \in (-\pi, \pi)$. Кроме того,

$$\widetilde{K}_1(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{(1 - \nu_0)t}{2} - \int_0^t S(x)\,dx\ ,\ t \in (0, 2\pi)\ .$$

Поэтому функция $\widetilde{K}_1(t)$ убывает на $(0,2\pi)$ и $\widetilde{K}_1(t) \ge \widetilde{K}_1(\pi) = 0$ при всех $t \in (0,\pi)$.

Далее воспользуемся следующим утверждением: *Пусть $f,\varphi \in L_1$, функция f нечетная и $f(t) \ge 0$ почти всюду на $(0,\pi)$, а функция φ четная и убывает на $(0,\pi)$. Тогда свертка $F = f * \varphi$ является нечетной и $F(t) \ge 0$ почти всюду на $(0,\pi)$.* Доказательство вытекает из равенства

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\varphi(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\left(\varphi(x-t)-\varphi(x+t)\right)\,dt\,,$$

в котором выражение в скобках неотрицательно при всех $x \in (0,\pi)$ (при $0 \le t \le \pi - x$ это вытекает из неравенств $0 \le |x-t| \le x+t \le \pi$, а при $\pi - x \le t \le \pi$ это следует из неравенств $0 \le |x-t| = 2\max\{x,t\} - (x+t) \le 2\pi - (x+t) \le \pi$). В этом утверждении берем $f = \widetilde{K}_1$ и $\varphi = \psi_{r-1,0}$, $r \ge 2$ (см. (1)). Очевидно $\widetilde{K}_r = \widetilde{K}_1 * \psi_{r-1,0}$. Функция $\psi_{r-1,0}$ убывает на $(0,\pi)$. При $r=2$ это следует из равенства (2), а при $r>2$ из равенства

$$\psi'_{r-1,0}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin kt}{k^{r-2}}\,,\ t \in (0,2\pi)\,. \tag{16}$$

Так как последовательность $\{k^{-r+2}\}$, $k \in \mathbb{N}$, убывает к нулю и выпукла вниз, то $\psi'_{r-1}(t) \le 0$ при $t \in (0,\pi)$ (см., например, [2, с. 297] или [24, Гл. IV, Задача 6.16(г)]). Таким образом, если $r=1$ или $r \ge 2$, то $\operatorname{sign}(\sin t)\,\widetilde{K}_r(t) \ge 0$ при всех $t \in (-\pi,\pi)$. Поэтому для ядра $\widetilde{K}_r$, и, значит, для $K = K_r$, выполнено условие B_1^* с функцией $\varphi_*(t) = \operatorname{sign}(\sin t)$ и $T^* = 0$. Тогда при $n=1$ справедливо равенство (12), которое в нашем случае можно записать следующим образом:

$$\sup_{f\in\mathbf{W}_{\infty,1}(K)}||f||_\infty = \sup_{f\in\mathbf{W}_{1,1}(K)}||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\,E_1(K)_1 = \frac{2|c|}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\nu_{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}}\,. \tag{17}$$

Пример 3. Если для ядра $K \in L_1$ условие B_n^* выполнено с функцией

$$\varphi_*(t) = \operatorname{sign}(\cos nt) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos(2k+1)nt}{2k+1}\,,$$

то из теоремы 2, соотношения (11) и замечания 4 вытекает равенство

$$\sup_{f\in\mathbf{W}_{\infty,n}(K)}||f||_\infty = \sup_{f\in\mathbf{W}_{1,n}(K)}||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\,E_n(K)_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\mu_{(2k+1)n}}{2k+1}\,. \tag{18}$$

i) Этот случай реализуется, например, для ядер Надя [4, 5] $K \in L_1$ вида

$$K(t) \sim \frac{\mu_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\cos kt\,, \tag{19}$$

где последовательность $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ убывает к нулю и при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $\Delta^2\mu_k := \mu_k - 2\mu_{k+1} + \mu_{k+2} \ge 0$ и $\Delta^3\mu_k := \mu_k - 3\mu_{k+1} + 3\mu_{k+2} - \mu_{k+3} \ge 0$.

