УДК 517.5

©2009. **В.П. Заставный**

О ВЕЛИЧИНАХ, СВЯЗАННЫХ С КРАТНО МОНОТОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Для кратно монотонной функции $h \in M_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, с условиями $0 < h(+0) \le 1$ и $h(+\infty) = 0$ определяется величина $\gamma_m(\rho, h)$, $\rho \ge 1$, как точная верхняя грань тех $\gamma \in \mathbb{R}$, для которых функция $\frac{1-(1+\gamma x)h(x)}{x^\rho} \in M_m$. В работе указанная величина вычисляется для функций e^{-t}, $(1+t)^{-\mu}$ и $(1-t)_+^{\mu}$.

1. Определения и формулировка основных результатов.

Определение 1. Функция h называется m-кратно монотонной, $m \in \mathbb{N}$, если $h \in C^{m-1}(0,+\infty)$ и функция $(-1)^{m-1}h^{(m-1)}$ – неотрицательна, убывает, выпукла вниз на $(0,+\infty)$, и существует конечный предел $h(+\infty) \ge 0$. Класс таких функций обозначим через M_m.

Для функции $h \in M_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, с условиями $0 < h(+0) \le 1$ и $h(+\infty) = 0$ определим величину $\gamma_m(\rho, h)$, $\rho \ge 1$, как точную верхнюю грань тех $\gamma \in \mathbb{R}$, для которых функция $\lambda_{\rho,\gamma}(x) \in M_m$, где

$$\lambda_{\rho,\gamma}(x) = \frac{1-(1+\gamma x)h(x)}{x^\rho} = \frac{1-h(x)}{x^\rho} - \gamma\frac{h(x)}{x^{\rho-1}}\,. \tag{1}$$

Замечание 1. Из леммы 1 вытекает, что для любой функции $h \in M_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, с условиями $0 < h(+0) \le 1$ и $h(+\infty) = 0$, при любом $\rho \ge 1$ выполняется неравенство $0 \le \gamma_m(\rho, h) < +\infty$.

Теорема 1. *Пусть $h(t) = e^{-t}$ и $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\gamma_m(1,h) = \frac{1}{m+2}$, $\gamma_m(\rho,h) = 1$ при $\rho \ge 2$. Если $1 < \rho < 2$, то $0 < \widetilde{\gamma}_{m+1}(\rho) \le \gamma_m(\rho,h) < 1$, где*

$$\begin{aligned} &\widetilde{\gamma}_n(\rho) = \min\left\{\frac{f_{k,n}(\rho)}{k(\rho-1)}\,,\, k = 1,\dots,n+1\right\}\,,\, n \in \mathbb{N}\,,\\ &f_{k,n}(\rho) = \frac{\Gamma(\rho+n)\Gamma(n-k+2)}{\Gamma(\rho+n-k)\Gamma(n+1)} - (n-k+1)\,,\, 1 \le k \le n+1\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $h_\mu(t) = (1+t)^{-\mu}$, $\mu \ge 1$ и $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\gamma_m(\rho, h_\mu) = \mu$ при $\rho \ge 2$, $\gamma_m(1, h_\mu) = \frac{\mu+m+1}{m+2}$, $\gamma_m(\rho, h_1) = 1$ при $\rho \ge 1$. Если $1 \le \rho < 2$, $\mu > 1$, то $\gamma_m(\rho, h_\mu) < \mu$.*

Теорема 3. *Пусть $H_\mu(t) = (1-t)_+^\mu$, $\mu \ge m+1$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\gamma_m(1, H_\mu) = \frac{\mu-m-1}{m+2}$ и $\gamma_m(\rho, H_\mu) = \mu$ при $\rho \ge 2$. Если $1 \le \rho < 2$, то $\gamma_m(\rho, H_\mu) < \mu$.*

2. Свойства функций из M_m.

Теорема 4. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда следующие три условия эквивалентны.*

Работа выполнена при поддержке ДФФД, проект Ф25.1/055

1. *$h \in C^{m-1}(0,+\infty)$ и функции $(-1)^k h^{(k)}$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, неотрицательны, убывают и выпуклы вниз на $(0,+\infty)$.*
2. *Функция $h \in M_m$.*
3. *Существует неотрицательная борелевская мера μ на $[0,+\infty)$, для которой величина $\mu([0,a])$ конечна для всех $a > 0$ и*

$$h(x) = \int_0^{+\infty} (1-xs)_+^m \, d\mu(s) \, , \; x > 0 \, . \tag{3}$$

Из представления (3) следует, что $h(+\infty) = \mu(\{0\})$ и $h(+0) = \mu([0,+\infty))$. Формулу (3) для кратно монотонных функций в 1940г. получил Schoenberg. Доказательство теоремы 4 можно найти в работе Williamson [1] (см. также работу Lévy [2]).

