УДК 517.5

©2009. **Ю.П. Дыбов**

КОМПАКТНОСТЬ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

Доказано, что пределом последовательности регулярных гомеоморфизмов класса ACL, отображающих единичный круг $\mathbb{D}$ на себя с $f(0) = 0$, максимальные дилатации $K_\mu(z)$ которых имеют общую мажоранту $Q(z) \in L^1(\mathbb{D})$, является регулярный гомеоморфизм того же класса. Более того, указанный класс гомеоморфизмов компактен, если мажоранта $Q(z)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. В качестве приложений, получены теоремы о компактности классов регулярных решений задачи Дирихле для уравнений Бельтрами с вырождением.

1. Введение. Всюду далее D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – ее одноточечная компактификация, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ и $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$. В дальнейшем в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ используется **сферическая метрика**

$$s(z,\zeta) = \frac{|z-\zeta|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|\zeta|^2}}\,, \quad z \neq \infty \neq \zeta\,; \quad s(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}\,.$$

За остальными определениями и литературой мы отсылаем к предыдущей работе [5]. Напомним также некоторые полезные для дальнейшего факты. Следующее утверждение следует непосредственно из леммы 20.9.1 в [2].

Предложение 1. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ – регулярный гомеоморфизм. Тогда f является кольцевым Q-гомеоморфизмом с $Q = K_{\mu_f}$ в произвольной точке $z_0 \in D$.*

В работе [5] было показано, что регулярный гомеоморфизм $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом с $Q = K_\mu$ и в произвольной граничной точке $z_0 \in \partial\mathbb{D}$. Совершенно аналогично можно показать, что регулярный гомеоморфизм $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ является также кольцевым Q-гомеоморфизмом с $Q = K_\mu$ и относительно любой внешней точки $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Таким образом, переходя к исчерпанию $\mathbb{D}$ кругами меньшего радиуса на основе теоремы Римана о конформном отображении односвязных областей и конформной инвариантности модуля, получаем следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ – регулярный гомеоморфизм. Тогда f является кольцевым Q-гомеоморфизмом с $Q = K_{\mu_f}$ в произвольной точке $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$.*

Пусть $Q : D \to [1, \infty]$ – измеримая функция в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$. Обозначим через $\mathfrak{R}_{\mathbf{Q},\delta}(\mathbf{D})$ класс всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$, таких, что сферический диаметр $s\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)\right) \geq \delta > 0$.

Предложение 3. *Если для $0 < \varepsilon_0 < dist(z_0, \partial D)$ и $p < 2$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z) \cdot \psi^2(|z - z_0|)\, dm(z) \leq c \cdot I^p(\varepsilon) \qquad \forall \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,, \tag{1}$$

где $\psi(t)$ *– неотрицательная измеримая функция на* $(0,\infty)$, $0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty$ $\forall\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, *то* $s\left(f(z), f(z_0)\right) \leq \frac{32}{\delta} \exp\left\{-\left(\frac{2\pi}{c}\right) I^{2-p}(|z-z_0|)\right\}$ *для любых* $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta}(D)$ *и* $z \in B(z_0,\varepsilon_0)$, *см. лемму 3.2 в [15] или 7.6 в [12].*

Предложение 4. *Пусть* $f_m : D \to \mathbb{C}$ *– последовательность сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов класса* ACL *с* $K_{\mu_{f_m}}(z) \leq Q(z) \in L^1_{loc}$, *сходящаяся локально равномерно к гомеоморфизму* f. *Тогда* $f \in W^{1,1}_{loc}$ *и* $K_{\mu_f}(z) \leq Q(z)$ *п.в., см. теорему 3.1 и замечание 3.1 в [16].*

Предложение 5. *Пусть* $A \subset D$ *– измеримое множество,* g *– гомеоморфизм, обладающий частными производными п.в.,* η *– неотрицательная измеримая функция в* $\mathbb{C}$. *Тогда*

$$\int\limits_{A} \eta\left(g(x)\right)|J_g(x)|\ dm(x) \leq \int\limits_{\mathbb{C}} \eta(y)\, dm(y)\,, \tag{2}$$

см. лемму III.3.3 в [9].

