УДК 517.9:532

©2009. **О.А. Дудик**

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКОГО МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ НЕСКОЛЬКИМИ КАПИЛЛЯРНЫМИ ВЯЗКИМИ ЖИДКОСТЯМИ

В работе рассматривается плоская задача о малых движениях и нормальных колебаниях гидромеханической системы, состоящей из маятника, содержащего полость, целиком заполненную системой из капиллярных вязких жидкостей. Дается постановка начально–краевой задачи, которая приводится к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения. Доказывается теорема о сильной разрешимости рассматриваемой проблемы. Далее исследуются нормальные колебания гидросистемы. Приведены свойства решения спектральной задачи.

Введение. Задачи о малых движениях жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости, изучались в шестидесятые-восьмидесятые годы прошлого века в многочисленных статьях. Примененные в работе подходы в значительной степени повторяют подходы из [1] и [2] с некоторыми усложнениями, возникшими в связи с наличием системы жидкостей.

1. Математическая постановка задачи. Будем считать, что в плоскости $O\,y_2\,y_3$ расположен маятник, который имеет полость $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, заполненную системой из $m+1$ несмешивающихся капиллярных вязких жидкостей. Они расположены одна на другой таким образом, что жидкость наибольшей плотности ρ_1 занимает наинизшее (по отношению к ускорению силы тяжести $\vec{g}$) положение, выше располагается жидкость, следующая по плотности и т. д.; иными словами, выполнены неравенства

$$\rho_1>\rho_2>\dots\rho_{m+1}>0. \tag{1}$$

Обозначим через Ω_k область, занимаемую в состоянии покоя жидкостью плотности ρ_k, $\quad k=\overline{1,m+1}$. Твердую стенку $S=\partial\Omega$ сосуда Ω разобьем на участки S_k, примыкающие к Ω_k, $\quad k=\overline{1,m+1}$. Нормали $\vec{n}_q$ к границам раздела Γ_q между q-ой и $(q+1)$-ой жидкостями направим внутрь $(q+1)$-ой жидкости, $\quad q=\overline{1,m}$.

Пусть $\mu_k>0\quad(k=\overline{1,m+1})$ – динамические вязкости жидкостей, которые представим в виде $\mu_k=\rho_k^0\,\nu$, где $\nu>0$ – некоторая средняя кинематическая вязкость системы, а величины ρ_k^0 имеют размерность плотности. Будем считать параметры ρ_k^0 фиксированными, а $\nu>0$ – переменным параметром, в частности, будем рассматривать и предельные случаи, когда $\nu\to+0$, $\nu\to+\infty$.

Обозначим через $\vec{u}_k(t,x)\quad(x\in\Omega_k;\quad k=\overline{1,m+1})$ поля скоростей жидкостей, а $p_k(t,x)$ – динамические давления, т. е. отклонения полных давлений $P_k(t,x)$ в Ω_k от равновесных давлений $P_{0k}(t,x)$, отвечающих состоянию покоя системы. Будем считать, что в процессе малых колебаний на систему кроме внешнего гравитационного поля действует малое внешнее поле массовых сил $\vec{f}_k=\vec{f}_k(t,x)$.

Будем считать, что маятник, закрепленный в точке O, которая является началом неподвижной декартовой системы координат $O\,y_1\,y_2\,y_3$, совершает малые движения относительно оси $O\,y_1$. Как описано в [1], для описания плоских движений данной гидромеханической системы введем наряду с неподвижной системой координат также подвижную систему координат $O\,x_1\,x_2\,x_3$, жестко связанную с телом; $O\,x_1 = O\,y_1$. В состоянии покоя центр масс C всей системы расположен на одной вертикали с полюсом O и имеет координаты $(0, -l)$, где $l > 0$ – длина вектора OC. В процессе движения маятника положение подвижной системы $O\,x_1\,x_2\,x_3$ относительно неподвижной системы $O\,y_1\,y_2\,y_3$ будем задавать с помощью вектора углового перемещения маятника $\vec{\delta} = \delta_1 \vec{e}_1$ ($\vec{e}_1$ – орт системы $O\,x_1\,x_2\,x_3$).