В этом случае (даже без предположения выполнения неравенств $\Delta^3\mu_k \ge 0$) сумма ряда (19) $\widetilde{K} \in L_1 \bigcap C(0,2\pi)$ и ряд (19) является рядом Фурье для $\widetilde{K}$ (см., например, [3, § 7.3]). Из полноты тригонометрической системы вытекает, что $K(t) = \widetilde{K}(t)$ при почти всех $t \in (-\pi,\pi)$. В работе [5, § 2] (см. также [4, § 7], [11, § 2.11.5]) показано, что при любом $n \in \mathbb{N}$ существует четный полином $T^* \in \mathcal{T}_n$ такой, что при всех $t \in (-\pi,\pi)$ выполняется неравенство $\cos nt\,(\widetilde{K}(t) - T^*(t)) \ge 0$ (приведенное в [5, § 2] доказательство этого факта для положительных μ_k верно и для неотрицательных μ_k). Поэтому для ядра $\widetilde{K}$, и, значит, для K, при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие B_n^* с функцией $\varphi_*(t) = \operatorname{sign}(\cos nt)$. В этом случае равенство (18) справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$.

ii) При $n = 1$ этот случай реализуется также и для ядер $K \in L_1$ вида (19), где $\mu_k \ge 0$, $k \in \mathbb{N}$, а последовательность $\{k^2\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ убывает. Тогда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$. Поэтому сумма ряда (19) $\widetilde{K} \in C(\mathbb{R}) \bigcap C^1(0,2\pi)$, а ряд (19) является рядом Фурье для $\widetilde{K}$ и, значит, $K(t) = \widetilde{K}(t)$ при почти всех $t \in (-\pi,\pi)$. Кроме того, $\widetilde{K}'(t) \le 0$ при всех $t \in (0,\pi)$. Отсюда следует, что $\operatorname{sign}(\cos t)\,(\widetilde{K}(t) - \widetilde{K}(\pi/2)) \ge 0$ при всех $t \in (-\pi,\pi)$. Поэтому для $\widetilde{K}$, и, значит, для K, выполнено условие B_1^* с функцией $\varphi_*(t) = \operatorname{sign}(\cos t)$ и $T^* = \widetilde{K}(\pi/2)$. В этом случае равенство (18) справедливо при $n = 1$.

iii) При $n = 1$ этот случай реализуется и для ядер $K \in L_1$ вида (19), где последовательность $\{k\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ убывает к нулю и выпукла вниз. В этом случае и последовательность $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ убывает к нулю и также выпукла вниз. Поэтому сумма ряда (19) $\widetilde{K} \in L_1 \bigcap C(0,2\pi)$ и ряд (19) является рядом Фурье для $\widetilde{K}$ и, значит, $K(t) = \widetilde{K}(t)$ при почти всех $t \in (-\pi,\pi)$. Кроме того, $\widetilde{K} \in C^1(0,2\pi)$ и $\widetilde{K}'(t) \le 0$ при всех $t \in (0,\pi)$ (см., например, [2, с. 297] или [24, Гл. IV, Задача 6.16(г)]). Отсюда следует, что $\operatorname{sign}(\cos t)\,(\widetilde{K}(t) - \widetilde{K}(\pi/2)) \ge 0$ при всех $t \in (-\pi,\pi)$, $t \ne 0$. Поэтому для ядра $\widetilde{K}$, и, значит, для K, выполнено условие B_1^* с функцией $\varphi_*(t) = \operatorname{sign}(\cos t)$ и $T^* = \widetilde{K}(\pi/2)$. В этом случае равенство (18) справедливо при $n = 1$.

iv) При $n = 1$ этот случай реализуется также и для ядер $K = M_r \in L_1$ вида (19), где $\mu_k = c(1-\nu_k)/k^r$, $k \in \mathbb{N}$, $r = 2$ или $r \ge 3$, а $\{\nu_k\}_{k=0}^{\infty}$ такая последовательность, что ряд $\nu_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \cos kt$ является рядом Фурье функции $S \in L_1$ и $S(t) \ge 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$ и $\nu_0 \le 1$. Так как $E_n(cK)_1 = |c|E_n(K)_1$, то для простоты рассуждений считаем $c = 1$. Пусть

$$M_r(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\nu_k}{k^r} \cos kt\,. \qquad (20)$$

