ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2009. Том 19

УДК 517.5

©2009. **Л.В. Елец**

# ОЦЕНКА СНИЗУ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РАДИУСА ПОМПЕЙЮ ДЛЯ ПРЯМОГО КРУГОВОГО КОНУСА

Найдены оценки снизу наименьшего радиуса шара, в котором данное множество является множеством Помпейю. В качестве множества рассматривается прямой круговой конус с радиусом основания $r$ и высотой $h$, где $h \geq r$.

**Введение и формулировка основного результата.** Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Mot}(A,B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n)\colon \lambda A \subset B\}$, $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < R\}$. Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в $B$ (будем обозначать это $A \in \mathrm{Pomp}(B)$), если всякая локально суммируемая функция $f\colon B \to \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0 \quad \forall \lambda \in \mathrm{Mot}(A,B), \tag{1}$$

равна нулю почти всюду в $B$. Классическая проблема Помпейю об описании класса $\mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ изучалась во многих работах, см. обзор [1] и [2] с обширной библиографией. Из результата Вильямса [3] следует, что если граница множества липшицева, но не вещественно-аналитическая, то $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$. В.В.Волчковым было доказано, что если некоторое множество $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$, то $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)$ при достаточно большом $R$. В связи с этим в [6] поставлена следующая

**Проблема.** Для данного множества $A$ найти

$$\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0\colon A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}.$$

Первые результаты, содержащие оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К.А.Беренстейном и Р.Гэем, см. [4]. Достаточно полная история данного вопроса содержится в [3], [4].

В данной работе получены оценки снизу величины $\mathcal{R}(A)$ для множества

$$A = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon 0 \leqslant z \leqslant h\Big(1 - \frac{1}{r}\sqrt{x^2+y^2}\,\Big)\Big\} \tag{2}$$

– прямого кругового конуса с радиусом основания $r$ и высотой $h$, где $h \geq r$.

Всюду в дальнейшем полагается, что $n = 3$ и множество $A$ имеет вид (2). Рассмотрим классы функций $\mathfrak{P}(A,B)$ – множество функций из $L_{loc}(B)$, удовлетворяющих (1); $\mathfrak{P}^n(A,B) = \mathfrak{P}(A,B) \cap \mathrm{C}^n(B)$ $(n = 1,2,\ldots,\infty)$.

Основным результатом работы является

**Теорема.** *Пусть* $h \geq r$, *тогда* $\mathcal{R}(A) \geq (5h^2 + r^2)/(8h)$.

**Геометрические конструкции и вспомогательные утверждения.** Для компактного множества $K$ обозначим $r^*(K) = \inf\{R > 0 : \lambda K \subset B_R, \lambda \in M(n)\}$ – наименьший из радиусов шаров, содержащий $K$. Тогда

$$r^*(A) = \begin{cases} (h^2 + r^2)/(2h), & h > r, \\ r, & h \geq r. \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим образующие конуса в соответствии с рис.1 и $\bar{B}_R = \{x \in R^3 : |x| \leq R\}$. Пусть $Max_*(R, r, h)$ и $Min_*(R, r, h)$ – соответственно наибольшее и наименьшее расстояние от центра шара $\bar{B}_R$ до объекта $*$ (вершины $B$, образующей $AB$, или основания ) конуса $\lambda A$ при всех возможных движениях $\lambda \in Mot(A, \bar{B}_R)$. Для определения величин заметим, что экстремальные расстояния достигаются при расположении треугольника $ABC$ в наибольшем сечении шара, то есть в круге, содержащем центр шара. Поэтому далее будут рассматриваться положения треугольника $ABC$ в круге радиуса $R$.

На рис.1 a) мы видим ближайшее расстояние от вершины $B$ до центра шара. Двигая прямую $AC$ в плоскости $ABC$ или в плоскостях, параллельных основанию конуса, можно только увеличить расстояние от вершины $B$ до центра шара. Остальные же движения конуса в шаре получаются путем совмещения указанных выше и поворотов, которые не дают новых результатов. Таким образом, рис. 1 a) действительно изображает $Min_B(R, r, h)$. Очевидно, этот рисунок показывает и $Max_{base}(R, r, h)$.

Рис.1 b) изображает $Max_{AB}(R, r, h)$. Наибольшим расстоянием от $AB$ до центра шара будет случай, когда вершины $A$ и $B$ лежат на сфере радиуса $R$. В этом случае, для удобства вычислений расстояния. мы всегда можем расположить конус в наибольшем сечении шара.

a) b)

