УДК 531.38

©2009. **А.В. Мазнев**

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ КЛАССА ЧАПЛЫГИНА

Указан новый случай существования интегрирующего множителя уравнений динамики твердого тела, которые допускают первые интегралы и инвариантные соотношения класса Чаплыгина [1].

Введение. В динамике твердого тела с неподвижной точкой, как правило, рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения следующего вида

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, ..., x_n), \qquad \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{1}$$

то есть в уравнение, относительно которого записана производная от переменной по времени, сама переменная не входит. Предполагаем, что правые части уравнений (1) непрерывно-дифференцируемы до порядка k в области $E_n \subset R_n$. Указанным выше свойствам ($\dfrac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0$) удовлетворяют, например, уравнения Д.Гриоли [2]

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = (a_3 - a_2)x_2x_3 + a_3x_3\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2} - a_2x_2\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_3} + \\
+\nu_3\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2} - \nu_2\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_3}, \\
\dot{x}_2 = (a_1 - a_3)x_3x_1 + a_1x_1\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_3} - a_3x_3\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1} + \\
+\nu_1\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_3} - \nu_3\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1}, \\
\dot{x}_3 = (a_2 - a_1)x_1x_2 + a_2x_2\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1} - a_1x_1\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2} + \\
+\nu_2\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1} - \nu_1\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2},
\end{gathered} \tag{2}$$

$$\dot{\nu}_1 = a_3x_3\nu_2 - a_2x_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = a_1x_1\nu_3 - a_3x_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2. \tag{3}$$

Уравнения (2), (3) имеют первые интегралы

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 - 2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 2E, \tag{4}$$

$$x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = k, \qquad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.$$

В уравнениях (2), (3) и интегралах (4) обозначено: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор момента количества движения тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $L = L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U = U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – дифференцируемые функции переменных ν_1, ν_2, ν_3; E и k — произвольные постоянные.

Если в (2)–(4) положить $L = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \dfrac{1}{2}(B \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})$, $U = (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \dfrac{1}{2}(C \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})$, то приходим к уравнениям класса Кирхгофа, которые описывают движение твердого тела в поле сил, являющемся суперпозицией центрального ньютоновского поля сил, магнитного поля сил и электрического поля сил. В указанных выше выражениях для $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U = U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{s}$ постоянные векторы ($\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$); B и C – симметричные матрицы третьего порядка. Когда $B = 0, C = 0$, то получим уравнения движения гиростата с неподвижной точкой [3].

Для интегрирования в квадратурах уравнений (2), (3) с интегралами (4) необходимо знать дополнительный первый интеграл. Это свойство основано на теореме Якоби [4]. Пусть система (1) допускает $n-2$ первых интеграла

$$\varphi_k(x_1, ..., x_n) = c_k \quad (k = \overline{1, n-2}). \tag{5}$$

Тогда она допускает дополнительный интеграл и интегрируется в квадратурах. (Этот термин означает, что решение уравнений (1) можно получить с помощью обращения интегралов от известных функций).

В работе [5] рассмотрены вопросы интегрирования системы (1) в двух случаях. В первом случае предполагается, что она допускает $n-3$ первых интеграла и одно инвариантное соотношение класса Т.Леви-Чивиты [6]. То есть выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \varphi_i(x_1, ..., x_n) = c_i \quad (i = \overline{1, n-3}), \\ \frac{d\varphi}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\varphi(x_1, ..., x_n)}{dx_j} X_j(x_1, ..., x_n) = \varphi(x_1, ..., x_n)\lambda(x_1, ..., x_n), \end{gathered} \tag{6}$$

где c_i – произвольные постоянные и поэтому уравнения (1) имеют инвариантное соотношение

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = 0 \quad (\overline{\mathrm{grad}}\ \varphi(x_1, ..., x_n)|_{\varphi=0} \neq 0). \tag{7}$$