Предложение 6. *Если* f *– регулярный гомеоморфизм с* $K_{\mu_f} \in L^1_{loc}$, *то* $f^{-1} \in W^{1,2}_{loc}$ *и* $f^{-1}_w = 0$ *п.в. где* $J_{f^{-1}}(w) = 0$, *см. теорему 1.3 в [8].*

2. Одна геометрическая лемма.

Лемма 1. *Пусть* γ *– жорданова дуга в единичном круге* $\mathbb{D}$, *соединяющая пару точек* z_1 *и* $z_2 \in \partial\,\mathbb{D}$, *и пусть* D *– подобласть* $\mathbb{D}$, *не содержащая* 0, *граница которой образована* γ *и дугой* $\alpha = \alpha(z_1,z_2)$ *единичной окружности* $\partial\,\mathbb{D}$ *с концами* z_1 *и* z_2. *Тогда диаметр области* D *не превышает длины* γ, *т.е. выполнено неравенство* $\operatorname{diam} D \leqslant \operatorname{length}\gamma$.

Отметим, что условие $0 \notin D$ существенно. Если $0 \in D$, то отношение $\operatorname{diam} D/\operatorname{length}\gamma$ может быть сколь угодно большим. Напомним, что $\operatorname{diam} D := \sup\limits_{z_1,\, z_2 \in D} |z_1 - z_2|$, а $\operatorname{length}\gamma = \inf \sum\limits_{i=1}^{k} |\xi_{i+1} - \xi_i|$, где инфимум берётся по всевозможным конечным последовательностям $\xi_i \in |\gamma|$, $i = 1,\ldots,k+1$ с ξ_1 и ξ_{k+1} в концах дуги γ. В дальнейшем мы используем соответствующие сокращения $\delta(D) = \operatorname{diam} D$ и $\ell(\gamma) = \operatorname{length}\gamma$.

Замечание 1. Если D – произвольная жорданова область на плоскости, то очевидно, что $\delta(D) \leq \frac{1}{2}\ell(\partial D)$. Действительно, т.к. $\overline{D}$ – компакт, то диаметр области D реализуется на паре её граничных точек ζ_1 и $\zeta_2 \in \partial D$. Эти точки разбивают ∂D на 2 жордановы дуги, проекции которых на прямую, проходящую через точки ζ_1 и ζ_2, как минимум, дважды, покрывают отрезок $[\zeta_1,\zeta_2]$. Как следует прямо из определения длины, проекции каждой из дуг не больше её длины.

Доказательство. Доказательство леммы 1. Применим рассуждения от противного. Допустим, что существует такая область D с

$$\delta(D) > \ell(\gamma)\,. \tag{3}$$

При этом, без ограничения общности можно предполагать, что $0 \notin \gamma$, т.к. иначе $\ell(\alpha) \geqslant 2$ и (3) становится невозможным.

1) Покажем, во-первых, что в этом случае длина дуги $\alpha = \alpha(z_1, z_2)$ должна быть меньше числа π. Действительно, допустим, что $\ell(\alpha) \geqslant \pi$.

Пусть z_0 – середина дуги $\beta = \partial\mathbb{D} \setminus \alpha$. Тогда луч, исходящий из точки z_0 в направлении начала координат, хотя бы один раз пересечет дугу γ после прохождения 0, ибо в противном случае $0 \in D$, что противоречит условию леммы. Обозначим такую точку пересечения через z_*, а поддуги γ с концами z_*, z_1 и z_*, z_2 через γ_1 и γ_2, соответственно. Тогда ясно (поскольку $\ell(\beta) = 2\pi - \ell(\alpha) \leqslant \pi$), что проекции γ_1 и γ_2 на радиусы $(0, z_1)$ и $(0, z_2)$ не менее 1 каждая (см. рис.1), что противоречит (3).