Тогда задача о малых колебаниях маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся капиллярных вязких жидкостей, формулируется следующим образом:

$$\rho_k \frac{\partial\,\vec{u}_k}{\partial t} + \rho_k \left(\frac{d\,\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right) + \nabla p_k = \mu_k \triangle \vec{u}_k + \rho_k \vec{f}_k, \quad \mathrm{div}\vec{u}_k = 0 \quad (\text{в} \quad \Omega_k), \tag{2}$$

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на} \quad S_k; \quad k = \overline{1, m+1}), \quad \vec{u}_{j+1} = \vec{u}_j \quad (\text{на} \quad \Gamma_j; \quad j = \overline{1, m}), \tag{3}$$

$$\begin{gathered} p_j - p_{j+1} + 2\nu \left(\rho^0_{j+1} u^{j+1}_{3,3} - \rho^0_j u^j_{3,3}\right) = -\mathcal{L}_j \zeta_j - (\rho_j - \rho_{j+1})\, g \left[\left(\vec{\delta} \times \vec{r}\right) \cdot \vec{e}_3\right] := \\ := \sigma_j\, \Delta_{\Gamma_j} \zeta_j + \sigma_j\, k^2_j\, \zeta_j - (\rho_j - \rho_{j+1})\; g\, \cos\widehat{(\vec{n}_j, \vec{e}_3)}\, \zeta_j - \\ - (\rho_j - \rho_{j+1})\, g \left[\left(\vec{\delta} \times \vec{r}\right) \cdot \vec{e}_3\right] \quad (\text{на} \quad \Gamma_j; \quad j = \overline{1, m}), \end{gathered} \tag{4}$$

$$\nu\, \rho^0_j \left(u^j_{2,3} + u^j_{3,2}\right) - \nu\, \rho^0_{j+1} \left(u^{j+1}_{2,3} + u^{j+1}_{3,2}\right) = 0 \quad (\text{на} \quad \Gamma_j; \quad j = \overline{1, m}), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\, \zeta_j}{\partial t} = u^j_n := \vec{u}_j \cdot \vec{n}_j = \vec{u}_{j+1} \cdot \vec{n}_j \quad (\text{на} \quad \Gamma_j; \quad j = \overline{1, m}), \quad \frac{d\vec{\delta}}{dt} = \vec{\omega}, \tag{6}$$

$$\int\limits_{\Gamma_j} \zeta_j\, d\,\Gamma_j = 0, \quad \zeta_j = 0 \quad (\text{на} \quad \partial\,\Gamma_j; \quad j = \overline{1, m}), \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{m+1} \rho_k \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r} \times \vec{u_k})\, d\,\Omega_k + J \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \alpha\, \vec{\omega} + m\, g\, l\, \vec{\delta} - \\ -g \sum_{j=1}^{m} (\rho_j - \rho_{j+1}) \int\limits_{\Gamma_j} (\vec{e_3} \times \vec{r})\, \zeta_j\, d\,\Gamma_j = \vec{M}(t). \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $\vec{r} = x_2\, \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$ – радиус-вектор точки области Ω_k, $k = \overline{1, m+1}$; дифференциальный оператор $\mathcal{L}_j$ такой, что $\mathcal{L}_j \zeta_j := -\sigma_j\, \Delta_{\Gamma_j}\, \zeta_j - \sigma_j\, k^2_j\, \zeta_j + (\rho_j - \rho_{j+1})\; g\; \cos\widehat{(\vec{n}_j, \vec{e}_3)}\, \zeta_j$; $\zeta_j(t, \xi)$ – функции, заданные на Γ_j и определяющие отклонения вдоль нормалей $\vec{n}_j$ к Γ_j возмущенных движущихся кривых $\Gamma_j(t)$ от равновесных кривых Γ_j; σ_j – коэффициенты поверхностного натяжения на $\Gamma_j(t)$; $\triangle_{\Gamma_j}$ – оператор

Лапласа-Бельтрами, определенный на функциях, заданных на $\Gamma_j; k_j$ – кривизны Γ_j; $m := m_т + \sum\limits_{k=1}^{m+1}(m_ж)_k$ – масса всей системы, равная сумме массы тела $m_т$ и массы всех жидкостей $\sum\limits_{k=1}^{m+1}(m_ж)_k$, $(m_ж)_k = \rho_k\,|\,\Omega_k|$; $\vec{M}(t)$ – главный момент относительно O всех внешних сил, кроме гравитационных, действующих на тело с жидкостями; $J := J_т + \sum\limits_{k=1}^{m+1}(J_ж)_k > 0$ – компонента тензора инерции тела $J_т$ и тензоров инерции жидкостей $(J_ж)_k$ $(k = \overline{1, m+1})$, $\vec{\omega} = \omega_1\vec{e}_1$ – вектор угловой скорости всей системы.