Из теоремы 4, вытекает, что $M_{m+1} \subset M_m$. Отметим следующие два свойства (см. [1]): **1)** Если $f,g \in M_m$, то и $fg \in M_m$. **2)** Если $f \in M_m$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k f^{(k)}(x) = 0$ при $k = 1,\ldots,m$ (у выпуклой функции во всех точках существуют односторонние производные, которые совпадают почти всюду).

Введем следующие функции

$$\varphi_m(x) := (m+1)\int_0^1 (1-xs)_+^m \, ds \, , \; x \geq 0 \, , \; m \in \mathbb{N} \, .$$

Из теоремы 4 вытекает, что $\varphi_m \in M_m$. Очевидно $\varphi_m \in C^{m-1}[0,+\infty)$ и

$$\varphi_m(x) = \frac{1-(1-x)_+^{m+1}}{x} \, , \; x > 0 \, ; \; \varphi_m^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}, \; x > 1, \; k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Поэтому для любой неотрицательной конечной борелевской меры μ на $[0,+\infty)$

$$f(x) := \int_0^{+\infty} \varphi_m(xs) s \, d\mu(s) \in M_m \, . \tag{5}$$

Следствие 1. *Если $h \in M_{m+1}$ при некотором $m \in \mathbb{N}$ и существует конечный предел $h(+0) \leq 1$, то $\lambda(x) = \frac{1-h(x)}{x} \in M_k$ при всех $k = 1,\ldots,m$.*

Доказательство. Для функции h имеет место представление (3) (с заменой m на $m+1$). В нашем случае мера μ из этого представления конечна и $h(+0) = \mu([0,+\infty))$. Учитывая (5), получаем, что

$$\lambda(x) = \frac{1-h(+0)}{x} + \frac{h(+0)-h(x)}{x} = \frac{1-h(+0)}{x} + \int_0^{+\infty} \varphi_m(xs) s \, d\mu(s) \in M_m \, .$$

Осталось учесть, что $M_m \subset M_k$ при всех $k = 1,\ldots,m$.

Замечание 2. Очевидно $f \in M := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} M_m \iff f \in C^\infty(0,+\infty)$ и неравенство $f^{(k)}(x) \geq 0$ выполняется для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $x > 0$. Такие функции называются вполне монотонными на $(0,+\infty)$. Теорема Бернштейна-Хаусдорфа-Уиддера [3, 4, 5] утверждает, что функция f вполне монотонна на $(0,+\infty)$ $(f \in M)$ $\iff$

$f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,d\mu(t)$, $x>0$, где μ неотрицательная борелевская мера на $[0,+\infty)$ такая, что интеграл сходится для всех $x>0$. Из следствия 1 вытекает, что $\lambda(x)=\frac{1-h(x)}{x}\in M$ для любой функции $h\in M$ с условием $h(+0)\le 1$.

3. Общие свойства величины $\gamma_m(\rho,h)$ и функции $\lambda_{\rho,\gamma}(x)$.

Лемма 1. *Если при некотором $m\in\mathbb{N}$ функция $h\in M_{m+1}$, $0<h(+0)\le 1$ и $h(+\infty)=0$, то справедливы следующие утверждения:*

1. *Если при некоторых $\rho\ge 1$, $\gamma\in\mathbb{R}$ функция $(-1)^{m-1}\lambda_{\rho,\gamma}^{(m-1)}(x)$ выпукла вниз на $(0,+\infty)$, то $(-1)^{m-1}\lambda_{\rho,\gamma}^{(m-1)}(x)$ неотрицательна и убывает к нулю на $(0,+\infty)$ и, значит, функция $\lambda_{\rho,\gamma}(x)\in M_m$.*
2. *Если $\rho\ge 1$, то $0\le\gamma_m(\rho,h)<+\infty$.*
3. *Если $\rho\ge 1$, то $(-1)^{m-1}\lambda_{\rho,\gamma}^{(m-1)}(x)$ выпукла вниз на $(0,+\infty)$ $\iff$ $\lambda_{\rho,\gamma}(x)\in M_m$ $\iff$ $\gamma\le\gamma_m(\rho,h)$.*
4. *Функция $\gamma_m(\rho,h)$ возрастает по $\rho\in[1,+\infty)$.*
5. *Если дополнительно $h\in M_{m+2}$, то $\gamma_{m+1}(\rho,h)\le\gamma_m(\rho,h)$ при $\rho\ge 1$.*

