УДК 519.7

©2009. **И.И. Максименко**

ФИНИТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ ОБЪЕКТОВ

Вводятся понятия сложности, представления, фрагмента и кофрагмента для произвольных объектов, заданных множеством описателей. В терминах специализированных "бэровских" метрик дан критерий финитности представлений. Исследованы алгебраические свойства и условия существования представлений для полных систем.

Введение. В теории дискретных управляющих систем одной из актуальных задач является задача сравнения поведения объекта (автомата, отмеченного графа, языка) с эталоном посредством проведения с ним различного рода экспериментов.

Для конечных автоматов теория экспериментов разработана достаточно хорошо [1, 2], для отмеченных графов находится в зачаточном состоянии [3].

В работах [2, 4] был введен и обоснован подход к исследованию контрольных и распознающих экспериментов в классах автоматов Мили на основе их описания сходящимися последовательностями окрестностей в метрических пространствах автоматов. Для специальной бэровской метрики β, отражающей близость автоматов по поведению, были найдены конструктивные условия существования контрольного эксперимента для финитно-определенных классов.

В данной статье этот подход применяется к изучению представлений произвольных неструктурированных объектов, заданных множеством описателей любой природы, с применением специализированных "бэровских" метрик и понятия сложности исследуемого объекта.

1. Базовые понятия. Рассмотрим систему $< \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}, \rho >$, где $\boldsymbol{O}$ – множество описателей, $\boldsymbol{A}$ – множество объектов, а $\rho \subseteq \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{O}$ – некоторое отношение дескрипции [1]. Каждому объекту $A \in \boldsymbol{A}$ соответствует описатель $O_A = \rho(A)$.

Задана функция сложности описателя $n : \boldsymbol{O} \to N^+$. Сложностью $O \subseteq \boldsymbol{O}$ и $A \in \boldsymbol{A}$ назовем $n(O) = sup\{n(o)|o \in O\}$ и $n(A) = n(O_A)$, соответственно. Для произвольного $F \subseteq \boldsymbol{A}$ сложность определим как $n(F) = sup\{n(A)|A \in F\}$.

Например, сложностью слова в некотором алфавите X может быть длина слова, сумма кодов всех символов этого слова или представление слова в $|X|$-ричной системе счисления. Сложность языка есть длина максимального слова, максимальный код слов языка или максимальное представление слов языка в $|X|$-ричной системе счисления. Очевидно, что язык может иметь конечную сложность, но быть бесконечным.

Введем на $\boldsymbol{A}$ предпорядок, полагая $A \leq B$ точно тогда, когда $O_A \subseteq O_B$. Тогда эквивалентность $A \cong B$ определяется равенством $O_A = O_B$ и $A < B$, если $O_A \subset O_B$. Через $\cong A$ обозначим $\{B \in \boldsymbol{A}|A \cong B\}$.

На множестве объектов зададим "расстояние" между объектами β аналогично "бэровской" метрике, полагая $\beta(A,B) = 0$, если $A \cong B$ и $\beta(A,B) = 1/k$, где $k = inf\{n(o)|o \in O_A \oplus O_B\}$ в противном случае.

Полагаем, что $\beta(A,F) = inf\{\beta(A,B)|B \in F\}$ для любых $A \in \boldsymbol{A}$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}$.

Окрестностью $O_{1/m}(A)$ назовем $\{B \in \boldsymbol{A}|\beta(A,B) < 1/m\}$.

Для произвольного $F \subseteq \boldsymbol{A}$ введем предельное множество [5, 6] следующим образом: $limF = \{B \in \boldsymbol{A}|\beta(B,(F - \{\cong B\}) = 0\}$.

Множества фрагментов $Fr(A)$ и кофрагментов $CoFr(A)$ для любого объекта A определим как 2^{O_A} и $2^{\overline{O}_A}$, соответственно, где $\overline{O}_A$ обозначает теоретико-множественное дополнение O_A в множестве $\boldsymbol{O}$.

2. Основные результаты.

Утверждение 1. *Для произвольного объекта A множества $Fr(A)$ и $CoFr(A)$ являются булевыми алгебрами.*

Доказательство. Непосредственно следует из того, что булеан 2^X для любого множества X является булевой алгеброй. □

Нетрудно видеть, что для произвольного объекта A множества O_A и $\overline{O}_A$ являются наибольшим фрагментом и наибольшим кофрагментом, соответственно.

