УДК 517.5

©2009. **Д.А. Ковтонюк**

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ НА ЛИНИЯХ ГИПЕР (α, Q)-ГОМЕОМОРФИЗМОВ

В работе показано, что если гомеоморфизм f области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, является гипер (α, Q)-гомеоморфизмом с $\alpha > n-1$ и $Q \in L^1_{\rm loc}$, то $f \in ACL$. Как следствие, такой гомеоморфизм имеет п.в. частные производные и аппроксимативный дифференциал.

Введение. Статья восполняет имеющийся пробел в развитии метода модулей семейств поверхностей, который мало использовался даже в рамках квазиконформной теории ввиду его сложности, см., напр., [17] и [18]. Недавно, см., напр., [6] и [8] было показано, что так называемые отображения с конечным искажением площади в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, удовлетворяют аналогу известного модульного неравенства Полецкого для гиперповерхностей, т.е. поверхностей размерности $n-1$. Поэтому возникла необходимость изучать классы гипер $Q(x)$-гомеоморфизмов, выделяемых этим модульным неравенством. Для сравнения, имея ввиду важную роль модульной техники в современных классах отображений, профессор Олли Мартио предложил к исследованию следующий класс отображений, см., напр. [9] и [2].

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $Q : D \to [1, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leqslant \int\limits_D Q(x) \cdot \varrho^n(x)\, dm(x)$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\varrho \in adm\,\Gamma$. Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Теория Q-гомеоморфизмов естественным образом связана с теорией модулей с весом, см., напр., [15].

Напомним, что борелева функция $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для Γ, пишем $\varrho \in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_\gamma \varrho\; ds \geqslant 1$$

для всех путей $\gamma \in \Gamma$. *α-Модуль* семейства Γ есть величина

$$M_\alpha(\Gamma) = \inf_{\varrho \in adm\,\Gamma} \int\limits_D \varrho^\alpha(x)\, dm(x)\,.$$

В случае $\alpha = n$ модуль $M_n(\Gamma)$ является конформным инвариантом и принято обозначение $M(\Gamma) = M_n(\Gamma)$.

Летом 2009 года на международной конференции в Киеве израильский математик А.Гольберг предложил к исследованию следующий класс отображений.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $Q : D \to [1, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является (α, Q)-*гомеоморфизмом размерности k*, $1 \leqslant k \leqslant n$, если

$$M_\alpha(f\Sigma_k) \leqslant \int\limits_D Q(x) \cdot \varrho^\alpha(x)\, dm(x)$$

для любого семейства Σ_k k-мерных поверхностей S в D и любой допустимой функции ϱ.

Напомним, что борелева функция $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ является допустимой для Σ_k, если

$$\int\limits_S \varrho^k \; d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для всех $S \in \Sigma$, где $d\mathcal{A}$ отвечает мере площади на поверхности S. *α-Модуль* семейства Σ_k есть величина

$$M_\alpha(\Sigma_k) = \inf_{\varrho \in adm\, \Sigma_k} \int\limits_D \varrho^\alpha(x)\, dm(x)\,.$$

Заметим, что при $\alpha = n$ определение (α, Q)-гомеоморфизма совпадает с определением гипер Q-гомеоморфизма, введенным в работе [5].

Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является *гипер (α, Q)-гомеоморфизмом*, если

$$M_\alpha(f\Sigma) \leqslant \int\limits_D Q(x) \cdot \varrho^\alpha(x)\, dm(x)$$

для любого семейства Σ $(n-1)$-мерных поверхностей S в D и любой допустимой функции ϱ. Борелева функция $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ является допустимой для Σ, если

$$\int\limits_S \varrho^{n-1} \; d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для всех $S \in \Sigma$, где $d\mathcal{A}$ отвечает мере площади на поверхности S.

В случае $\alpha = n$ модуль $M_n(\Sigma_k)$ является конформным инвариантом и принято обозначение $M(\Sigma_k) = M_n(\Sigma_k)$.

В работах [13] и [4] доказана абсолютная непрерывность на линиях Q-гомеоморфизмов и гипер Q-гомеоморфизмов с локально интегрируемой функцией Q. В работе [14] доказана абсолютная непрерывность на линиях (α, Q)-гомеоморфизмов в размерности $k = 1$ при условии локальной суммируемости функции Q и $\alpha > n-1$. В данной статье мы докажем абсолютную непрерывность на линиях гипер (α, Q)-гомеоморфизмов при условии локальной суммируемости функции Q и $\alpha > n-1$.