Доказательство. Из следствия 1 вытекает, что обе функции $\frac{1-h(x)}{x}$ и $h(x)$ принадлежат классу M_m. Так как $x^{-\varepsilon}\in M_m$ при всех $\varepsilon\ge 0$, то обе функции $f(x)=\frac{1-h(x)}{x^\rho}$ и $g(x)=\frac{h(x)}{x^{\rho-1}}$ принадлежат классу M_m при всех $\rho\ge 1$. Отсюда следует, что $\gamma_m(\rho,h)\ge 0$. Из свойств функций из M_m вытекает, что $f^{(k)}(+\infty)=0$ и $g^{(k)}(+\infty)=0$ при всех $k=1,\dots,m$, а если $h(+\infty)=0$, то и при $k=0$. Поэтому $\lambda_{\rho,\gamma}^{(m-1)}(+\infty)=0$ при любых $\rho\ge 1$ и $\gamma\in\mathbb{R}$. Отсюда следует утверждение 1. Равенство $\gamma_m(\rho,h)=+\infty$ не возможно, ибо в противном случае функция $\frac{h(x)}{x^{\rho-1}}$ будет одновременно выпуклой вниз и вверх на $(0,+\infty)$, что противоречит условиям $h(+\infty)=0$ и $h(+0)>0$. Утверждение 3 вытекает из первого. Утверждение 4 вытекает из того, что произведение двух функций из M_m также является функцией из M_m. Утверждение 5 вытекает из вложений $M_{m+2}\subset M_{m+1}\subset M_m$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $m\in\mathbb{N}$ и $h\in M_{m+1}\bigcap C^{m+1}(0,+\infty)$, $0<h(+0)\le 1$, $h(+\infty)=0$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Функция $\lambda_{\rho,\gamma}(x)=\frac{1-(1+\gamma x)h(x)}{x^\rho}\in M_m$ $\iff$ $(-1)^{m+1}\lambda_{\rho,\gamma}^{(m+1)}(x)\ge 0$ для всех $x>0$.*
2. *Если $\rho\ge 1$, то $\gamma_m(\rho,h)=\inf_{x>0}\frac{\left(\frac{1-h(x)}{x^\rho}\right)^{(m+1)}}{\left(\frac{h(x)}{x^{\rho-1}}\right)^{(m+1)}}$, где точная нижняя грань вычисляется по всем $x>0$, для которых знаменатель отличен от нуля.*
3. *Если дополнительно $h\in C^1[0,+\infty)$, $h(0)=1$, то $\gamma_m(\rho,h)\le -h'(0)$, $\rho\ge 1$.*
4. *Если дополнительно $h\in C^{m+2}[0,+\infty)$, $h(0)=1$, то справедливо неравенство $(-1)^{m+1}h^{(m+1)}(0)>0$ и*

$$\gamma_m(1,h)=\inf_{x>0}\left\{-\frac{\int_0^x t^{m+1}h^{(m+2)}(t)\,dt}{x^{m+2}h^{(m+1)}(x)}\right\}\le -\frac{1}{m+2}\cdot\frac{h^{(m+2)}(0)}{h^{(m+1)}(0)}\,, \qquad (6)$$

где точная нижняя грань вычисляется по всем $x>0$, для которых знаменатель отличен от нуля.

5. *Если дополнительно $h\in C^{m+2}[0,+\infty)$, $h(0)=1$ и $h''(0)<2(h'(0))^2$, то при $1\le\rho<2$ выполняется неравенство $\gamma_m(\rho,h)<-h'(0)$.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из леммы 1. Утверждение 2 вытекает из первого, следует только учесть, что при $\rho\ge 1$ выпуклыми вниз на $(0,+\infty)$ являются обе функции $(-1)^{m-1}\left(\frac{1-h(x)}{x^\rho}\right)^{(m-1)}$ и $(-1)^{m-1}\left(\frac{h(x)}{x^{\rho-1}}\right)^{(m-1)}$.