Если $r > 1$, то ряд (20) сходится равномерно к функции $\widetilde{M_r} \in C(\mathbb{R})$ и, значит, этот ряд является рядом Фурье своей суммы. Поэтому $M_r(t) = \widetilde{M_r}(t)$ при почти всех $t \in (-\pi,\pi)$. Если $r = 2$ или $r \ge 3$, то $\widetilde{M_r}'(t) = -\widetilde{K}_{r-1}(t) \le 0$ при всех $t \in (0,\pi)$ (см. пример 2(iii)). Отсюда следует, что $\operatorname{sign}(\cos t)\,(\widetilde{M_r}(t) - \widetilde{M_r}(\pi/2)) \ge 0$ при всех $t \in (-\pi,\pi)$. Поэтому для ядра $\widetilde{M_r}$, и, значит, для $K = M_r$, выполнено условие B_1^* с функцией $\varphi_*(t) = \operatorname{sign}(\cos t)$ и $T^* = \widetilde{M_r}(\pi/2)$. Тогда при $n = 1$ справедливо равенство (18), которое в нашем случае можно записать следующим образом:

$$\sup_{f\in\mathbf{W}_{\infty,1}(K)} ||f||_\infty = \sup_{f\in\mathbf{W}_{1,1}(K)} ||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\, E_1(K)_1 = \frac{2|c|}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-\nu_{2k+1})}{(2k+1)^{r+1}}\,. \qquad (21)$$

Пример 4. **i)** Пусть функция $K \in L_1$ при некотором значении $A \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям: $K(t) \geq A$ почти всюду на $(0,\pi)$ и $K(t) \leq A$ почти всюду на $(-\pi,0)$. Тогда K очевидно удовлетворяет условию B_1^* с $n^* = 1$, $T^* \equiv A$, $\varphi_*(t) = \mathrm{sign}(\sin t)$. В этом случае равенство (12) справедливо при $n = 1$.

ii) Пусть функция $K \in L_1$ при некотором значении $A \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям: $K(t) \geq A$ почти всюду на $(-\pi/2,\pi/2)$ и $K(t) \leq A$ почти всюду на $(-\pi,\pi)\setminus(-\pi/2,\pi/2)$. Тогда K очевидно удовлетворяет условию B_1^* с $n^* = 1$, $T^* \equiv A$, $\varphi_*(t) = \mathrm{sign}(\cos t)$. В этом случае равенство (18) справедливо при $n = 1$.

Замечание 5. Отметим, что пример 2(iii) при нечетных $r \in \mathbb{N}$, а пример 3(iv) при четных $r \in \mathbb{N}$ были получены другим методом в [25].

Приведём простые достаточные условия неотрицательности функции $S(t)$ из примеров 2(iii) и 3(iv). Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$ (см., например, [6, § 6.2], [26]), если для любых $n \in \mathbb{N}$, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ и $\{c_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство $\sum_{k,j=1}^n c_k\bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0$. По теореме Бохнера-Хинчина функция f является положительно определённой и непрерывной на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}\,d\mu(u)$, где μ неотрицательная, конечная, борелевская мера на $\mathbb{R}$. Если $f \in C(\mathbb{R})\cap L(\mathbb{R})$, то положительная определенность функции f эквивалентна неотрицательности её преобразования Фурье, т.е. $\widehat{f}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-iux}\,du \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ и в этом случае $\widehat{f} \in L(\mathbb{R})$ (см. [27, гл. I, §1]).

Лемма 2. *Пусть функция f является положительно определенной и непрерывной на $\mathbb{R}$. Если ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)e^{ikt}$ является рядом Фурье функции $S \in L_1$, то $S(t) \geq 0$ при почти всех $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Очевидно функция $\varphi_n(x) := f(x)\,(1-|x|/n)_+$ при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет компактный носитель и является положительно определенной и непрерывной на $\mathbb{R}$. Тогда $\sigma_n(S)(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_n(k)e^{ikt} \geq 0$ при $t \in \mathbb{R}$ (см., например, [28, § 6]). Так как средние арифметические ряда Фурье функции $S \in L_1$ сходятся в L_1 к функции S, то для некоторой подпоследовательности $\sigma_{n_k}(S)(t) \to S(t)$ при почти всех $t \in [0,2\pi]$ и, значит, $S(t) \geq 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Лемма 2 доказана.

1. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения, Москва, Наука, 1976.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, т.1, Москва, Мир, 1965.
3. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении, т.1, Москва, Мир, 1985.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, *Изв. АН СССР, сер. мат.* **10** (1946), 207–256.
5. *Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, *Ber. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-phys. Kl.* **90** (1938), 103–134.
6. *Trigub R.M., Belinsky E.S.* Fourier Analysis and Approximation of Functions, Boston, Dordrecht, London, Kluwer-Springer, 2004.
7. *Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.* О приближении ступенчатых функций тригонометрическими полиномами в интегральной метрике, *Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика.*

12, 1(2006), 27–56.

8. *Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.* Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами, *Труды Института математики и механики УрО РАН* **14**, 3(2008), 19–37.
9. *Jackson D.* A general class of problems in approximation, *Amer. Journ. of Math.* **46** (1924), 215–234.
10. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации, Москва, Наука, 1965.
11. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного, М., Физ. мат., 1960.
12. *Дзядык В.К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную ($0 < s < 1$), *Изв. АН СССР, сер. мат.* **17**(1953), 135–162.
13. *Дзядык В.К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер, *Матем. заметки* **16**, 5(1974), 691–701.
14. *Стечкин С.Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами, *Изв. АН СССР, сер. мат.* **20**(1956), 643–648.
15. *Ефимов А.В.* О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера, *Изв. АН СССР, сер. мат.* **22**(1958), 81–116.
16. *Сунь Юн-шен* О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами, *Изв. АН СССР, сер. мат.* **23**(1959), 67–92.
17. *Стечкин С.Б., Теляковский С.А.* О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L, *Труды МИАН СССР* **88**(1967), 20–29.
18. *Моторный В.П.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем, *Матем. заметки* **16**, 1(1974), 15—26.
19. *Шевалдин В.Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона, *Матем. заметки* **51**, 6(1992), 126—136.
20. *Сердюк А.С.* Найкращі наближення і поперечники класів згорток періодичних функцій високої гладкості, *Укр. матем. журн.* **57**, 7(2005), 946–971.
21. *Покровский А.В.* О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами на классах сверток аналитических периодических функций, *Матем. заметки* **84**, 5(2008), 755–762.
22. *Теляковский С.А.* О работах по теории приближения функций, выполненных в МИАНе, *Труды МИАН СССР* **182**(1988), 128–182.
23. *Белов А.С.* О примерах тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами, *Мат. сб.* **186**, 4(1995), 21–46.
24. *Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н.* Избранные задачи по вещественному анализу, 2-е изд., перераб. и доп., СПб., Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2004.
25. *Pych P.* Approximation of function in L- and C-metrics, *Ann. Soc. Math. Pol.* **1**, 11(1967), 61–76.
26. *Ахиезер Н.И.* Лекции об интегральных преобразованиях, Харьков, Вища школа, Изд. при Харьк. ун-те, 1984.
27. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Москва, Мир, 1974.
28. *Zastavnyi V.P.* On positive definiteness of some functions, *Journal of Multivariate Analysis* **73** (2000), 55–81.

V.P. Zastavnyi

Nikol'skii theorem for kernels satisfying the more general condition than the A_n^*.

The known Nikol'skii theorem for the kernels satisfying the A_n^* condition is proved also for kernels from a wider class. We present known examples of such kernels, kernels Nagy, and new ones.

Keywords: *Nikol'skii theorem, an approximation of classes of functions.*

В.П. Заставний

Теорема Нікольського для ядер, що задовольняють більш загальній умові, чим A_n^*.

Відома теорема Нікольського для ядер, що задовольняють умові A_n^*, доведена й для ядер з більш широкого класу. Наведено як відомі приклади таких ядер (ядра Надя), так і нові.

Ключові слова: *теорема Нікольського, наближення класів функцій.*

Донецкий национальный университет
`zastavn@rambler.ru`

Получено 26.03.10