1. Обобщенные производные и $ACL-$отображения. Рассмотрим два различных подхода к введению одного класса отображений в $\mathbb{R}^n$. Первый подход связан с понятием обобщенных производных в смысле С.Л.Соболева. Говорят, что вещественная функция v в области $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет компактный носитель, если $v(x) \equiv 0$ вне некоторого компакта $C \subset D$. Обозначим через $C^l(D)$, где l – натуральное число, класс функций $v : D \to \mathbb{R}$ l раз, непрерывно дифференцируемых в D, а через $C_0^l(D)$ – подкласс функций в $C^l(D)$ с компактным носителем.

Если $u \in C^l(\mathbb{R}^n)$, то известно, что

$$\int\limits_D \left(u \frac{\partial^l v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} + (-1)^{l+1} v \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right) dx = 0\,,$$

где $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=l$, для всякой вещественной функции $v\in C_0^l(D)$. Если же о существовании частных производных функции u, локально интегрируемой в D, ничего не известно и существует функция $\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$, удовлетворяющая равенству

$$\int\limits_D \left(u\frac{\partial^l v}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}+(-1)^{l+1}v\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\right)dx=0$$

для всякой функции $v\in C_0^l(D)$, то функция $\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ называется *обобщенной производной в смысле Соболева* порядка l функции u в области D, которая также обозначается как $\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$.

Пусть $f:D\to\mathbb{R}^n$ – произвольное отображение. Говорят, что f *принадлежит классу* $W^{1,p}$, $p\geqslant 1$, если координатные функции $f_1,\ldots,f_n$ вектор-функции f имеют обобщенные производные в смысле Соболева, интегрируемые со степенью p в области D.

Рассмотрим теперь второй подход к введению отображений класса $W^{1,p}$, чаще используемый в зарубежной литературе. Пусть $I=\{x\in\mathbb{R}^n: a_i<x_i<b_i, i=1,\ldots,n\}$ – открытый n-мерный интервал. Говорят, что отображение $f:I\to\mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* ACL (или *абсолютно непрерывно на линиях*), если f абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах в I, параллельных координатным осям. Более точно, пусть $P_i(x)=x-x_ie_i$ – ортогональная проекция. Тогда множество E_i всех точек $x\in P_i(I)$ таких, что отображение $t\to f(x+te_i)$ не абсолютно непрерывно на интервале (a_i,b_i) имеет $m_{n-1}(E_i)=0$ для всех $i=1,\ldots,n$.

Если D – область в $\mathbb{R}^n$, то говорят, что отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* ACL, когда сужение $f|_I$ принадлежит классу ACL для каждого интервала I, $\overline{I}\subset D$. Если D и D' – области в $\overline{\mathbb{R}^n}$, то гомеоморфизм $f:D\to D'$ *принадлежит классу* ACL, когда сужение $f|_{D\setminus\{\infty,f^{-1}(\infty)\}}$ принадлежит классу ACL.

Известно, что если отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ непрерывно в D и $f\in ACL$, то частные производные отображения f существуют п.в. в D и являются борелевскими функциями.

Говорят, что отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ класса ACL *принадлежит классу* ACL^p, $p\geqslant 1$, если частные производные f интегрируемы в D со степенью p. Известно, см., напр., [7], что классы ACL^p и $W^{1,p}$ отображений $f:D\to\mathbb{R}^n$ совпадают.

2. Абсолютная непрерывность на линиях гипер (α,Q)-гомеоморфизмов.

Теорема. *Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и пусть $f:D\to D'$ – гипер (α,Q)-гомеоморфизм с $Q\in L^1_{\rm loc}(D)$, $\alpha>n-1$. Тогда $f\in ACL$.*

Доказательство. Пусть $I=\{x\in\mathbb{R}^n: a_i<x_i<b_i,\ i=1,\ldots,n\}$ – n-мерный интервал в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\overline{I}\subset D$. Тогда $I=I_0\times J$, где $J=(a_n,b_n)$, $I_0=P_n(I)$, $P_n(x)=x-x_ne_n$ – ортогональная проекция. Положим $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$, тогда $x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n$. Необходимо доказать, что для почти всех $x'\in I_0$ отображение $t\to f(x'+te_n)$ абсолютно непрерывно по $t\in(a_n,b_n)$.