Докажем утверждения 3 и 4. Очевидно при $0\le n\le m+1$ справедливо равенство

$$\lambda^{(n)}_{\rho,\gamma}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,(1-(1+\gamma x)h(x))^{(k)}\,\frac{(-1)^{n-k}\Gamma(\rho+n-k)}{\Gamma(\rho)}\,x^{-\rho-n+k}\,.$$

Если $1\le n\le m+1$, то после не сложных преобразований получаем

$$\begin{gathered}\Gamma(\rho)x^{\rho+n}(-1)^n\lambda^{(n)}_{\rho,\gamma}(x)=(1-h(x))\Gamma(\rho+n)-\gamma\Gamma(\rho)x^{n+1}(-1)^nh^{(n)}(x)-\\ -\sum_{k=1}^{n}\Gamma(\rho+n-k)C_n^kx^k\left((-1)^kh^{(k)}(x)+\frac{\gamma k(\rho-1)}{n-k+1}(-1)^{k-1}h^{(k-1)}(x)\right)\,.\end{gathered} \qquad (7)$$

Если $\lambda_{\rho,\gamma}(x)\in M_m$, то выражение (7) должно быть неотрицательным при всех $1\le n\le m+1$ и $x>0$. Если дополнительно $h\in C^1[0,+\infty)$, $h(0)=1$, то из (7) при $n=1$ вытекает неравенство $(\rho-1)(h'(0)+\gamma)\le 0$. Поэтому при $\rho>1$ должно выполняться неравенство $\gamma_m(1,h)\le\gamma_m(\rho,h)\le -h'(0)$. Утверждение 3 доказано.

Докажем утверждение 4. Пусть $h\in C^{m+2}[0,+\infty)$, $h(0)=1$. Тогда при $0\le n\le m+1$ справедливо равенство

$$1=h(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k(-1)^kh^{(k)}(x)}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^x t^n(-1)^{n+1}h^{(n+1)}(t)\,dt\,,\; x>0\,. \qquad (8)$$

Из последнего равенства находим выражение для $(1-h(x))$ и подставляем его в (7). Тогда при $1\le n\le m+1$ будет выполняться равенство

$$\begin{aligned}&\Gamma(\rho)x^{\rho+n}(-1)^n\lambda^{(n)}_{\rho,\gamma}(x)=\\ &\frac{\Gamma(\rho+n)}{n!}\int_0^x t^n(-1)^{n+1}h^{(n+1)}(t)\,dt-\gamma\Gamma(\rho)x^{n+1}(-1)^nh^{(n)}(x)+\\ &\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\rho+n-k)C_n^kx^k}{n-k+1}\left((-1)^kh^{(k)}(x)f_{k,n}(\rho)-\gamma k(\rho-1)(-1)^{k-1}h^{(k-1)}(x)\right)\,,\end{aligned} \qquad (9)$$

где $f_{k,n}(\rho)=\frac{\Gamma(\rho+n)\Gamma(n-k+2)}{\Gamma(\rho+n-k)\Gamma(n+1)}-(n-k+1)$. При $1\le n\le m+1$ и $\rho=1$ получаются равенства

$$x^{n+1}(-1)^n\lambda^{(n)}_{1,\gamma}(x)=\int_0^x t^n(-1)^{n+1}h^{(n+1)}(t)\,dt-\gamma x^{n+1}(-1)^nh^{(n)}(x)\,. \qquad (10)$$

Отсюда вытекает, что при $1 \le n \le m+1$ и $x > 0$ справедливы равенства
$$\left(\frac{1-h(x)}{x}\right)^{(n)} = -\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n h^{(n+1)}(t)\,dt\,. \tag{11}$$
Из последнего равенства при $n = m+1$ и утверждения 2 вытекает справедливость равенства в (6). Неравенство в (6) очевидно, следует только учесть, что из (3) вытекает неравенство $(-1)^{m+1}h^{(m+1)}(0) > 0$ (в противном случае $h(x) \equiv const$ на $(0,+\infty)$, что противоречит условию $h(+\infty) < h(+0)$). Утверждение 4 доказано.