Во втором случае система (1) допускает $n-4$ первых интеграла $\varphi_k(x_1, ..., x_n) = c_k$ $(k = \overline{1, n-4})$ и два инвариантных соотношения класса Т.Леви-Чивиты [6]

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = 0, \quad g(x_1, ..., x_n) = 0, \tag{8}$$

для которых выполняются уравнения

$$\begin{gathered} \dot{\varphi} = \varphi(x_1, ..., x_n)\lambda_{11}(x_1, ..., x_n) + g(x_1, ..., x_n)\lambda_{12}(x_1, ..., x_n), \\ \dot{g} = \varphi(x_1, ..., x_n)\lambda_{21}(x_1, ..., x_n) + g(x_1, ..., x_n)\lambda_{22}(x_1, ..., x_n), \end{gathered} \tag{9}$$

где левые части уравнений (9) – производные от левых частей равенств (8) в силу уравнений (1).

В работе [5] получены достаточные условия интегрируемости уравнений (1), для которых интегрирующий множитель приведенной системы имеет определенный аналог с интегрирующим множителем приведенной системы в случае Якоби (результаты Якоби подробно изложены в книге П.В.Харламова [3]).

Данная работа посвящена исследованию условий интегрируемости уравнений (1) в случае, когда они допускают k первых интегралов и l инвариантных соотношений класса Чаплыгина ($k+l=n-2$). То есть предполагаем, что имеют место соотношения

$$\varphi_j(x_1,...,x_n)=c_j \quad (j=\overline{1,k}), \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\dot g_1 = g_1^{m_{11}}\lambda_{11}+g_2^{m_{12}}\lambda_{12}+...+g_l^{m_{1l}}\lambda_{1l},\\
&\dot g_2 = g_1^{m_{21}}\lambda_{21}+g_2^{m_{22}}\lambda_{22}+...+g_l^{m_{2l}}\lambda_{2l},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dot g_l = g_1^{m_{l1}}\lambda_{l1}+g_2^{m_{l2}}\lambda_{l2}+...+g_l^{m_{ll}}\lambda_{ll}.
\end{aligned} \tag{11}$$

В системе (11) $m_{ij}>0$, $\lambda_{ij}=\lambda_{ij}(x_1,...,x_n)$, c_j ($j=\overline{1,k}$) – произвольные постоянные ($\dot\varphi_j(x_1,...,x_n)=0$). На основании (11) система (1) допускает l инвариантных соотношений

$$g_1(x_1,...,x_n)=0,\quad g_2(x_1,...,x_n)=0,...,g_l(x_1,...,x_n)=0. \tag{12}$$

Если в системе (11) положить, что $m_{ij}=1$ ($\forall i,j$), то получим случай Т.Леви-Чивиты [6]. Для варианта двух инвариантных соотношений уравнения Т.Леви-Чивиты записаны в виде (9). Наиболее полно инвариантные соотношения класса Т.Леви-Чивиты исследовал А.М.Ковалев [7].

Приведенная система. Условия Якоби. Обозначим через $x=(x_1,...,x_n)^T$. Следуя [1, 4, 5], введем в точке $x^{(0)}\in E_n$ и ее окрестности новые координаты $y_1,...,y_n$

$$x_i=q_i(y_1,...,y_n)\ \ (i=\overline{1,n}), \tag{13}$$

где $y=(y_1,...,y_n)^T\in E_n^*\subset R_n$. Якобиан замены переменных (13) обозначим так

$$D(y_1,...,y_n)=\left|\frac{\partial q_i(y_1,...,y_n)}{\partial y_j}\right| \quad (i,j=\overline{1,n}). \tag{14}$$