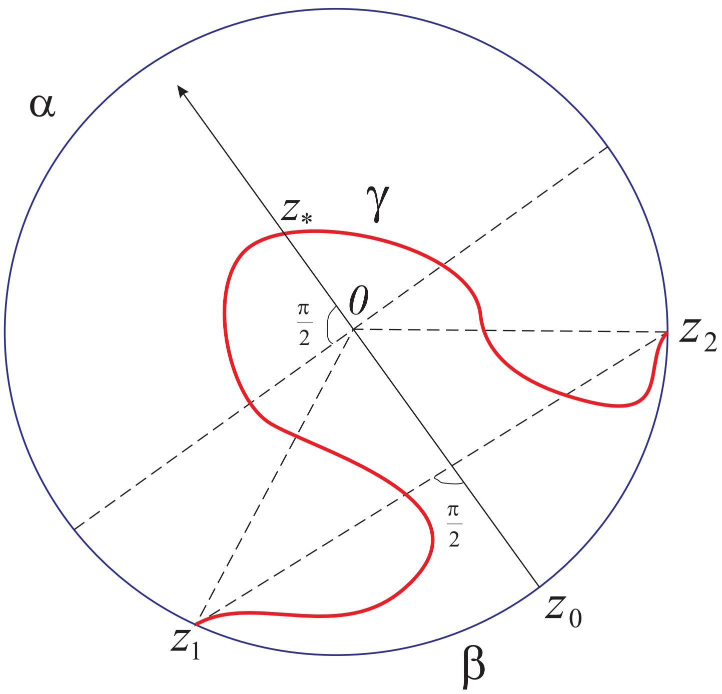

Рис.1.

2) Пусть теперь длина дуги $\alpha = \alpha(z_1, z_2)$ меньше числа π, и выполнено (3). Тогда найдется пара точек ζ_1 и $\zeta_2 \in \partial D$, таких что

$$\delta(D) = |\zeta_1 - \zeta_2| > \ell(\gamma)\,. \tag{4}$$

Ясно, что одновременно обе точки ζ_1 и ζ_2 не могут принадлежать α, ибо в противном случае $|\zeta_1 - \zeta_2| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant \ell(\gamma)$, что противоречит (4). Очевидно также, что ζ_1 и ζ_2 не могут одновременно принадлежать γ, поскольку иначе $|\zeta_1 - \zeta_2| \leqslant \ell(\gamma)$ по определению длины.

Итак, пусть для определенности $\zeta_1 \in \alpha$ и $\zeta_2 \in \gamma$ и, при этом, ζ_1 и ζ_2 не совпадают ни с z_1, ни с z_2. Соединяя ζ_2 с z_1 и z_2 отрезками прямых, мы получаем новую область D_* в $\mathbb{D}$, граница которой состоит из отрезков $[\zeta_2, z_1]$, $[\zeta_2, z_2]$ и дуги α. По построению имеем, что $|\zeta_2 - z_1| + |\zeta_2 - z_2| \leqslant \ell(\gamma)$ и, следовательно, по условию (4)

$$|\zeta_1 - \zeta_2| > \ell(\gamma_*)\,, \tag{5}$$

где $\gamma_* = [\zeta_2, z_1] \cup [\zeta_2, z_2]$.

Заметим, что при этом $0 \notin D_*$, например, по теореме косинусов. Действительно, по теореме косинусов в треугольнике со сторонами a, b, c выполнено равенство $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, где α – угол, образованный сторонами b и c. Допустим, что $0 \in D_*$. Обозначим $\varepsilon = |\zeta_2|$, $\alpha_1 = \angle z_1 0 \zeta_2$, $\alpha_2 = \angle z_2 0 \zeta_2$ и $\alpha_3 = \angle z_1 0 z_2$. Тогда по теореме косинусов в треугольниках $\Delta\, z_1 0 \zeta_2$ и $\Delta\, z_2 0 \zeta_2$

$$|z_1 - \zeta_2|^2 + |z_2 - \zeta_2|^2 = 2\left(1 + \varepsilon^2 - \varepsilon(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\right) =$$

$$= 2\left(1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right).$$

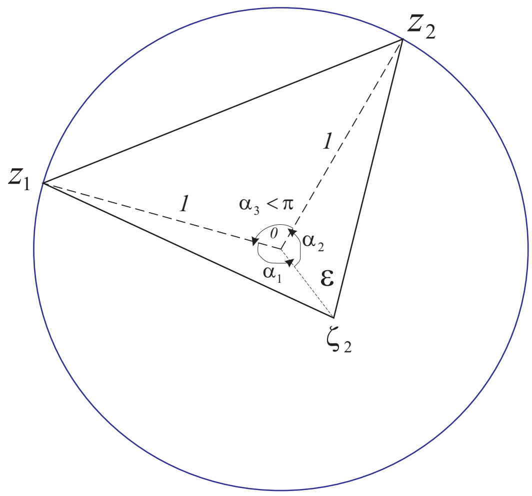

Рис.2.