Действительно, пусть r_l и ρ_l, $l=1,2,\ldots$ – какая-либо перенумерация всех пар рациональных чисел таких, что $a_n<r_l<\rho_l<b_n$, и пусть

$$\varphi_l(x') := \int\limits_{r_l}^{\rho_l} Q(x', x_n)\, dx_n\,.$$

По теореме Фубини, см., напр., III.8.1 в [12], функция $\varphi_l(x')$ п.в. конечна и интегрируема по $x' \in I_0$ и, следовательно, по теореме Лебега о дифференцировании неопределенного интеграла, см., напр., IV.6.3 в [12], получаем, что п.в.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Phi_l(x';h)}{h^{n-1}} = \varphi_l(x')\,, \tag{1}$$

где

$$\Phi_l(x';h) = \int\limits_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}} \dots \int\limits_{x_{n-1}-\frac{h}{2}}^{x_{n-1}+\frac{h}{2}} \varphi_l(y')\, dm(y')\,.$$

Заметим также, что по теореме о дифференцируемости неотрицательной субаддитивной функции множеств, см., напр., III.2.4 в [11], существует конечный предел

$$L(x') := \lim_{h\to 0} \frac{|f\, I(x';h)|}{h^{n-1}} \tag{2}$$

для п.в. $x' \in I_0$, где

$$I(x';h) = \{(z', z_n) \in I : x_i - \frac{h}{2} < z_i < x_i + \frac{h}{2}, i = 1, \dots, n-1,\ a_n < z_n < b_n\}\,.$$

Здесь объем $|f(B \times J)|$ соответствует каждому борелевскому множеству B в I_0.

Докажем, что отображение f абсолютно непрерывно на каждом интервале $x' \times J$, $x' \in I_0$, где существуют конечные пределы (1) и (2). Для этого покажем, что для всех таких x' сумма

$$\sum_{k=1}^{s} \left| f(x' + \beta_k e_n) - f(x' + \alpha_k e_n) \right|$$

стремится к нулю вместе с суммой $\sum\limits_{k=1}^{s} |\beta_k - \alpha_k|$, где (α_k, β_k), $k = 1, 2, \dots, s$ – произвольная система непересекающихся интервалов в J. В силу непрерывности отображения f на каждом из указанных интервалов $x' \times J$ достаточно доказать этот факт только для рациональных α_k и β_k.

Выберем $h > 0$ такое, что $a_i < x_i - \frac{h}{2} < x_i + \frac{h}{2} < b_i$, $i = 1, \dots, n-1$, и положим для всех $k = 1, 2, \dots, s$

$$I_k = I_k(x';h) = \{(z', z_n) \in I : x_i - \frac{h}{2} < z_i < x_i + \frac{h}{2},\ \alpha_k < z_n < \beta_k\}\,.$$

Обозначим через Γ_k – семейство всех кривых, соединяющих грани $z_n = \alpha_k$ и $z_n = \beta_k$ в $\overline{I_k}$. Пользуясь обобщенным неравенством Ренгеля, см. стр.70 в [3], получаем

$$M_{\frac{\alpha}{\alpha+1-n}}(f\Gamma_k) \leqslant \frac{m_k}{d_k^{\frac{\alpha}{\alpha+1-n}}}\,, \tag{3}$$

где $d_k = d_k(h)$ – евклидово расстояние между образами граней $z_n = \alpha_k$ и $z_n = \beta_k$, а $m_k = |fI_k|$. Заметим, что при $h \to 0$ эти грани стягиваются в точки $f(x' + \alpha_k e_n)$ и $f(x' + \beta_k e_n)$, соответственно.

Кроме того, обозначим через Σ_k – семейство всех $(n-1)$-мерных поверхностей, отделяющих те же грани в $\overline{I_k}$. Тогда функция

$$\varrho_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x \in I_k\,, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus I_k \end{cases}$$

является допустимой для Σ_k. Следовательно, из определения гипер (α, Q)-гомеоморфизма получаем

$$M_\alpha(f\Sigma_k) \leqslant \frac{1}{h^\alpha} \int\limits_{I_k} Q(x)\, dm(x) = \frac{1}{h^{\alpha+1-n}} \cdot \frac{\Phi_k(x';h)}{h^{n-1}}\,. \tag{4}$$

По формуле Циммера, см. [16], получаем

$$M_{\frac{\alpha}{\alpha+1-n}}(f\Gamma_k) = \frac{1}{M_\alpha^{\frac{n-1}{\alpha+1-n}}(f\Sigma_k)}\,,$$

и, таким образом, комбинируя (3) и (4), имеем

$$\left(\frac{d_k^\alpha}{m_k^{\alpha+1-n}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \frac{1}{h^{\alpha+1-n}} \cdot \frac{\Phi_k(x';h)}{h^{n-1}}\,. \tag{5}$$