Для полной математической формулировки начально-краевой задачи к уравнениям (2)–(8) следует добавить начальные условия:

$$\begin{gathered}\vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k{}^0(x) \quad (x \in \Omega_k;\ k = \overline{1, m+1}), \quad \zeta_j(0,\xi) = \zeta_j^0(\xi) \quad (\xi \in \Gamma_j;\ j = \overline{1, m}),\\ \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^{\,0}, \quad \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^{\,0}.\end{gathered} \tag{9}$$

2. Гильбертово пространство наборов векторных полей $\widehat{L}_2(\Omega)$. Для задачи о малых движениях системы из несмешивающихся вязких жидкостей естественно требовать, чтобы кинетическая энергия системы была конечна. Это означает, что для набора полей скоростей $\widehat{u} := \{\vec{u}_k(x)\}_{k=1}^{m+1}$ должна быть конечна норма

$$\|\widehat{u}\|_\Omega^2 = \sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\vec{u}_k(x)|^2\,d\Omega_k. \tag{10}$$

Обозначим совокупность таких наборов через $\widehat{L}_2(\Omega)$, и тогда $\widehat{u} \in \widehat{L}_2(\Omega)$. Соответственно скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\widehat{L}_2(\Omega)$ определено по закону

$$(\widehat{u}, \widehat{v})_\Omega := \sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{u}_k(x)\cdot\vec{v}_k(x)d\Omega_k \tag{11}$$

для любых наборов вектор-функций $\widehat{u} := \{\vec{u}_k(x)\}_{k=1}^{m+1}$ и $\widehat{v} := \{\vec{v}_k(x)\}_{k=1}^{m+1}$ из $\widehat{L}_2(\Omega)$.

В случае движения системы жидкостей в произвольной области Ω имеет место ортогональное разложение пространства $\widehat{L}_2(\Omega)$, аналогичное разложению пространства вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ (см. [3]).

Лемма. *Пусть область Ω разбита на подобласти Ω_k, как это было описано выше. Если границы $\partial\Omega_k$ липшицевы, то справедливо ортогональное разложение*

$$\widehat{L}_2(\Omega) := \widehat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\widehat{J}_{0,S}(\Omega) := \Big\{\widehat{v} \in \widehat{L}_2(\Omega): \quad \operatorname{div}\vec{v}_k = 0 \quad (\textit{в} \quad \Omega_k),\\ \vec{v}_k\cdot\vec{n} = 0 \quad (\textit{на} \quad S_k), \quad \vec{v}_j\cdot\vec{n}_j = \vec{v}_{j+1}\cdot\vec{n}_j \quad (\textit{на} \quad \Gamma_j)\Big\},\end{gathered} \tag{13}$$

$$\widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \Big\{ \widehat{w} = \{\vec{w}_k\}_{k=1}^{m+1} \in \widehat{L}_2(\Omega): \quad \vec{w}_k = \nabla\varphi_k \quad (\textit{в} \quad \Omega_k),$$
$$k = \overline{1, m+1}, \quad \rho_j\,\varphi_j - \rho_{j+1}\,\varphi_{j+1} = 0 \quad (\textit{на} \quad \Gamma_j), \quad j = \overline{1,m} \Big\}. \qquad \square \tag{14}$$

Ортогональное разложение (12) далее будет существенно использовано при исследовании проблемы малых движений рассматриваемой гидромеханической системы.

Со скоростью диссипации энергии системы вязких жидкостей связан билинейный функционал

$$\widehat{E}\,(\widehat{u}, \widehat{v}) := \sum_{k=1}^{m} \mu_k E_k\,(\vec{u}_k, \vec{v}_k)\,, \tag{15}$$

$$E(\vec{u}, \vec{u}) := \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{q,j=2}^{3} \left(\frac{\partial u_q}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_q} \right)^2 d\Omega_k, \tag{16}$$

и естественно рассматривать такие движения жидкостей, для которых $\widehat{E}\,(\widehat{u}, \widehat{v}) < \infty$.

Также нам понадобится пространство $\widehat{J}^1_{0,S}(\Omega)$, плотно вложенное в $\widehat{J}_{0,S}(\Omega)$,

$$\widehat{J}^1_{0,S}(\Omega) := \Big\{ \widehat{u} = \{\vec{u}_k(x)\}_{k=1}^{m+1}: \quad \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \quad (\text{в} \quad \Omega_k), \quad \vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на} \quad S_k),$$
$$E_k\,(\vec{u}_k, \vec{v}_k) < \infty \quad (k = \overline{1, m+1}), \quad \vec{u}_j = \vec{u}_{j+1} \quad (\text{на} \quad \Gamma_j; \quad j = \overline{1,m}) \Big\}. \tag{17}$$

3. Переход к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Переходя к исследованию начально-краевой задачи (2)–(9), воспользуемся методами функционального анализа и подходами, описанными для случая одной жидкости в [1], а также ортогональным разложением (12).