Однако, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$, α_1, α_2 и $\alpha_3 \in (0, \pi)$ и, следовательно, $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\frac{|\alpha_2-\alpha_1|}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, т.е.

$$|z_1 - \zeta_2|^2 + |z_2 - \zeta_2|^2 \geqslant 2(1 + \varepsilon^2)\,. \tag{6}$$

С другой стороны, снова по теореме косинусов

$$|z_1 - \zeta_2|^2 \cdot |z_2 - \zeta_2|^2 = (1 + \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - 2\varepsilon(1 + \varepsilon^2)(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) =$$

$$= (1 - \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2(1 - \cos\alpha_1\cos\alpha_2) - 4\varepsilon(1 + \varepsilon^2)\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\,,$$

т.е.

$$|z_1 - \zeta_2| \cdot |z_2 - \zeta_2| \geqslant 1 - \varepsilon^2\,. \tag{7}$$

Комбинируя (6) и (7), имеем неравенство $|z_1-\zeta_2|+|z_2-\zeta_2|\geqslant 2$, которое противоречит (5).

Кроме того, $\zeta_2\neq 0$, поскольку $\zeta_2\in\gamma$, а $0\notin\gamma$.

3) Таким образом, задача редуцируется к областям вида D_*. В дальнейшем, мы выбираем $\zeta_1\in\alpha$ так, что

$$|\zeta_1-\zeta_2|=\sup_{\zeta\in\alpha}|\zeta-\zeta_2|\,. \tag{8}$$

Ясно, что $\delta\left(D_*\right)\geqslant|\zeta_1-\zeta_2|$ и поэтому, чтобы опровергнуть возможность неравенства (3), достаточно показать, что неравенство

$$|\zeta_1-\zeta_2|>|\zeta_2-z_1|+|\zeta_2-z_2| \tag{9}$$

для областей D_* невозможно. Пусть, для определенности, $|\zeta_2-z_1|\geqslant|\zeta_2-z_2|$. Тогда замкнутый круг D_1 с центром в точке ζ_2 радиуса $|\zeta_2-z_1|$ содержит обе точки z_1 и z_2. Заметим, что $\zeta_1\notin D_1$ в силу (9) и по построению $z_1\in\partial D_1\cap\partial\mathbb{D}$, а $z_2\in\partial D_1\cap\partial\mathbb{D}$. Поэтому должна найтись вторая точка $z_2^*\in\partial D_1\cap\alpha$. Ввиду (8) точки z_1 и z_2^* должны быть симметрично расположены относительно точки ζ_1 на дуге α. Таким образом, три точки 0, ζ_2 и ζ_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку $[z_1,z_2^*]$, где z_1 и $z_2^*\in\partial D_1\cap\partial\mathbb{D}$. Заметим, что ζ_2 не может принадлежать интервалу $(0,-\zeta_1)$, ибо последнее влечёт включение $0\in(\zeta_1,\zeta_2)$, что невозможно, поскольку $0\notin D_*$, см. рис.3. Включение $\zeta_2\in(\zeta_1,0)$ также невозможно, ибо тогда $|\zeta_2|+|\zeta_2-z_1|>1$ из $\Delta 0\zeta_2 z_1$, см. рис.4, а по (8), $\zeta_1\notin D_1$. Таким образом, мы опровергли возможность неравенства (3). $\Box$

3. О нижней оценке искажения расстояния.

Лемма 2. *Пусть $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ – регулярный гомеоморфизм с $f\left(\mathbb{D}\right)=\mathbb{D}$, $f(0)=0$ и $K_\mu\in L^1(\mathbb{D})$, где $\mu=\mu_f$. Тогда*