Очевидно для (14) предполагаем $D(y_1,...,y_n)\neq 0$ в E_n^*. Это значит, что замена (13) обратима, то есть из формул (13) можно получить

$$y_i=Q_i(x_1,...,x_n)\ \ (i=\overline{1,n}). \tag{15}$$

Причем $y_i^{(0)}=Q_i(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)})$ и в силу $D(y_1,...,y_n)\neq 0$, где D выражается формулой (14), для якобиана замены (15) выполняются условия

$$D^*(x_1,...,x_n)=\left|\frac{\partial Q_i(x_1,...,x_n)}{\partial x_j}\right|\neq 0\ \ (i,j=\overline{1,n}), \tag{16}$$

$$D^*(x_1,...,x_n) = \frac{1}{\langle D(y_1,...,y_n)\rangle}, \tag{17}$$

где обозначено

$$\langle D(y_1,...,y_n)\rangle = D\big(Q_i(x_1,...,x_n),...,Q_n(x_1,...,x_n)\big). \tag{18}$$

С помощью замены (13) уравнения (1) преобразуются к виду

$$\dot{y}_i = Y_i(y_1,...,y_n) \ \ (i=\overline{1,n}). \tag{19}$$

Для уравнений (2), (19) имеет место тождество Якоби [4]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} = \left\langle \frac{1}{D(y_1,...,y_n)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial D(y_1,...,y_n) Y_j(y_1,...,y_n)}{\partial y_j} \right\rangle. \tag{20}$$

Для преобразования системы (1) к системе (19) воспользуемся уравнениями (10), (12) и положим

$$\begin{gathered} y_j = \varphi_j(x_1,...,x_n) \ \ (j=\overline{1,k}), \\ y_{k+1} = g_1(x_1,...,x_n),...,y_{k+l} = g_l(x_1,...,x_n), \\ y_{n-1} = x_{n-1}, \quad y_n = x_n. \end{gathered} \tag{21}$$

Тогда на основании (10), (11) в силу $k+l=n-2$ из системы (1) получим

$$\dot{y}_1 = 0,...,\dot{y}_k = 0, \tag{22}$$

$$\begin{gathered} \dot{y}_{k+1} = y_{k+1}^{m_{11}}\Lambda_{11} + y_{k+2}^{m_{12}}\Lambda_{12} + ... + y_{k+l}^{m_{1l}}\Lambda_{1l}, \\ \dot{y}_{k+2} = y_{k+1}^{m_{21}}\Lambda_{21} + y_{k+2}^{m_{22}}\Lambda_{22} + ... + y_{k+l}^{m_{2l}}\Lambda_{2l}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_{k+l} = y_{k+1}^{m_{l1}}\Lambda_{l1} + y_{k+2}^{m_{l2}}\Lambda_{l2} + ... + y_{k+l}^{m_{ll}}\Lambda_{ll}, \end{gathered} \tag{23}$$

$$\dot{y}_{n-1} = Y_{n-1}(y_1,...,y_n), \quad \dot{y}_n = Y_n(y_1,...,y_n). \tag{24}$$

В системе (23) $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}(y_1,...,y_n)$.

Случай n-2 первых интегралов [4]. Если в системе (22)–(24) положить, что существует только $n-2$ первых интегралов системы (1), а инвариантные соотношения отсутствуют, то из (22)–(24) следует

$$\begin{gathered} y_1 = c_1,...,y_{n-2} = c_{n-2}, \\ \dot{y}_{n-1} = Y_{n-1}(c_1,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n), \\ \dot{y}_n = Y_n(c_1,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n). \end{gathered} \tag{25}$$

Условие Якоби (20) принимает вид (так как левая часть равна нулю в силу (1))

$$\frac{\partial D(c_1,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n)Y_{n-1}(c_1,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n)}{\partial y_{n-1}} +$$

$$+\frac{\partial D(c_1,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n)Y_n(c_1,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n)}{\partial y_n}=0. \tag{26}$$

То есть в силу (26) функция $D(c_1,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n)$ является интегрирующим множителем последних двух уравнений из системы (25). Это значит, что система (25) допускает дополнительный первый интеграл $z(c_1,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n) = c_{n-1}$ (c_{n-1} – произвольная постоянная). Выражая из него, например, y_{n-1}, получим $y_{n-1} = y_{n-1}(c_1,...,c_{n-2},c_{n-1},y_n)$. Подстановка этой функции в уравнение для y_n системы (25) приводит к уравнению, из которого путем обращения интеграла можно определить функцию

$$y_n = y_n(c_1,...,c_{n-2},c_{n-1},c_n,t), \tag{27}$$

где c_n – произвольная постоянная, возникшая из операции обращения интеграла. Таким образом, приведенная система (25) интегрируется в квадратурах. Это означает, что интегрируется и система (1). Зависимость переменных x_i от времени легко определить, используя указанные выше преобразования.