Будем считать, что наборы векторных полей скоростей жидкостей $\widehat{u} := \{\vec{u}_k(t,x)\}_{k=1}^{m+1}$ при каждом t являются элементами гильбертова пространства $\widehat{L}_2(\Omega)$ с нормой (10) и скалярным произведением (11). Будем трактовать набор соотношений (2) как одно уравнение в гильбертовом пространстве $\widehat{L}_2(\Omega)$. Тогда уравнения (2) можно коротко записать в виде

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} = -\widehat{\bigtriangledown_\rho\, p} + \nu \left(\widehat{\triangle u}\right) + \widehat{f}, \quad \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \quad (\text{в} \quad \Omega_k), \tag{18}$$

где

$$\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} := \left\{ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,\Big|_{\Omega_k} \right\}_{k=1}^{m+1}, \quad \nu \left(\widehat{\triangle u}\right) := \nu \left\{ \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\,\vec{u}_k \right\}_{k=1}^{m+1}, \tag{19}$$

$$\widehat{f} := \left\{ \vec{f}_k(t,\, x) \right\}_{k=1}^{m+1}, \quad \widehat{\bigtriangledown_\rho\, p} := \left\{ \rho_k^{-1}\, \nabla p_k(t,x) \right\}_{k=1}^{m+1}. \tag{20}$$

Как следует из условий соленоидальности полей $\vec{u}_k(t,x)$ в Ω_k, см. (18), условий (3), а также из определений подпространств $\widehat{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ (см. (13), (14)), для решения задачи (2)–(9) выполнены свойства

$$\widehat{u}(t,x) \in \widehat{J}_{0,S}(\Omega), \quad \widehat{\bigtriangledown_\rho\, p} \in \widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \oplus \widehat{G}_{h,S}(\Omega) =: \widehat{G}(\Omega), \tag{21}$$

где

$$\widehat{G}_{h,S}(\Omega) = \{\widehat{v} = \{\vec{v}_k(x)\}_{k=1}^{m+1} \in \widehat{L}_2(\Omega): \ \vec{v}_k = \nabla\varphi_k, \ \Delta\varphi_k = 0 \ (\Omega_k), \ k = \overline{1, m+1},$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = 0 \ (S_k), \ \frac{\partial\varphi_j}{\partial n_j} = \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial n_j} \ (\Gamma_j), \ \int\limits_{\Gamma_j}(\rho_j\varphi_j - \rho_{j+1}\varphi_j)d\Gamma_j = 0, \ \int\limits_{\Gamma_m}\rho_{m+1}\varphi_{m+1}d\Gamma_j = 0\}. \tag{22}$$

Отсюда следует, что $\widehat{\bigtriangledown_\rho p}$ можно искать в виде

$$\widehat{\bigtriangledown_\rho p} = \widehat{\bigtriangledown_\rho \varkappa} + \widehat{\bigtriangledown_\rho \varphi}, \qquad \widehat{\bigtriangledown_\rho \varkappa} = \left\{\frac{1}{\rho_k}\nabla\varkappa_k(t,x)\right\}_{k=1}^{m+1} \in \widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{23}$$

$$\widehat{\bigtriangledown_\rho \varphi} = \left\{\frac{1}{\rho_k}\nabla\varphi_k(t,x)\right\}_{k=1}^{m+1} \in \widehat{G}_{h,S}(\Omega). \tag{24}$$

Подставляя представления (23), (24) для $\widehat{\bigtriangledown_\rho p}$ в (18) и применяя к обеим частям (18) ортопроекторы $\widehat{P}_{0,S}$ и $\widehat{P}_{0,\Gamma}$ на подпространства $\widehat{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ соответственно, получаем соотношения:

$$\frac{d\,\widehat{u}}{dt} + \widehat{P}_{0,S}\left(\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}}\right) = -\widehat{\bigtriangledown_\rho \varphi} + \nu\,\widehat{P}_{0,S}\left(\widehat{\triangle u}\right) + \widehat{P}_{0,S}\,\widehat{f}, \tag{25}$$

$$\widehat{P}_{0,\Gamma}\left(\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}}\right) = -\widehat{\bigtriangledown_\rho \varkappa} + \nu\,\widehat{P}_{0,\Gamma}\left(\widehat{\triangle u}\right) + \widehat{P}_{0,\Gamma}\,\widehat{f}. \tag{26}$$

Здесь символом d/dt обозначена производная по времени t от функции переменной t со значениями в гильбертовом пространстве.

Как видно из (26), поле $\widehat{\nabla_\rho \varkappa}$ вычисляется по найденному решению $\vec{\omega}(t)$ и $\widehat{u}(t,x)$, которые можно получить независимо из уравнения (25). Поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением лишь уравнения (25).

Преобразуем теперь с учетом разложений (12)–(14) первую группу динамических условий (4). Это осуществляется так же, как было проделано ранее для одной жидкости (см. [1]).

Из (7) следует, что при любом $t \ge 0 \quad \zeta_j \in L_{2,\Gamma_j} := \left\{\zeta_j \in L_2(\Gamma_j): \ \int\limits_{\Gamma_j}\zeta_j d\Gamma_j = 0\right\}$ – подпространствам в $L_2(\Gamma_j)$ коразмерности 1, состоящих из элементов ζ_j, удовлетворяющих условию сохранения объема жидкости в процессе малых движений.