$$\left|f\left(z'\right)-f\left(z''\right)\right|\geq\frac{1}{4}\exp\left\{-\frac{8\pi\|K_\mu\|_1}{|z'-z''|^2}\right\}\qquad\forall\quad z',z''\in\mathbb{D}\,. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $z',z''\in\mathbb{D}$, $w'=f\left(z'\right)$ и $w''=f\left(z''\right)$. Если $|w'-w''|\geq 1/4$, то доказывать нечего. Пусть $|w'-w''|<1/4$. Рассмотрим семейство сфер $\{S(w',r)\}$, $r_1<r<r_2$, где $r_1=|w'-w''|$ и $r_2=|w'-w''|^{1/2}$. По предложению 6, $g=f^{-1}\in W_{loc}^{1,2}$ и $f_w^{-1}=0$ п.в. где $J_{f^{-1}}(w)=0$. Тогда, учитывая, что $|2\partial g|^2\geq|\nabla g|^2$ и $|\mu_g|=|\mu_f\circ g|$, см., напр., I.C (4) в [1], по принципу длины и площади, см. теорему 4, с.40 и замечание 5, с.42 в [19], получаем, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\ell^2\left(g\left(S\left(w',r\right)\cap\mathbb{D}\right)\right)\cdot\frac{dr}{r}\quad\leq\quad 2\pi\cdot\int\limits_{\{|w-w'|<r_2\}\cap\mathbb{D}}|\nabla g|^2\;dudv\leq \tag{11}$$

$$\leq 8\pi\cdot\int\limits_{\{|w-w'|<r_2\}\cap\mathbb{D}}|\partial g|^2\;dudv=8\pi\cdot\int\limits_{\{|w-w'|<r_2\}\cap\mathbb{D}}\frac{J_g(w)}{1-|\mu\left(g(w)\right)|^2}\;dudv\leq$$

$$\leq 8\pi \cdot \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{dxdy}{1-|\mu(z)|^2} \leq 8\pi \cdot \int\limits_{\mathbb{D}} K_\mu(z)\ dxdy = 8\pi \|K_\mu\|_1 \,.$$

Здесь замена переменных в интеграле корректна, поскольку $g \in W^{1,2}_{loc}$, см., напр., леммы III.2.1 и III.3.2, и теоремы III.3.1 и III.6.1 в [9]. Таким образом,

$$\ell_0 := \inf_{r\in(r_1,r_2)} \ell\left(g\left(S\left(w',r\right)\cap\mathbb{D}\right)\right) \leq c\cdot\log^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{|w'-w''|}\,, \tag{12}$$

где $c = \sqrt{8\pi\|K_\mu\|_1}$. Если $S\left(w',r\right)\cap\mathbb{D} = S\left(w',r\right)$, то, т.к. g – гомеоморфизм, по замечанию 1 имеем, что $\delta\left(g\left(B(w',r_1)\right)\right) \leq \ell_0$. Если же $S\left(w',r\right)\cap\partial\mathbb{D} \neq \varnothing$, то $0 \notin B\left(w',r\right)$, поскольку $r_2 < 1/2$. Тогда по гомеоморфности g и по нормировке $g(0) = 0$, мы также имеем что $0 \notin g\left(B(w',r_1)\right)$. Заметим, что g продолжается по непрерывности на $\partial\mathbb{D}$, см. следствие 2 из [5]. По лемме 1, см. также замечание 1, снова получаем, что $\delta\left(g\left(B(w',r_1)\right)\right) \leq \ell_0$. Поэтому из (12) заключаем, что $|g(w')-g(w'')| \leq c\cdot\log^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{|w'-w''|}$. т.е. $|f\left(z'\right)-\left(z''\right)| \geq \exp\left\{-\,c^2\left|z'-z''\right|^{-2}\right\}$, где $w' = f\left(z'\right)$, $w'' = f\left(z''\right)$. $\Box$

4. О компактных классах регулярных гомеоморфизмов.

Теорема 1. *Пусть* $f_m:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ *– последовательность регулярных гомеоморфизмов,* $f_m(\mathbb{D})=\mathbb{D}$, $f_m(0)=0$, *удовлетворяющих условию* $K_{\mu_{f_m}}(z)\leq Q(z)\in L^1(\mathbb{D})$. *Если* f_m *сходится локально равномерно в* $\mathbb{D}$ *к некоторому отображению* f, *то* f *является регулярным гомеоморфизмом* $\mathbb{D}$ *на* $\mathbb{D}$ *с* $f(0)=0$ *и* $K_{\mu_f}(z)\leq Q(z)$ *п.в.*