Далее, из дискретного неравенства Гельдера, см., напр., (17.3) в [1], с $p = \frac{\alpha}{n-1}$ и $q = \frac{\alpha}{\alpha+1-n}$, $x_k = \frac{d_k}{m_k^{\frac{\alpha+1-n}{\alpha}}}$ и $y_k = m_k^{\frac{\alpha+1-n}{\alpha}}$, выводим, что

$$\sum_{k=1}^s d_k \leqslant \left[\sum_{k=1}^s \left(\frac{d_k}{m_k^{\frac{\alpha+1-n}{\alpha}}}\right)^{\frac{\alpha}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{\alpha}} \cdot \left(\sum_{k=1}^s m_k\right)^{\frac{\alpha+1-n}{\alpha}}\,,$$

т.е.

$$\left(\sum_{k=1}^s d_k\right)^\alpha \leqslant m^{\alpha+1-n} \cdot \left[\sum_{k=1}^s \left(\frac{d_k^\alpha}{m_k^{\alpha+1-n}}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]^{n-1}\,,$$

где $m = m(h) = |fI(x';h)|$ и, учитывая (5), получаем

$$\left(\sum_{k=1}^s d_k\right)^\alpha \leqslant \left(\frac{m}{h^{n-1}}\right)^{\alpha+1-n} \left(\sum_{k=1}^s \frac{\Phi_k(x';h)}{h^{n-1}}\right)^{n-1}\,.$$

Устремляя $h \to 0$, имеем

$$\left\{\sum_{k=1}^s \left|f(x'+\beta_k e_n) - f(x'+\alpha_k e_n)\right|\right\}^\alpha \leqslant L^{\alpha+1-n}(x') \left(\sum_{k=1}^s \varphi_k(x')\right)^{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant L^{\alpha+1-n}(x') \left(\sum_{k=1}^{s} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} Q(x', x_n)\, dx_n \right)^{n-1},$$

и абсолютная непрерывность отображения f на интервале $\{x'\} \times J$ следует из абсолютной непрерывности неопределенного интеграла Лебега от Q на том же интервале. $\square$

Следствие. *При условиях теоремы f имеет п.в. частные производные и аппроксимативный дифференциал.*

1. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. – Москва: Наука, 1965.
2. *Bishop C., Gutlyanskii V., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // IJMMS. – 2003. – **22**. – P.1397-1420.
3. *Caraman P.* $n-$Dimensional Quasiconformal Mappings. – Tunbridge Wells, Kent: Abacus Press, 1974.
4. *Ковтонюк Д.* Абсолютная непрерывность на линиях гипер Q- гомеоморфизмов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2007. – **15**. – С.108-114.
5. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* To the theory of mappings with finite area distortion // Reports Dept. Math Univ. Helsinki. – 2004. – **403**. – P.1-11.
6. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On the theory of mappings with finite area distortion // J. Anal. Math. – 2008. – **104**. – P.291-306.
7. *Maz'ya V.* Sobolev classes. – Berlin-New York: Springer, 1985.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – Springer, New York, 2008.
9. *Мартио О., Рязанов В., Сребро У., Якубов Э.* К теории $Q-$гомеоморфизмов // Доклады РАН. – 2001. – **381**, № 1. – С.20-22.
10. *Полецкий Е.А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сборник. – 1970. – **83** (125), №2. – С.261-272.
11. *Rado T., Reichelderfer P.V.* Continuous transformations in analysis. – Berlin etc.: Springer, 1955.
12. *Saks S.* Theory of the Integral. – New York: Dover Publ. Inc., 1964.
13. *Salimov R.R.* ACL and differentiability of Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2008. – **33**. – P.295-301.
14. *Салимов Р.Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость (α, Q)-гомеоморфизмов при $Q \in L^1_{\rm loc}$ // Укр. матем. журнал (подготовка к печати).
15. *Тамразов П.М.* Модули и экстремальные метрики в неориентированных и скрученных римановых многообразиях // Укр. матем. ж. – 1998. – **50**, №10. – С.1388-1398.
16. *Ziemer W.P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **126**, no.3. – P.460-473.
17. *Шабат Б.В.* К теории квазиконформных отображений в пространстве // ДАН СССР. – 1960. – **132**, №5. – С.1045-1048.
18. *Шабат Б.В.* Метод модулей в пространстве // ДАН СССР. – 1960. – **130**, №6. – С.1210-1213.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`denis_ kovtonyuk@bk.ru`

Получено 16.11.09