Поэтому $\theta_j\,\zeta_j = \zeta_j, \quad \theta_j: \quad L_2(\Gamma_j) \to L_{2,\Gamma_j}$ – ортопроекторы на L_{2,Γ_j},

$$\theta_j\,\varphi_j := \varphi_j - |\,\Gamma_j\,|^{-1}\int\limits_{\Gamma_j}\varphi_j\,d\,\Gamma_j, \qquad \forall\,\varphi_j \in L_2(\Gamma_j) \quad (j = \overline{1,m}). \tag{27}$$

Далее введем операторы B_j по закону

$$B_j\,\zeta_j := \theta_j\,\mathcal{L}_j\,\theta_j\,\zeta_j, \quad \zeta_j \in \mathcal{D}(B_j) = H^2(\Gamma_j) \cap H_0^1(\Gamma_j) \cap L_{2,\Gamma_j}, \tag{28}$$

где дифференциальное выражение $\mathcal{L}_j$ определено в (4), а граничное условие (7) учтено выбором $\mathcal{D}(B_j)$.

Лемма. *Оператор* $\widehat{B}_\sigma = \operatorname{diag}\{B_j\}_{j=1}^m : \mathcal{D}(B_j) \subset L_{2,\Gamma_j} \to L_{2,\Gamma_j}$ *неограничен, самосопряжен и ограничен снизу. Его квадратичная форма имеет вид*

$$\sum_{j=1}^m (B_j\,\zeta_j, \zeta_j)_0 = \sum_{j=1}^m \int\limits_{\Gamma_j} \left[\sigma_j \left|\nabla_{\Gamma_j}\zeta_j\right|^2 + a_{\Gamma_j}\,|\zeta_j|^2\right] d\Gamma_j, \quad \zeta_j \in \mathcal{D}(B_j), \tag{29}$$

где

$$a_{\Gamma_j} := -\sigma_j\,k_j^2 + (\rho_j - \rho_{j+1})\;g\,\cos\,(\widehat{\vec{n}_j, \vec{e}_3}).$$

$\nabla_{\Gamma_j}\zeta_j$ *– градиенты функций* ζ_j*, заданных на* $\Gamma_j\;(j = \overline{1,m})$. $\square$

Используя введенный в (28) оператор $\widehat{B}_\sigma = \operatorname{diag}\{B_j\}_{j=1}^m$, перепишем краевое условие (4) в виде:

$$\varphi_j - \varphi_{j+1} + 2\nu \left[\rho_j^0\,u_{3,3}^j - \rho_{j+1}^0\,u_{3,3}^{j+1}\right] = -B_j\,\zeta_j - (\rho_j - \rho_{j+1})\,g\,\theta_j \left[(\vec{\delta} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3\right] \quad (\text{на} \quad \Gamma_j). \tag{30}$$

В (30) учитывается, что

$$p_j - p_{j+1} = \varphi_j - \varphi_{j+1} \quad (\text{на} \quad \Gamma_j), \qquad \int\limits_{\Gamma_j} (p_j - p_{j+1})\;d\Gamma_j \quad (j = \overline{1,m}). \tag{31}$$

Далее, аналогично тому, как было описано в [1], воспользуемся двумя вспомогательными задачами С.Г.Крейна для того, чтобы от задачи (2)–(9) перейти к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в некотором гильбертовом пространстве.

Будем искать решение исследуемой задачи в виде

$$\widehat{u} = \widehat{v} + \widehat{w}, \qquad \widehat{\nabla_\rho\,\varphi} = \widehat{\nabla\,\varphi^{(1)}} + \widehat{\nabla\,\varphi^{(2)}}, \tag{32}$$

$$\widehat{\nabla\,\varphi^{(1)}} = \left\{\frac{1}{\rho_k}\,\nabla\varphi_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{m+1}, \quad \widehat{\nabla\,\varphi^{(2)}} = \left\{\frac{1}{\rho_k}\,\nabla\varphi_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{m+1}.$$