Докажем утверждение 5. Пусть $h \in C^{m+2}[0,+\infty)$, $h(0) = 1$ и $\gamma = -h'(0)$. Из равенства (9) вытекает, что при $2 \le n \le m+1$ и $x \to +0$ справедливо соотношение
$$\Gamma(\rho)x^{\rho+n}(-1)^n\lambda^{(n)}_{\rho,\gamma}(x) = \frac{(\rho-1)(2-\rho)}{2}\Gamma(\rho+n-2)(h''(0)-2(h'(0))^2)x^2 + o(x^2).$$
Если $h''(0) - 2(h'(0))^2 < 0$, то при $1 < \rho < 2$ при достаточно малых положительных x будет выполняться неравенство $(-1)^{m+1}\lambda^{(m+1)}_{\rho,\gamma}(x) < 0$ и, значит, $\gamma_m(1,h) \le \gamma_m(\rho,h) < -h'(0)$. Лемма 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Из равенства (9) вытекает, что при всех $\rho \ge 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и $x > 0$ выполняются соотношения
$$\begin{gathered}\Gamma(\rho)x^{\rho+n}(-1)^n\lambda^{(n)}_{\rho,\gamma}(x) = \frac{\Gamma(\rho+n)}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\,dt - \gamma\Gamma(\rho)x^{n+1}e^{-x} + \\ e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\rho+n-k)C_n^k x^k}{n-k+1}\left(f_{k,n}(\rho)-\gamma k(\rho-1)\right) > \\ \left(\frac{\Gamma(\rho+n)}{(n+1)!} - \gamma\Gamma(\rho)\right)x^{n+1}e^{-x} + \\ e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\rho+n-k)C_n^k x^k}{n-k+1}\left(f_{k,n}(\rho)-\gamma k(\rho-1)\right)\,.\end{gathered} \tag{12}$$
Если взять $\rho = 1$ и $\gamma = \frac{1}{m+2}$, то $(-1)^{m+1}\lambda^{(m+1)}_{1,\gamma}(x) > 0$ при $x > 0$. Поэтому $\gamma_m(1,h) \ge \frac{1}{m+2}$. Противоположное неравенство вытекает из (6).

Если в (12) взять $\rho = 2$ и $\gamma = 1$, то $(-1)^n\lambda^{(n)}_{2,1}(x) > 0$ при всех $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому при любых $m \in \mathbb{N}$ и $\rho \ge 2$ выполняются неравенства $1 \le \gamma_m(2,h) \le \gamma_m(\rho,h) \le -h'(0) = 1$ и, значит, $\gamma_m(\rho,h) = 1$ при всех $\rho \ge 2$.

Если при $\rho > 1$ в (12) взять $\gamma = \widetilde{\gamma}_n(\rho)$ (см. (2)), то $(-1)^n\lambda^{(n)}_{\rho,\gamma}(x) > 0$ при всех $x > 0$. Здесь мы учли, что при $k = n+1$ справедливо равенство $\frac{f_{k,n}(\rho)}{k(\rho-1)} = \frac{\Gamma(\rho+n)}{(n+1)!\,\Gamma(\rho)}$. Поэтому $\widetilde{\gamma}_{m+1}(\rho) \le \gamma_m(\rho,h)$ при всех $m \in \mathbb{N}$ и $\rho > 1$. Так как при фиксированном $1 \le k \le n$ функция $\frac{\Gamma(\rho+n)}{\Gamma(\rho+n-k)} = \prod_{j=1}^{k}(\rho+n-j)$ строго возрастает по $\rho > 0$, то $f_{k,n}(\rho) > f_{k,n}(1) = 0$ при всех $\rho > 1$ и $1 \le k \le n$. Поэтому $\widetilde{\gamma}_n(\rho) > 0$ всех $\rho > 1$ и $n \in \mathbb{N}$.

Неравенство $\gamma_m(\rho,h) < 1$ при $1 < \rho < 2$ вытекает из леммы 2. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. *Если $h \in M$ и $h(+0) \le 1$, то $\lambda(x) = \frac{1-h(x)+xh'(x)}{x^2} \in M$.*