Случай k первых интегралов; $\mathbf{m}_{ii}$=1 ($i=\overline{1,l}$) . Предположим, что в системе (22)–(24) $m_{ii}=1,\ \Lambda_{ii}(y_1,...,y_k,y_{k+1},...,y_{k+i-1},0,y_{k+i+1},...,y_n)\neq 0$. Тогда на первых интегралах $y_1=c_1,...,y_k=c_k$ и инвариантных соотношениях $y_{k+1}=0,...,y_{k+l}= 0$ $(k+l=n-2)$ система (22)–(24) примет вид

$$\begin{aligned}
&y_1=c_1,...,y_k=c_k,\\
&y_{k+1}=0,...,y_{k+l}=0,\\
&\dot y_{n-1}=Y_{n-1}(c_1,...,c_k,\underbrace{0,...,0,}_{l}y_{n-1},y_n),\\
&\dot y_n=Y_n(c_1,...,c_k,\underbrace{0,...,0,}_{l}y_{n-1},y_n).
\end{aligned} \tag{28}$$

Аналог якобиана (14) можно получить, разрешив уравнения (21) относительно переменных $x_1,...,x_n$. В силу формулы (17) его можно получить так

$$D(y_1,...,y_n)=\frac{1}{\langle D^*(x_1,...,x_n)\rangle}. \tag{29}$$

В формуле (29) в силу соотношений (21) D^* имеет вид

$$D^*(x_1,...,x_n)=\begin{vmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_l}{\partial x_1} & 0 & 0\\
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_l}{\partial x_2} & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n-2}} & \dots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_{n-2}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-2}} & \dots & \frac{\partial g_l}{\partial x_{n-2}} & 0 & 0\\
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n-1}} & \dots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-1}} & \dots & \frac{\partial g_l}{\partial x_{n-1}} & 1 & 0\\
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial g_l}{\partial x_n} & 0 & 1
\end{vmatrix}. \tag{30}$$

Формула Якоби (20) на основании формул (21), (22), (28)–(30) примет вид (эту формулу выпишем на первых интегралах и инвариантных соотношениях из (28))

$$\begin{gathered}\Lambda_{11}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)+\Lambda_{22}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)+...+\\ +\Lambda_{ll}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)+\\ +\frac{\partial D(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)Y_{n-1}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)}{\partial y_{n-1}}+\\ +\frac{\partial D(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)Y_n(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)}{\partial y_n}=0.\end{gathered}\tag{31}$$

Предположим, что выполняется условие

$$\begin{gathered}\Lambda_{11}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)+\Lambda_{22}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)+...+\\ +\Lambda_{ll}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)=0.\end{gathered}\tag{32}$$

Тогда в силу (32) из (31) следует

$$\begin{gathered}\frac{\partial D(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)Y_{n-1}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)}{\partial y_{n-1}}+\\ +\frac{\partial D(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)Y_n(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)}{\partial y_n}=0.\end{gathered}\tag{33}$$

При выполнении условия (33) последние два уравнения из системы (28) интегрируются в квадратурах, а их интегрирующим множителем является функция

$$D(y_{n-1},y_n)=D(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n).\tag{34}$$

В силу (29), (30), (34) получен аналог результата Якоби [4] и обобщение результатов статьи [5]. Исключение составляет случай одного инвариантного соотношения, так как для него в силу предположений данной статьи условие (32) выполняться не может.