Доказательство. Прежде всего, f – непрерывное отображение как локально равномерный предел непрерывных отображений, см., напр., теорему I.13.3 в [10]. Покажем, что f – гомеоморфизм в $\mathbb{D}$. По лемме 2 при всех $m\in\mathbb{N}$

$$|f_m(z')-f_m(z'')| \quad \geq \quad \psi(|z'-z''|) \qquad \forall\ z'\neq z'',\ z',z''\in\mathbb{D}, \tag{13}$$

где $\psi(t)=\frac{1}{4}\exp\left\{-a/t^2\right\}$, $a=8\pi\|Q\|_1$, $t\in(0,\infty)$ – строго возрастающая непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\psi(t)\to 0$ при $t\to 0$. Переходя в (13) к пределу при $m\to\infty$, получаем, что $|f(z')-f(z'')|\geq\psi(|z'-z''|)>0$ при $z'\neq z''$, т.е. f иньективно и для $g=f^{-1}$ имеем оценку $|g(w')-g(w'')|\leq\psi^{-1}(|w'-w''|)$, где $\psi^{-1}(\tau)\to 0$ при $\tau\to 0$. Таким образом, f – гомеоморфизм в $\mathbb{D}$.

Пусть $g_m(w)=f_m^{-1}(w)$, $w\in\mathbb{D}$. Покажем, что $g_m\to g=f^{-1}$ равномерно в $\mathbb{D}$. Поскольку семейство отображений g_m равностепенно непрерывно в $\mathbb{D}$ по лемме 2 (и продолжается по непрерывности на компакт $\overline{\mathbb{D}}$), достаточно показать, что $g_m(w_0)\to g(w_0)$ для любого фиксированного $w_0\in\mathbb{D}$, см. лемму 2.13 в [15] или лемму 7.2 в [12]. По теореме Арцела-Асколи, см., напр., [4], с.267, семейство отображений g_m, $m=1,2,\ldots$ нормально и по предложению 3.6 из [3] $\overline{\{g_m(w_0)\}}\subset\mathbb{D}$. Для любой сходящейся подпоследовательности $z_k=g_{m_k}(w_0)\to z_0=g(w_0)$ имеем, что $f_{m_k}(z_k)\to f(z_0)$ поскольку множество $\{z_k,\ k=0,1,2,\ldots\}$ – компакт в $\mathbb{D}$. Однако, по построению $f_{m_k}(z_k)=w_0$ для всех $k=1,2,\ldots$, т.е. $g(w_0)=z_0=f^{-1}(w_0)$. Это также доказывает, что $f(\mathbb{D})=\mathbb{D}$.

Применяя предложение 6, см. рассуждения при доказательстве (11), получаем, что $\|\overline{\partial} f_m^{-1}\|_2 \le \|\partial f_m^{-1}\|_2 \le \sqrt{2\pi\|Q\|_1}$ и тогда $f^{-1} \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{D})$ по лемме III.3.5 в [14]. Условие $f^{-1} \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{D})$ влечёт $(N^{-1})-$свойство f, см., напр., теорему III.6.1 в [9] и, следовательно, $J_f(z) \ne 0$ п.в. по теореме 1 в [13]. Наконец, $f \in W_{loc}^{1,1}$ и $K_{\mu_f}(z) \le Q(z)$ п.в. по предложению 5. $\Box$

Обозначим через $\mathfrak{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{D})$ класс всех регулярных гомеоморфизмов $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $f(0) = 0$, с $K_{\mu_f}(z) \le Q(z)$ п.в. Применяя предложение 3 и теорему Арцела-Асколи, см., напр., [4], с.267, получаем:

Следствие 1. *Класс $\mathfrak{R}_Q(\mathbb{D})$ компактен, если $Q \in L^1(\mathbb{D})$ и удовлетворяет какому-либо условию типа (1), в частности, если $Q \in FMO(\mathbb{D})$.*

5. О компактных классах регулярных решений задачи Дирихле. Пусть $\mathfrak{D}_{\mathbf{Q},\varphi}$ – класс всех регулярных решений $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ задачи Дирихле для уравнения Бельтрами с непрерывной граничной функцией $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ и с $K_{\mu_f}(z) \le Q(z)$ п.в. для некоторой измеримой функции $Q(z) : \mathbb{D} \to [1, \infty]$.