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что функция $\varphi(x) = \frac{1-(1+x)e^{-x}}{x^2}$ является вполне монотонной на $(0,+\infty)$. Очевидно $\varphi \in C^\infty(0,+\infty)$ и при любом $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $\varphi^{(n)}(s)s^{n+2}$ непрерывна и ограничена на $(0,+\infty)$ (см. равенство (12) при $\rho = 2$). Поэтому для любой неотрицательной конечной борелевской меры μ на $[0,+\infty)$

$$f(x) := \int_{(0,+\infty)} \varphi(xs)s^2\, d\mu(s) \in M\,. \tag{13}$$

Если $h \in M$, $h(+0) \le 1$, то по теореме Бернштейна-Хаусдорфа-Уиддера $h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xs}\, d\mu(s)$, $x > 0$, где μ неотрицательная борелевская мера на $[0,+\infty)$ такая, что интеграл сходится для всех $x > 0$. В нашем случае мера μ из этого представления конечна (т.к. $h(+0) = \mu([0,+\infty))$) и

$$h(+0) - h(x) = \int_{[0,+\infty)} (1 - e^{-xs})\, d\mu(s) = \int_{(0,+\infty)} (1 - e^{-xs})\, d\mu(s)\,,\ x > 0\,.$$

Учитывая (13), получаем, что

$$\begin{aligned}\lambda(x) =& \frac{1-h(+0)}{x^2} + \frac{h(+0) - h(x) + xh'(x)}{x^2} = \\ & \frac{1-h(+0)}{x^2} + \int_{(0,+\infty)} \varphi(xs)s^2\, d\mu(s) \in M\,.\end{aligned}$$

Следствие 2 доказано.

5. Доказательство теоремы 2. К функции $h(x) = (1+x)^{-\mu+1}$, $\mu \ge 1$ применяем следствие 2. Тогда $\frac{1-h(x)+xh'(x)}{x^2} = \frac{1-(1+\mu x)h_\mu(x)}{x^2} \in M$. Поэтому при любых $m \in \mathbb{N}$ и $\rho \ge 2$ выполняются неравенства $\mu \le \gamma_m(2,h_\mu) \le \gamma_m(\rho,h_\mu) \le -h_\mu'(0) = \mu$ и, значит, $\gamma_m(\rho,h_\mu) = \mu$ при всех $\rho \ge 2$.

Пусть $\lambda_{\rho,\gamma,\mu}(x) = \frac{1-(1+\gamma x)h_\mu(x)}{x^\rho}$ и $\psi_{\rho,\gamma,\mu}(x) = \Gamma(\rho)x^{\rho+n}(-1)^n\lambda^{(n)}_{\rho,\gamma,\mu}(x)$. Если взять $\rho = 1$ и $\gamma = \frac{\mu+n}{n+1}$, то из равенства (10) вытекает, что $\psi\,'_{1,\gamma,\mu}(x) = x^{n+1}(-1)^n$ $h_\mu^{(n)}(x)\frac{(\mu+n)(\mu-1)}{n(1+x)} \ge 0$ при $x \ge 0$. Поэтому $\psi_{1,\gamma,\mu}(x) \ge \psi_{1,\gamma,\mu}(+0) = 0$ при $x > 0$. Таким образом, если $n \in \mathbb{N}$, $\mu \ge 1$ и $\gamma = \frac{\mu+n}{n+1}$, то при всех $x > 0$ выполняется неравенство $(-1)^n\lambda^{(n)}_{1,\gamma,\mu}(x) \ge 0$ (если $\mu > 1$, то $(-1)^n\lambda^{(n)}_{1,\gamma,\mu}(x) > 0$ при $x > 0$). Поэтому

$$\frac{\mu+m+1}{m+2} \le \gamma_m(1,h_\mu) \le -\frac{1}{m+2}\cdot\frac{h^{(m+2)}(0)}{h^{(m+1)}(0)} = \frac{\mu+m+1}{m+2}.$$

Если $\mu = 1$ и $\rho \ge 1$, то $1 = \gamma_m(1,h_1) \le \gamma_m(\rho,h_1) \le -h_1'(0) = 1$.

Неравенство $\gamma_m(\rho,h_\mu) < \mu$ при $1 \le \rho < 2$, $\mu > 1$ вытекает из леммы 2. Теорема 2 доказана.