Подмножество множеств $\boldsymbol{O}$ или $\boldsymbol{A}$ назовем финитным, если его сложность конечна. В противном случае, оно инфинитно. Конечное подмножество всегда финитно, но финитное множество не является конечным в общем случае.

Утверждение 2. *Для произвольного объекта A существуют финитные фрагмент и кофрагмент.*

Доказательство. Любое конечное подмножество множества O_A является искомым фрагментом, а конечное подмножество множества $\overline{O}_A$ – искомым кофрагментом. □

Пару $(O_1, O_2) \in Fr(A_0) \times CoFr(A_0)$ назовем представлением для произвольных $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}$, если для любого $B \in F$ из включения $(O_1, O_2) \in Fr(B) \times CoFr(B)$ вытекает $A \cong B$.

Утверждение 3.

1. Для произвольных $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}$ всегда существует представление.

2. Для $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}$ существует представление $(O_1, \oslash)$ только тогда, когда для любого $B \in F$, не эквивалентного A_0, не выполнено соотношение $A_0 < B$.

3. Для $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}$ существует представление $(\oslash, O_2)$ только тогда, когда для любого $B \in F$, не эквивалентного A_0, не выполнено соотношение $B < A_0$.

Доказательство.

1. Следует из того, что пара $(O_{A_0}, \overline{O}_{A_0})$ является представлением для $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}$.

2. Пусть дано представление $(O_1, \oslash)$ для $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}$. Предположим, что для некоторого $B \in F$, не эквивалентного A_0, выполнено соотношение $A_0 < B$. Тогда $O_1 \subseteq O_{A_0} \subset O_B$, т.е. $O_1 \subset O_B$. Полученное противоречие доказывает требуемое.

Предположим теперь, что не выполнено $A_0 < B$ для всех $B \in F$. Тогда существует $o \in O_{A_0} - O_B$ для любого B, не эквивалентного A_0. Сгруппировав все такие o в множество O_1, получаем требуемое представление $(O_1, \oslash)$.

3. Пусть дано представление $(\oslash, O_2)$ для $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}$. Предположим, что для некоторого $B \in F$, не эквивалентного A_0, выполнено соотношение $B < A_0$. Тогда $O_2 \subseteq \overline{O}_{A_0} \subset \overline{O}_B$, т.е. $O_2 \subset \overline{O}_B$. Полученное противоречие доказывает требуемое.

Предположим теперь, что не выполнено $B < A_0$ для всех $B \in F$. Тогда существует $o \in O_B - O_{A_0}$ для любого B, не эквивалентного A_0. Сгруппируем все такие o в множество O_2. Пара $(\oslash, O_2)$ будет требуемым представлением. $\square$

Представление $(O_{A_0}, \overline{O}_{A_0})$ в общем случае не является финитным. Поэтому интерес представляет изучение финитных представлений.

Справедлив следующий метрический критерий существования финитных представлений:

Теорема 4. *Для произвольных $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}$ существует финитное представление тогда и только тогда, когда $A_0 \notin limF$.*

Доказательство. Пусть для $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}$ существует финитное представление (O_1, O_2), для которого $n(O_1 \cup O_2) \leq N_0$ для некоторого натурального N_0. Выберем произвольный объект $B \in F$, не эквивалентый A_0. Если такого объекта нет, то по определению $limF$ пусто и условие теоремы выполнено. В противном случае, существует $o \in O_1 \cup O_2$, что $o \in O_{A_0} \oplus O_B$. Очевидно, что сложность o не превышает N_0. Поэтому $\beta(A_0, B) \geq 1/N_0$. В силу произвольности выбора B выполнено $O_{1/N_0}(A_0) \cap (F - \{\cong A_0\}) = \oslash$ и $A_0 \notin limF$.

Обратно, пусть $A_0 \notin limF$. В этом случае существует такое натуральное число N_0, что $\beta(A_0, B) \geq 1/N_0$ для всех $B \in F$, не эквивалентных A_0. Пусть $o_i \in O_{A_0} \oplus O_B$ и сложность o_i не превышает N_0. Сгруппируем все такие $o_i \in O_{A_0}$ в множество O_1 и все $o_i \in \overline{O}_{A_0}$ в множество O_2.Пара (O_1, O_2) есть искомое представление со сложностью не выше N_0. $\square$

Теорема 4 является обобщением аналогичного критерия существования контрольных экспериментов в классах автоматов Мили, заданных сходящимися последовательностями окрестностей в бэровской метрике [4]. Таким образом, бэровская метрика β отражает близость объектов, что упрощает исследование экспериментов средствами метрических пространств.