Итак, установлено достаточное условие (32) интегрирования системы (1), которая допускает k первых интегралов и l инвариантных соотношений класса С.А.Чаплыгина при $m_{ii}=1$ $(i=\overline{1,l})$. Его можно использовать и в случае, когда уравнения (11) принимают вид $\dot g_j=g_j^{m_{jj}}\lambda_{jj}$, то есть при условии, что эти уравнения допускают l инвариантных соотношений нулевого слоя [8].

Общий случай. Рассмотрим общий случай, то есть предварительно не накладывая ограничений на числа m_{ij}. Выполнив преобразования (21), получим систему (22)–(24). Рассмотрим условие (20). Как и ранее в силу условия из (1) левая часть равенства (20) равна нулю. Тогда в силу условий (22) оно примет вид

$$\sum_{j=k+1}^{n}\frac{\partial D(y_1,...,y_n)\;Y_j(y_1,...,y_n)}{\partial y_j}=0.\tag{35}$$

Рассмотрим уравнение (35) на первых интегралах $y_m = c_m$ $(m = \overline{1,k})$ и инвариантных соотношениях $y_{k+1} = 0, ..., y_{k+l} = 0$

$$\begin{gathered}D(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)[m_{11}y_{k+1}^{m_{11}-1}\Lambda_{11}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)+\\ +...+m_{ll}y_{k+l}^{m_{ll}-1}\Lambda_{ll}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)]+\\ +\frac{\partial D(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)Y_{n-1}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)}{\partial y_{n-1}}+\\ +\frac{\partial D(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)Y_n(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)}{\partial y_n}=0.\end{gathered} \tag{36}$$

С.А.Чаплыгин [1] исследовал случай $m_{ii} > 1$ $(i = \overline{1,l})$. Тогда из (36) на инвариантных соотношениях $y_{k+1} = 0, ..., y_{k+l} = 0$ получим условие (33), при выполнении которого последние два уравнения из системы (28) интегрируются в квадратурах. В этом случае интегрирующий множитель уравнений (28) очевиден: $D(c_1,...,c_k,0,...,0, y_{n-1},y_n)$.

Поскольку случаи $m_{ii} = 1$ $(i = \overline{1,l})$, $m_{ii} > 1$ $(i = \overline{1,l})$ рассмотрены, то остается рассмотреть случай, когда часть величин m_{ii} равна единице, а часть m_{ii} больше единицы. Без ограничения общности положим

$$m_{11} > 1, ..., m_{\sigma\sigma} > 1, m_{\sigma+1\,\sigma+1} = 1, ..., m_{ll} = 1. \tag{37}$$

Так как $D(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n) \neq 0$, то для обобщения указанных выше результатов положим

$$\Lambda_{\sigma+1\,\sigma+1}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n) + ... + \Lambda_{ll}(c_1,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n) = 0. \tag{38}$$

При выполнении равенства (38) последние два уравнения из (28) допускают интегрирующий множитель (34) и поэтому система (23) интегрируется. Это означает, что и система (1) также интегрируется в квадратурах.

1. *Чаплыгин С.А.* О принципе последнего множителя // Собр. соч. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948. – Т.I: Теоретическая механика. Математика. – С.5-14.
2. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. e natur. – 1963. – **35**, №1-2. – P.35-39.
3. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та. – 1965. – 221с.
4. *Jacobi C.G.* Nouvelle theorie de la rotation d'un corps de revolution grave suspendu en un point quelconque de son axe // Gesammelte Werke. Berlin. – 1882. – B.2. – S.477-492.
5. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Об интегрирующем множителе уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях // Доп. НАН України. – 2007. – №1. – С.60-66.
6. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики: в 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит. – 1951. – 555с.
7. *Ковалев А.М.* Вложение инвариантных многообразий в семейство интегральных многообразий и анализ решения Гесса // Механика твердого тела. – 2005. – Вып.35. – С.19-30.
8. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып.6. – С.15-24.

Донецкий национальный ун-т
a.maznev@donnu.edu.ua

Получено 19.09.09