Тогда можно проверить, что исходная задача (2)–(9) равносильна системе уравнений и начальных условий

$$\frac{d\widehat{v}}{dt} + \frac{d\widehat{w}}{dt} + \widehat{P}_{0,S}\left(\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}\right) + \nu\widehat{A}\widehat{v} = \widehat{P}_{0,S}\,\widehat{f}, \tag{33}$$

$$\frac{d\widehat{w}}{dt} + \frac{1}{\nu}\,\widehat{V}\,\widehat{B}_\sigma\,\widehat{\gamma}_n\,(\widehat{v} + \widehat{w}) + \frac{g}{\nu}\,\widehat{\triangle\rho}\,\widehat{V}\widehat{\theta}\,\left[(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3\right] = \vec{0}, \tag{34}$$

$$\widehat{\rho}\,\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega (\vec{r} \times (\widehat{v} + \widehat{\omega}))\,d\,\Omega + J\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \alpha\,\vec{\omega} + m\,g\,l\,\vec{\delta} - g\widehat{\triangle\,\rho}\int\limits_\Gamma (\vec{e_3} \times \vec{r})\,\widehat{\zeta}\,d\,\Gamma = \vec{M}(t), \tag{35}$$

$$\frac{d\widehat{\zeta}}{dt} - \widehat{\gamma}_n\,(\widehat{v} + \widehat{w}) = 0, \tag{36}$$

$$\frac{d\vec{\delta}}{dt} - \vec{\omega} = \vec{0}, \tag{37}$$

$$\widehat{w}(0) = \widehat{w}^0, \quad \widehat{v}(0) = \widehat{v}^0, \quad \widehat{\zeta}(0) = \widehat{\zeta}^0, \quad \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0, \quad \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^0. \tag{38}$$

Здесь $\widehat{A}$ и $\widehat{V}$ – операторы первой и второй вспомогательных задач С.Г.Крейна,

$$\widehat{v} = \nu^{-1}\widehat{A}^{-1}\,\widehat{f}_u, \quad \widehat{w} = \nu^{-1}\widehat{V}\,\widehat{\psi},$$

$$\widehat{\rho} := \operatorname{diag}\,(\rho_k\, I_k)_{k=1}^{m+1}\,, \quad \widehat{\triangle\rho} := \operatorname{diag}\,((\rho_j - \rho_{j+1})\, I_j)_{j=1}^{m}\,,$$

$$\widehat{\zeta} := \{\zeta_j(t)\}_{j=1}^{m} \in \widehat{L}_{2,\Gamma} := \oplus_{j=1}^{m} L_{2,\Gamma_j} \quad \widehat{\theta} := \operatorname{diag}\{\theta_j\}_{j=1}^{m},$$

$$\widehat{\gamma}_n\widehat{u} = \left\{(\vec{u}_j\cdot\vec{n}_j)_{\Gamma_j}\right\}_{j=1}^{m}, \quad \widehat{u} = \widehat{v} + \widehat{w}, \quad \widehat{u} \in \widehat{J}^1_{0,\,S}(\Omega). \tag{39}$$

Задача (33)–(38) является исходным пунктом исследования проблемы разрешимости начально-краевой задачи (2)–(9) методами теории уравнений в гильбертовом пространстве.

Лемма. *Пространство $\widehat{J}^1_{0,\,S}(\Omega)$ имеет ортогональное разложение*

$$\widehat{J}^1_{0,\,S}(\Omega) = \widehat{N}_1(\Omega) \oplus \widehat{M}_1(\Omega), \tag{40}$$

где подпространство

$$\widehat{N}_1(\Omega) := \left\{\widehat{v} \in \widehat{J}^1_{0,\,S}(\Omega): \quad \widehat{\gamma}_n\widehat{v} = 0\right\}, \tag{41}$$

а ортогональное дополнение $\widehat{M}_1(\Omega)$ – подпространство слабых решений второй вспомогательной задачи С.Г.Крейна при любых $\widehat{\psi} = (0;\widehat{\psi}_3)$, $\widehat{\psi}_3 = \widehat{\psi}_n = \left(\widehat{H}^{1/2}_\Gamma\right)^*$. Соответственно пространство $\widehat{J}_{0,\,S}(\Omega) = \widehat{A}^{1/2}\,\widehat{J}^1_{0,\,S}(\Omega)$ имеет ортогональное разложение

$$\widehat{J}_{0,\,S}(\Omega) := \widehat{N}_0(\Omega) \oplus \widehat{M}_0(\Omega) := \widehat{A}^{1/2}\,\widehat{N}_1(\Omega) \oplus \widehat{A}^{1/2}\,\widehat{M}_1(\Omega), \tag{42}$$

$$\widehat{N}_0(\Omega) := \left\{\widehat{v} \in \widehat{J}_{0,\,S}(\Omega): \quad \widehat{\gamma}_n A^{-1/2}\widehat{v} = 0\right\}. \qquad \square$$