Ценность данного критерия состоит в определении области применимости метрических критериев.

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 5.

1. Для произвольных $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и конечного $F \subseteq \boldsymbol{A}$ всегда существует финитное представление.

2. Если пара (O_1, O_2) является финитным представлениям для A_0 и F, то она же является финитным представлением для A_0 и любого подмножества F.

3. Для финитных A_0 и F всегда существует финитное представление.

4. Если для любого $i \in 1, n$ существуют финитные представления (B_i, C_i) для A_0 и множеств $F_i \subseteq \boldsymbol{A}$, тогда пара $(\cup_{i=1}^{n}(B_i), \cup_{i=1}^{n}(C_i))$ будет финитным представлением для A_0 и $\cup_{i=1}^{n}(F_i)$.

Доказательство. 1. Для конечного множества $F \subseteq \boldsymbol{A}$ множество $limF$ пусто.

Тогда по теореме 4 существует финитное представление.

2. Из включение $F_1 \subseteq F$ вытекает включение $limF_1 \subseteq limF$, поэтому финитное представление существует. Сохранение представления следует непосредственно из определения.

3. Пусть $n(A_0 \cup F) \leq N_0$ для некоторого натурального N_0. Для любого $B_i \in F$, не эквивалентного A_0, выбираем $o_i \in O_{A_0} \oplus O_B$. Элемент o_i помещаем в множество O_1, если $o_i \in O_{A_0}$ и помещаем в множество O_2 в противном случае. Пара (O_1, O_2) является искомым финитным представлением, так как сложность каждого o_i не превышает N_0.

4. Из свойств $limF$ вытекает, что $lim(\cup_{i=1}^{n}(F_i)) = \cup_{i=1}^{n} limF_i$. Поэтому, если $A_0 \notin limF_i$, то и $A_0 \notin lim(\cup_{i=1}^{n} F_i)$. По теореме 4 из существования представлений для A_0 и F_i вытекает существование представления для A_0 и $\cup_{i=1}^{n} F_i$.

Пара $(\cup_{i=1}^{n}(B_i), \cup_{i=1}^{n}(C_i))$ является финитным представлением для A_0 и F_i для любого i, и поэтому является представлением для A_0 и $\cup_{i=1}^{n} F_i$. $\square$

3. Полные системы. Систему $< \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}, \rho >$ назовем полной, если для любого $O \subseteq \boldsymbol{O}$ выполнено соотношение $|\rho^{-1}(O)| = 1$.

Примером полной системы является система $< X^*, 2^{X^*} >$ для произвольного (возможно бесконечного) алфавита X.

Нетрудно видеть, что для полных систем эквивалентность объектов равносильна их равенству.

Пусть даны два объекта A и B. Через $A \cup B$ и $A \cap B$ обозначим объекты с описателями $O_A \cup O_B$ и $O_A \cap O_B$, соответственно. В силу полноты системы такие объекты существуют и единственны.

Для любого объекта A в полной системе существует единственный обратный ему объект $\overline{A}$, которому соответствует описатель $\overline{O}_A$.

Объект A назовем непустым, если его описатель O_A не пустое множество.

Алгебраическую структуру класса объектов полной системы описывает

Утверждение 6. *Класс объектов полной системы является булевой алгеброй.*

Доказательство. Пустому множеству описателей соответствует объект из $\boldsymbol{A}$, который обозначим $\mathbf{0}$, а всему множеству $\boldsymbol{O}$ – объект, обозначаемый $\mathbf{1}$. Объединение и пересечение объектов также порождают некоторые объекты из $\boldsymbol{A}$ в силу полноты системы. Каждому объекту A соответствует единственное дополнение $\overline{A}$. Аксиомы булевой алгебры проверяются непосредственно [6]. $\square$

Непустой объект A назовем атомом, если не существует разложение $A = B \cup C$, что A отличен от B и C.

Следующее утверждение характеризует структуру полных систем

Утверждение 7. *Для полной системы $< \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}, \rho >$ и любого непустого $A \in \boldsymbol{A}$ выполнено:*

1. Объект A является атомом точно тогда, когда $|O_A| = 1$.