Теорема 2. *Класс $\mathfrak{D}_{Q,\varphi}$ компактен при $Q \in FMO(\overline{\mathbb{D}})$ для любой непрерывной функции $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что условие $Q \in$FMO$(\overline{\mathbb{D}})$ влечет, что $Q \in L^1(\mathbb{D})$. Пусть f_m, $m = 1, 2, \ldots$ – произвольная последовательность в $\mathfrak{D}_{Q,\varphi}$. Поскольку каждое f_m по условию открыто и дискретно в $\mathbb{D}$, по теореме Стоилова о факторизации, см. разд.5 гл.V в [18], f_m может быть представлено как композиция

$$f_m = h_m \circ g_m \,, \tag{14}$$

где g_m – гомеоморфизм $\mathbb{D}$ в $\mathbb{C}$, а h_m – аналитическая функция в $g_m(\mathbb{D})$.

Заметим, что случай $g_m(\mathbb{D}) = \mathbb{C}$ невозможен. Действительно, тогда граница $g_m(\mathbb{D})$ в $\overline{\mathbb{C}}$ была бы слабо плоской и, следовательно, g_m продолжался бы до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$ ввиду предложения 2, см. лемму 1 и теорему 3 в работе [11] или леммы 3 и 4 в [17]. Однако, $\partial\mathbb{D}$ не может быть гомеоморфна точке.

Таким образом, граница области $g_m(\mathbb{D})$ содержит не менее двух точек. Следовательно, по теореме Римана существует конформное отображение R_m, такое что $R_m(g_m(\mathbb{D})) = \mathbb{D}$ и $R_m(g_m(0)) = 0$, см., напр., [6], с.29. Тогда согласно (14) $f_m = h_m \circ g_m = h_m \circ R_m^{-1} \circ R_m \circ g_m$, или $f_m = \widetilde{h}_m \circ \widetilde{g}_m$, где $\widetilde{g}_m$ – гомеоморфизм в $\mathbb{D}$, такой что $\widetilde{g}_m(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\widetilde{g}_m(0) = 0$, а $\widetilde{h}_m$ – аналитическая в $\mathbb{D}$ функция. Таким образом, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что в соотношении (14) гомеоморфизм g_m удовлетворяет условию $g_m(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $g_m(0) = 0$, и тогда также $\operatorname{Im} h_m(0) = 0$. Так как по условию $f_m \in W_{loc}^{1,1}$, то также $g_m \in W_{loc}^{1,1}$ и, кроме того, g_m – регулярные гомеоморфизмы и $K_{\mu_f} = K_{\mu_g}$ п.в. Следовательно, $g_m \in \mathfrak{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{D})$ и по следствию 1 найдется подпоследовательность g_{m_k}, которая сходится локально равномерно в $\mathbb{D}$ к некоторому $g \in \mathfrak{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{D})$.

В силу леммы 2 гомеоморфизмы $g_{m_k}^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ продолжимы по непрерывности на $\partial\mathbb{D}$ и продолженные в $\overline{\mathbb{D}}$ отображения $g_{m_k}^{-1}$ равностепенно непрерывны. Поэтому в силу теоремы Арцела-Асколи можно считать, что $g_{m_k}^{-1} \to g^{-1}$ равномерно в $\overline{\mathbb{D}}$ и, в частности, при $k \to \infty$

$$\operatorname{Re} h_{m_k}\left(e^{i\theta}\right) = \varphi \circ g_{m_k}^{-1}\left(e^{i\theta}\right) \to \varphi \circ g^{-1}\left(e^{i\theta}\right) \tag{15}$$

равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$. Кроме того,

$$\operatorname{Im} h_m(0) = \operatorname{Im} f_m \circ g_m^{-1}(0) = 0\,, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}\,. \tag{16}$$

По формуле Шварца, см., напр., §8, гл.III, часть 3 в [7], с.346, и условию (16), при каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ аналитическая функция h_{m_k} в $\mathbb{D}$ однозначно восстанавливается по действительной части $\operatorname{Re} h_{m_k}$ на границе, причём ввиду (15), $\operatorname{Re} h_{m_k} \to \operatorname{Re} h$ равномерно в $\overline{\mathbb{D}}$, см. теорему 2, §9, гл.III, часть 3 в [7], где h – некоторая аналитическая в $\mathbb{D}$ функция, такая что

$$\operatorname{Re} h\left(e^{i\theta}\right) = \varphi \circ g^{-1}\left(e^{i\theta}\right)\ , \tag{17}$$

$\operatorname{Im} h(0) = 0$. Тогда по теореме 3, §9, гл. III, часть 3 в [7] получаем, что последовательность аналитических функций h_{m_k} сходится к функции h при $k \to \infty$ локально равномерно в $\mathbb{D}$.