Введем в рассмотрение операторы

$$\widehat{B} := \widehat{Q}^*\,\widehat{B}_\sigma\,\widehat{Q}, \quad \widehat{Q} := \widehat{\gamma}_n\widehat{A}^{-1/2}, \quad \widehat{Q}^* := \widehat{A}^{1/2}\,\widehat{V}, \tag{43}$$

$$\widehat{R} := \widehat{B}^{1/2}\,\widehat{P}\,\widehat{A}^{-1/2}: \quad \widehat{J}_{0,\,S}(\Omega) \to \widehat{M}_0(\Omega), \quad \widehat{P}: \quad \widehat{J}_{0,\,S}(\Omega) \to \widehat{M}_0(\Omega), \tag{44}$$

$$\widehat{R}^+ := \widehat{A}^{-1/2}\,\widehat{P}\,\widehat{B}^{1/2}, \quad \mathcal{D}(\widehat{R}^+) := \mathcal{D}(\widehat{B}^{1/2}) \subset \widehat{M}_0(\Omega), \tag{45}$$

а также учтем, что

$$\widehat{R}^+ = \widehat{R}^* \mid D(\widehat{B}^{1/2}), \quad \overline{\widehat{R}^+} = \widehat{R}^* \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{M}_0(\Omega)). \tag{46}$$

Осуществляя в (33)–(38) замену $\widehat{w} = \nu^{-1}\,\widehat{R}^{+}\,\widehat{z}$ и учитывая, что справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\widehat{R}^{+}\,\widehat{z}\right) = \widehat{R}^{*}\,\frac{d\widehat{z}}{dt}, \tag{47}$$

от задачи (33)–(38) перейдем к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения.

Вместо (33)–(38) с учетом замены и (47) получаем задачу Коши для системы уравнений:

$$\frac{d\widehat{v}}{dt} + \frac{1}{\nu}\,\widehat{R}^{*}\,\frac{d\widehat{z}}{dt} + \widehat{P}_{0,S}\left(\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}}\right) + \nu\,\widehat{A}\widehat{v} = \widehat{P}_{0,S}\widehat{f}, \tag{48}$$

$$\frac{d\widehat{z}}{dt} + \widehat{B}^{1/2}\,\widehat{A}^{1/2}\left(\widehat{v} + \frac{1}{\nu}\,\widehat{A}^{-1/2}\,\widehat{B}^{1/2}\widehat{z}\right) + g\,\widehat{\triangle\rho}\,\widehat{B}^{-1/2}\,\widehat{P}\,\widehat{Q}^{*}\left[\widehat{\theta}\,(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right] = \widehat{0}, \tag{49}$$

$$\widehat{\rho}\,\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left[\vec{r}\times(\widehat{v} + \frac{1}{\nu}\,\widehat{R}^{+}\widehat{z})\right]d\Omega + J\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \alpha\vec{\omega} + mgl\vec{\delta} - g\,\widehat{\triangle\rho}\int\limits_{\Gamma}(\vec{e}_3\times\vec{r})\,\widehat{\zeta}\,d\Gamma = \vec{M}(t), \tag{50}$$

$$\frac{d\widehat{\zeta}}{dt} - \widehat{\gamma}_n\left(\widehat{v} + \frac{1}{\nu}\,\widehat{R}^{+}\widehat{z}\right) = \widehat{0}, \tag{51}$$

$$\frac{d\vec{\delta}}{dt} - \vec{\omega} = \vec{0}, \tag{52}$$

$$\widehat{z}(0) = \widehat{z}^{0},\quad \widehat{v}(0) = \widehat{v}^{0},\quad \widehat{\zeta}(0) = \widehat{\zeta}^{0},\quad \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^{0},\quad \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^{0}, \tag{53}$$

которую можно переписать в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве:

$$(A_0 + R_1)\,\frac{dx}{dt} + (I + R_2)\,\widetilde{B}_0\,x + \widetilde{B}_1\,x = \tilde{f}(t),\quad x(0) = x^{0}, \tag{54}$$

$$A_0 = \mathrm{diag}(\widehat{I};\,\widehat{I};\,J;\,\widehat{I};\,I) \gg 0,\quad \widetilde{B}_0 = \mathrm{diag}(\nu\,\widehat{A};\,\nu^{-1}\,\widehat{B};\,\alpha;\,\widehat{I};\,I),\quad R_1,\,R_2 \in \mathfrak{S}_{\infty}(\widehat{\mathcal{H}}), \tag{55}$$

$$x(t) = (\widehat{v};\,\widehat{z};\,\vec{\omega};\,\widehat{\zeta};\,\vec{\delta})^{t} \in \widehat{J}_{0,S}(\Omega)\oplus\widehat{M_0}(\Omega)\oplus\mathbb{C}\oplus\widehat{L}_{2,\Gamma}\oplus\mathbb{C} := \widehat{\mathcal{H}},\quad \widetilde{B}_1 \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H}}). \tag{56}$$

4. О сильной разрешимости исследуемой проблемы. Задача (54)–(56) приводится к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения в гильбертовом пространстве $\widehat{\mathcal{H}}$:

$$\frac{dy}{dt} = -(I+T)\widehat{B}_0 y - \widehat{C}_0 y + \widehat{f}_0,\quad y(0) = y^{0}. \tag{57}$$