2. Объект A может быть представлен объединением различных атомов единственным образом.

3. Система $< \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}, \rho >$ является полной тогда и только тогда, когда существует взаимно-однозначное соответствие между множествами $2^{\boldsymbol{O}}$ и $\boldsymbol{A}$.

Доказательство. 1. Предположим, что объект A является атомом, но при этом в O_A содержится как минимум 2 элемента . Выберем произвольно $o \in O_A$. Но тогда $A = B \cup C$, где B есть объект с описателем $\{o\}$, а C есть объект с описателем $O_A - \{o\}$. В этом случае A не является атомом.

Предположим теперь, что $|O_A|$ =1. Но тогда пусть $A = B \cup C$, причем в этом случае один из объектов B и C пустой. Но тогда другой объект совпадает с A, что и доказывает утверждение.

2. Пусть дан некоторый объект A. Множество O_A представим в виде объединения $\{o_i | o_i \in O_A\}$. Каждому такому o_i соответствует некоторый объект A_i, который по первому утверждению является атомом. Из единственности разложения множества O_A на различные одноэлементные подмножества следует единственность разложения A на различные атомы.

3. Пусть система полна. Тогда для любого $O \subseteq \boldsymbol{O}$ существует единственный элемент $\rho^{-1}(O) \in \boldsymbol{A}$ и для всякого $A \in \boldsymbol{A}$ существует описатель $O_A = \rho(A)$.

Наоборот, если существует взаимно-однозначное соответствие ϕ между множествами $2^{\boldsymbol{O}}$ и $\boldsymbol{A}$, то система $< \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}, \phi^{-1} >$ является полной по определению. □

Через $\tilde{F}$ обозначим $\{\overline{B} | B \in F\}$. Справедливо утверждение "двойственности":

Утверждение 8. *Для полной системы $< \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}, \rho >$ и любого $A \in \boldsymbol{A}$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}$ равносильно:*

1. существует финитное представление (O_1, O_2) для A и F.

2. существует финитное представление (O_2, O_1) для $\overline{A}$ и $\tilde{F}$.

Доказательство. 1. Пусть (O_1, O_2) есть финитное представление для A и F. Из определения обратного элемента $\overline{A}$ следует, что $Fr(\overline{A}) = CoFr(A)$ и $CoFr(\overline{A}) = Fr(A)$. Пусть для некоторого $B \in F$, не эквивалентного A, выполнено включение $(O_1, O_2) \in Fr(B) \times CoFr(B)$. Но тогда $(O_2, O_1) \in CoFr(B) \times Fr(B) = Fr(\overline{B}) \times CoFr(\overline{B})$. Откуда следует, что A эквивалентно B, а значит, что $\overline{A}$ эквивалентно $\overline{B}$. Полученное противоречие доказывает, что (O_2, O_1) – финитное представление для $\overline{A}$ и $\tilde{F}$.

2. Доказывается аналогично с учетом того,что $\overline{\overline{B}} = B$ для любого $B \in \boldsymbol{A}$. □

Обозначим через $\boldsymbol{A}_f$ множество финитных объектов в $\boldsymbol{A}$, а через $\boldsymbol{A}_{in}$ – множество инфинитных объектов в $\boldsymbol{A}$. Если $\boldsymbol{A}_{in}$ пусто, то непосредственно из теоремы 4 следует, что для любого $A \in \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}$ существует финитное представление.

Для непустого $\boldsymbol{A}_{in}$ имеет место

Теорема 9. *Справедливы утверждения:*

1. Для любого $A \in \boldsymbol{A}_f$ и класса $\boldsymbol{A}_f$ не существует финитного представления.

2. Для любого $A \in \boldsymbol{A}_{in}$ и класса $\boldsymbol{A}_{in}$ не существует финитного представления.

3. Для любого $A \in \boldsymbol{A}_f$ и класса $\boldsymbol{A}_{in}$ не существует финитного представления.

4. Для любого $A \in \boldsymbol{A}_{in}$ и класса $\boldsymbol{A}_f$ не существует финитного представления.

Доказательство.