6. Доказательство теоремы 3. Пусть $\rho \ge 1$, $\mu \ge m+1$ и $\lambda_{\rho,\gamma,\mu}(x) = \frac{1-(1+\gamma x)H_\mu(x)}{x^\rho}$. Очевидно $H_\mu \in M_{m+1}$. Учитывая лемму 1 и то, что функция $(-1)^{m-1}\lambda^{(m)}_{\rho,\gamma,\mu}(x)$ непрерывна $(0,+\infty)$ и возрастает на $[1,+\infty)$, получаем, что следующие пять условий эквивалентны:

1) $\gamma \le \gamma_m(\rho, H_\mu)$. **2)** $\lambda_{\rho,\gamma,\mu}(x) \in M_m$. **3)** Функция $(-1)^{m-1}\lambda^{(m-1)}_{\rho,\gamma,\mu}(x)$ выпукла вниз на $(0,+\infty)$. **4)** Функция $(-1)^{m-1}\lambda^{(m)}_{\rho,\gamma,\mu}(x)$ возрастает на $(0,+\infty)$. **5)** $(-1)^{m+1}\lambda^{(m+1)}_{\rho,\gamma,\mu}(x) \ge 0$ при $x \in (0,1)$.

Так как $h = H_\mu \in C^\infty[0,1)$ и $H_\mu(0) = 1$, то равенства (7)–(10) справедливы при любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (0,1)$. Докажем, что если $\rho = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu \ge n$, то

$$(-1)^n\lambda^{(n)}_{1,\gamma,\mu}(x) \ge 0\,\forall x \in (0,1) \iff \gamma \le -\frac{H_\mu^{(n+1)}(0)}{(n+1)H_\mu^{(n)}(0)} = \frac{\mu-n}{n+1}\,. \qquad (14)$$

Необходимость в (14) вытекает из равенства (10), т.к.

$$(-1)^n\lambda^{(n)}_{1,\gamma,\mu}(+0) = \frac{(-1)^{n+1}H_\mu^{(n+1)}(0)}{(n+1)} - \gamma(-1)^n H_\mu^{(n)}(0)\,.$$

Достаточность в (14) надо доказать только для $\gamma = \frac{\mu-n}{n+1}$. Для указанного γ положим $\psi(x) = x^{n+1}(-1)^n\lambda^{(n)}_{1,\gamma,\mu}(x)$. Из равенства (10) вытекает, что при всех $x \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$\psi'(x) = x^{n+1}(1-x)^{\mu-n-1}\frac{(\mu-n)\Gamma(\mu+2)}{(n+1)\Gamma(\mu-n+1)} \ge 0\,.$$

Поэтому $\psi(x) \ge \psi(+0) = 0$ при $x \in (0,1)$ (если $\mu > n$, то $\psi(x) > 0$ при всех $x \in (0,1)$). Равенство $\gamma_m(1, H_\mu) = \frac{\mu-m-1}{m+2}$ вытекает из (14) при $n = m+1$.

Докажем, что $\gamma_m(\rho, H_\mu) = \mu$ при $\rho \ge 2$. Из равенства (7) при $n = 1$, которое справедливо при $x \in (0,1)$, вытекает неравенство $\gamma_m(\rho, H_\mu) \le -H'_\mu(0)$ при $\rho \ge 1$ (см. доказательство утверждения 3 в лемме 2). Поэтому $\gamma_m(2, H_\mu) \le \gamma_m(\rho, H_\mu) \le \mu$ при $\rho \ge 2$. Неравенство $\gamma_m(2, H_\mu) \ge \mu$ вытекает из очевидного равенства

$$\frac{1-(1+\mu t)(1-t)_+^\mu}{t^2} = \mu(\mu+1)\int_0^1 s(1-st)_+^{\mu-1}\,ds \in M_m\,. \qquad (15)$$

Здесь мы воспользовались условием $\mu \ge m+1$. Неравенство $\gamma_m(\rho, h_\mu) < \mu$ при $1 \le \rho < 2$ доказывается точно так же, как и утверждение 5 в лемме 2. Теорема 3 доказана.

1. *F.R.E. Williamson* Multiply monotone functions and their Laplace transforms, Duke Math. J., **23** (1956), 189-207.
2. *F.P. Lévy* Extensions d'un théoréme de D.Dugué et M. Girault, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, **1** (1962), 159–173.
3. *S.N. Bernstein* Sur les fonctions absolument monotones, Acta Math., **52** (1929), №1. – P.1-66.
4. *F. Hausdorff* Summationsmethoden und Momentfolgen. II, Math. Zeitschrift, **9** (1921), №1. – P.280-299.
5. *D.V. Widder* Necessary and sufficient conditions for the representation of a function as a Laplace integral, Trans. Amer. Math. Soc., **33** (1931), №4. – P.851-892.

Донецкий национальный ун-т
`zastavn@rambler.ru`

Получено 04.09.09