Здесь

$$y = A_0^{1/2}x = (A_0^{1/2}\widehat{v};\,A_0^{1/2}\widehat{z};\,A_0^{1/2}\vec{\omega};\,A_0^{1/2}\widehat{\zeta};\,A_0^{1/2}\vec{\delta})^{t}, \tag{58}$$

$$I + T := (I + \widehat{R}_1)^{-1}(I + \widehat{R}_2),\quad T \in \mathfrak{S}_{\infty}(\widehat{\mathcal{H}}),\quad \widehat{f}_0 := (I + \widehat{R}_1)^{-1}A_0^{-1/2}\widetilde{f}, \tag{59}$$

$$\widehat{B}_0 := A_0^{-1/2}\widetilde{B}_0 A_0^{-1/2},\quad \widetilde{B}_0 = \mathrm{diag}(\nu\,\widehat{A};\,\nu^{-1}\widehat{B};\,\alpha;\,\widehat{I};\,I), \tag{60}$$

$$\widehat{C}_0 = (I+\widehat{R}_1)^{-1}A_0^{-1/2}\widetilde{B}_1A_0^{-1/2}, \quad \widehat{R}_1 = A_0^{-1/2}R_1A_0^{-1/2}, \quad \widehat{R}_2 = A_0^{-1/2}R_2A_0^{1/2}. \quad (61)$$

Здесь оператор $-(I+T)\widehat{B}_0 - \widehat{C}_0$ является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащей положительную полуось $t > 0$. Учитывая этот факт, сформулируем итоговый результат о сильной разрешимости исследуемой гидросистемы.

Теорема. *Пусть в задаче* (2)–(9) *выполнены условия*

$$\vec{M}(t) \in C^{\alpha}([0,T];\,\mathbb{C}), \quad 0 < \alpha \le 1, \quad (62)$$

$$\widehat{f}(t,x) = \{f_k(t,x)\}_{k=1}^{m+1} \in C^{\alpha}([0,T];\,\widehat{L}_2(\Omega)), \quad \widehat{u}^{\,0} \in \widehat{J}_{0,S}(\Omega), \quad \widehat{u}^{\,0} = \widehat{v}^{\,0} + \widehat{w}^{\,0}, \quad (63)$$

$$\widehat{v}^0 \in \mathcal{D}(\widehat{A}) \subset \widehat{J}^1_{0,S}(\Omega), \quad \widehat{w}^{\,0} \in \widehat{M_1}(\Omega) \subset \widehat{J}^1_{0,S}(\Omega), \quad \gamma_n \widehat{w}^{\,0} \in \mathcal{D}\left(\widehat{B}_{\sigma}^{1/2}\right), \quad (64)$$

$$\widehat{\zeta}^0 \in \mathcal{D}(\widehat{B}_{\sigma}) \subset \widehat{L}_{2,\Gamma}, \quad \vec{\omega}^0 \in \mathbb{C}, \quad \vec{\delta}^0 \in \mathbb{C}. \quad (65)$$

Тогда задача Коши (57) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.
$\square$

Эта теорема позволяет дать достаточные условия разрешимости начально–краевой задачи (2)–(9).

5. Нормальные колебания. Свойства решений спектральной задачи. При $\tilde{f}(t) = 0$ для решений задачи (54)–(56), зависящих от t по закону $\exp(-\lambda t)$, приходим к спектральной задаче

$$\left((I+R_2)\,\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1\right)\,x = \lambda\,(A_0+R_1)\,x, \quad x \in \mathcal{D}(\widetilde{B}_0). \quad (66)$$

Применяя методы из [3], приведем кратно общие свойства решений задачи (66).

1^0. Число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (66).

2^0. Спектр задачи (66) дискретный с предельной точкой $\lambda = \infty$.

3^0. Все собственные значения λ конечнократны и расположены, кроме быть может, конечного их числа, в правой полуплоскости в секторе $\Lambda_{\varepsilon} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \varepsilon\}$ при любом $\varepsilon > 0$.

4^0. Корневые (собственные и присоединенные) элементы задачи (66) образуют базис Абеля–Лидского некоторого порядка $\alpha > 0$.

5^0. В случае, когда квадратичная форма потенциальной энергии принимает отрицательные значения, можно установить, что имеет место обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

1. *Дудик О.А.* Малые колебания плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью. – Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – Т.16. – С.67-79.
2. *Дудик О.А.* Нормальные колебания плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью, при условии статической неустойчивости. – Ученые Записки Таврич. нац. ун–та (Симферополь) – Т.20 (59), №1, 2007. – С.57-64.
3. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М: Наука, 1989. – 416с.

Таврический национальный ун-т им.В.И.Вернадского
`dudik_tnu@mail.ru`

Получено 19.05.08