Поэтому $f_{m_k} = h_{m_k} \circ g_{m_k} \to h \circ g = f$ при $k \to \infty$, где $h(z)$ – аналитическая функция, по теореме Вейерштрасса, см., напр., теорему 1, §1, гл. I в [6]. Отсюда следует, что $f = h \circ g$ – регулярное решение задачи Дирихле для уравнения Бельтрами с $\mu = \mu_f$, такой что $K_{\mu_f}(z) \le Q(z)$ п.в. Кроме того, из условия (17) следует, что

$$\operatorname{Re} f\left(e^{i\Theta}\right) = \operatorname{Re} h \circ g\left(e^{i\Theta}\right) = \varphi\left(e^{i\Theta}\right) \qquad \forall\, \Theta \in [0, 2\pi).$$

□

Замечание 2. Класс $\mathfrak{D}_{Q,\varphi}$ компактен, в частности, если $Q \in BMO$, или $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(z_0,\varepsilon)} Q(z)dxdy < \infty \quad \forall\ z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$, или $q_{z_0}(r) = O\left(\log \frac{1}{r}\right)$ при $r \to 0\ \forall\ z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$, где $q_{z_0}(r)$ – среднее значение Q на окружности $S(z_0, r)$, или $Q(z) = O\left(\log \frac{1}{|z-z_0|}\right)$ при $z \to z_0 \quad \forall\ z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$, или $\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{\|Q\|(r)} = \infty \quad \forall\ z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$, где $\|Q\|(r)$ – норма в L_1 функции Q над дугами окружности $\gamma_r = \mathbb{D} \cap S(z_0, r)$, $\delta(z_0) \in (0, 1)$. В последнем случае необходимо дополнительно предполагать, что $Q \in L^1(\mathbb{D})$.

1. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям, М.: Мир, 1969.
2. *Astala K., Iwaniec T., Martin G.* Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane, Princeton: Princeton Mathematical Series, 48. – Princeton University Press, 2009.
3. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equations. – **54**, no.10. – 2009. – P.935-950.
4. *Dugundji J.* Topology, Boston: Allyn and Bacon, 1966.
5. *Дыбов Ю.П.* Задача Дирихле для уравнений Бельтрами // Труды ИПММ НАН Украины. – **18.** – 2009. – С.62-70.
6. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва: Наука, 1966.

7. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций, Москва: Наука, 1968.
8. *Hencl S., Koskela P.* Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism // Arch. Rat. Mech. Anal. – **180**, no.1. – 2006. – P.75-95.
9. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane, New York etc.: Springer, 1973.
10. *Куратовский К.* Топология, М.: Мир, 1969.
11. *Ломако Т.В.* О распространении кольцевых гомеоморфизмов на границу // Труды ИПММ НАН Украины. – **17.** – 2008. – С.119-127.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, New York: Springer, 2009.
13. *Пономарев С.П.* (N^{-1}) – свойство отображений и (N)-условие Лузина // Матем. заметки. – **58.** – 1955. – С.411-418.
14. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением, Новосибирск: Наука, 1982.
15. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. матем. ж. – **48**, №6. – 2007. – С.1361-1376.
16. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On convergence theory for Beltrami equations // Ukr. Math. Bull. – **5,** no.4. – 2008. – P.524-535.
17. *Смоловая Е.С.* Продолжение по непрерывности кольцевых Q – гомеоморфизмов в метрических пространствах // Труды ИПММ НАН Украины. – **18**. – 2009. – С.166-177.
18. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций, Москва: Наука, 1964.
19. *Суворов Г.Д.* Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск: Редакционно-издательский отдел Сиб. отд. АН СССР, 1965.

С.-Петербургский государственный технический ун-т
`dybov2009@rambler.ru, dip57@inbox.ru, xcitor@inbox.ru,`
`yury@pro-face.dk, Yury.Dybov@pro-face.ru`

Получено 07.09.09