1. Зафиксируем произвольное натуральное $m > n(A)$. В силу инфинитности $\boldsymbol{O}$ существует такое $o \in \boldsymbol{O}$, что $n(o) \geq m$. Через A_m обозначим объект с описателем $O_A \cup \{o\}$. Расстояние между объектами $\beta(A, A_m)$ равно $1/n(o) \leq 1/m$. По построению $A_m \in \boldsymbol{A}_f$ и $lim\{A_m\} = A$. По теореме 4 не существует финитного представления для A и класса $\{A_m\}$, а значит не существует финитного представления для A и $\boldsymbol{A}_f$.

2. Выберем $A \in \boldsymbol{A}_{in}$. Для произвольного натурального числа m в силу инфинитности A существует такое $o \in O_A$, что $n(o) \geq m$. Через A_m обозначим объект с носителем $O_A - \{o\}$. Из определения расстояния β получаем неравенство $\beta(A, A_m) = 1/n(o) \leq 1/m$. Объект A_m инфинитен, так как удаление конечного подмножества из описателя объекта не выводит объект за пределы класса $\boldsymbol{A}_{in}$. Последовательность объектов A_m сходится к A, поэтому $A \in lim\boldsymbol{A}_{in}$. Тогда по теореме 4 не существует финитного представления для A и класса $\boldsymbol{A}_{in}$.

3. Дан произвольный $A \in \boldsymbol{A}_f$ со сложностью $n(A)$. Для любого натурального числа $m > n(A)$ положим, что A_m есть объект с описателем $A \cup \{o | n(o) \geq m\}$. По построению $A_m \in \boldsymbol{A}_{in}$. Кроме того, $\beta(A, A_m) \leq 1/m$. Но в этом случае $A \in lim\boldsymbol{A}_{in}$. Из теоремы 4 вытекает отсутствие финитного представления для A и класса $\boldsymbol{A}_{in}$.

4. Пусть дан $A \in \boldsymbol{A}_{in}$. Через A_m обозначим объект с носителем $\{o | o \in O_A, n(o) \leq m\}$ для любого натурального числа m. По определению $n(A_m) \leq m$, поэтому $A_m \in \boldsymbol{A}_f$. Кроме того, $\beta(A, A_m) < 1/m$, а значит $A \in lim\boldsymbol{A}_f$. По теореме 4 не существует финитного представления для A и класса $\boldsymbol{A}_f$. $\square$

Из теоремы 9 вытекает

Утверждение 10. *Справедливы утверждения:*

1. Для любого $A \in \tilde{\boldsymbol{A}}_f$ и класса $\tilde{\boldsymbol{A}}_f$ не существует финитного представления.

2. Для любого $A \in \tilde{\boldsymbol{A}}_{in}$ и класса $\tilde{\boldsymbol{A}}_{in}$ не существует финитного представления.

3. Для любого $A \in \tilde{\boldsymbol{A}}_f$ и класса $\tilde{\boldsymbol{A}}_{in}$ не существует финитного представления.

4. Для любого $A \in \tilde{\boldsymbol{A}}_{in}$ и класса $\tilde{\boldsymbol{A}}_f$ не существует финитного представления.

Доказательство. Следует непосредственно из утверждений 8 и 9, примененным к $\overline{A}$ и классам $\boldsymbol{A}_f, \boldsymbol{A}_{in}$. $\square$

Автор выражает благодарность Грунскому И.С. за постановку задачи и тесное сотрудничество в процессе работы над статьей.

1. *Грунский И.С., Козловский В.А.* Синтез и идентификация автоматов. – Киев.: Наукова думка, 2004. – 245с.
2. *Грунский И.С., Максименко И.И.* Об экспериментах с автоматами при отсутствии верхней оценки числа состояний // Кибернетика и системный анализ. – 1999.- N4. – С.59-71.
3. *Сапунов С.В.* О методе построения отношения неотличимости помеченных графов // Труды ИПММ НАН Украины, 2008. – Т.16. – С.179-189.
4. *Максименко И.И.* Эксперименты в финитно-определенных метрических пространствах автоматов: Автореферат канд. физ.-мат. наук; 01.01.09 /СГУ – Саратов, 2000. – 16с.
5. *Келли Дж.* Общая топология: Пер. с англ. – 20е изд. – М.: Наука, 1981. – 432с.
6. Общая алгебра.- Т.1/ Под общ. ред. Л.А. *Скорнякова.* – М.: Наука, 1990. – 592с.

Донецкий национальный ун-т
iim@bank-prsp.dn.ua

Получено 10.11.09