*Рис. 1. Дальнее положение основания и образующей конуса*

Решив геометрические задачи по нахождению упомянутых выше расстояний для соответствующих экстремальных положений $\lambda A$ в $\bar{B}_R$, изображенных на рис.1, приходим к следующим результатам:

$$Max_{base}(R, r, h) = \sqrt{R^2 - r^2}, \quad Min_{base}(R, r, h) = h - R,$$

$$Max_B(R, r, h) = R, \quad Min_B(R, r, h) = h - \sqrt{R^2 - r^2},$$

$$Max_{AB}(R, r, h) = \sqrt{R^2 - \frac{h^2 + r^2}{4}}.$$

Обозначим $\tilde{r}(R,r,h)$ – наименьший радиус шарового слоя, в котором находится основание и вершина $B$ конуса $\lambda A$ при всех $\lambda \in Mot(A, \bar{B}_R)$. Тогда

$$\tilde{r}(R,r,h) = \min\{Min_{base}(R,r,h), Min_B(R,r,h)\} = h - R.$$

Для доказательства основного результата нам понадобится

**Лемма.** *Пусть $0 < \tilde{r} < R$, функция $f \in C^{\infty}(R^n) : f \neq 0$ в $B_{\tilde{r},\infty}$, радиальная и имеет нулевые интегралы по всем прямым, расстояние $d$ от которых до центра шара $B_R$, $d < \tilde{r}$. Тогда для любого конуса $\lambda A \subset B_R$, где $\lambda \in Mot(A, \bar{B}_R)$, вершина $B$ и основание которого лежат в шаровом слое $B_{\tilde{r},R}$, а прямолинейные отрезки имеют непустое пересечение с шаром $B_{\tilde{r}}$, интеграл*

$$\int_{\lambda A} f(x)dx = 0 \quad \forall \lambda \in Mot(A, B_R).$$

*Доказательство.* Доказательство этой леммы в точности повторяет доказательство Леммы 4 (см. [12]). □

**Доказательство основного результата.**

*Доказательство.* Покажем сначала, что при $R < (5h^2 + r^2)/(8h)$ фигура $\lambda A$ удовлетворяет условию леммы. Максимальное расстояние образующих конуса до центра шара $B_R$ не должно превышать $\tilde{r}$, а его основание и вершина $B$ должны находиться в шаровом слое $B_{\tilde{r},R}$. Эти условия обеспечивает система уравнений

$$\begin{cases} Max_{AB}(R,r,h) < \tilde{r}, \\ \tilde{r} > 0, \\ h \geq r \end{cases} \tag{4}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} \sqrt{R^2 - \frac{h^2+r^2}{4}} < h - R, \\ h - R > 0, \\ h \geq r. \end{cases} \tag{5}$$

Решив данную систему, получаем $R < (5h^2 + r^2)/(8h)$ при любых $h \in (-\infty, +\infty)$ и $r \in (-\infty, +\infty)$ Так как конус $\lambda A$ ($\lambda \in Mot(A, \bar{B}_R)$) удовлетворяет условиям леммы, верно следующее

$$\int_{\lambda A} f(x)dx = 0 \quad \forall \lambda \in Mot(A, B_R).$$

Таким образом, при $R < (5h^2+r^2)/(8h)$ функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям леммы, является примером ненулевой функции из класса $\mathfrak{P}^n(A, B)$. Итак, имеем оценку снизу для $\mathcal{R}(A) \geq (5h^2 + r^2)/(8h)$ при $h \geq r$. □

1. *Zalcman L.* A bibliographic survey of Pompeiu problem // Approximation dy solutions of partial differential equations / ed. B. Fuglede et al., 1992. – P.185-194.

2. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to 'A bibliographic survey of Pompeiu problem' in Radon Transforms and Tomography // Comtemp. Math. – 2001. – V.278. – P.69-74.
3. *Williams S.A.* A partial solution of the Pompeiu problem // Math. Ann. 1976. – V.223. – P.183-190.
4. *Berenstein C.A., Gay R.* Le problem de Pompeiu locate // J. Anal. Math. – 1989. – V.52. – P.133-166.
5. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations // Kluwer Academic Publishers DordRecht/Boston/London 2003, 454p.
6. *Volchkov V.V., Volchkov V.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group, // Springer Monographs in Mathematics Springer-Velgrad London 2009, 671p.
7. *Волчков В.В.* О функциях с нулевыми интегралами по кубам // Укр. мат. ж. – 1991. – Т.43 – С.859-863.
8. *Машаров П.А.* Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю // Доповіді НАН України. – 2001. – №7. – С.25-29.
9. *Машаров П.А.* Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело // Вістник Дніпропетровського університету. Математика. – 2001. – Вып.6. – С.72-81.
10. *Машаров П.А.* Про циліндри з локальною властивістю Помпейю // Вістник Донецького національного університету. Серія А. Природничі науки. – 2000. – №1. – С.21-25.
11. *Елец Л.В., Машаров П.А.* Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю // Укр. мат. ж. – 2009. – Т.61. – С.61-72.
12. *Елец Л.В.* Оценка снизу радиуса Помпейю для прямого кругового конуса // Вістник Дніпропетровського університету. Математика. – 2009. – Вып.14. – С.73-79.

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
lyusi@list.ru

Получено 15.10.09