УДК 539.3

©2009. **М.Л. Алтухова, Н.С. Хапилова**

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О ДЕЙСТВИИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО, ЛЕЖАЩЕЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Решена задача о симметричной деформации трансверсально-изотропного полупространства, лежащего на упругом основании, при действии нормальной распределенной нагрузки, приложенной к границе упругой области. Получены аналитические формулы для напряжений и перемещений в трансверсально-изотропном полупространстве.

Введение. В статье [1] построено решение трехмерной смешанной задачи на границе изотропного полупространства, лежащего на упругом основании, при действии распределенной по конечной области нормальной нагрузки. В случае осесимметричной деформации решение аналогичной смешанной задачи для изотропного полупространства приведено в работе [2]. Компоненты напряжений на границе трансверсально- изотропного полупространства, лежащего на упругом основании, при действии распределенной по круговой области нормальной нагрузки определены в статьях [3, 4]. При выполнении исследований в работах [1–4] использован метод суперпозиции решений вспомогательных задач для сосредоточенных сил. Осесимметричные задачи о действии сосредоточенных сил на полупространство, лежащее на упругом основании, исследованы в работах [5, 6] с помощью интегрального преобразования Ханкеля. С учетом факторов, позволяющих исследовать различные технические проблемы, решение задачи Буссинеска о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство обобщено в статьях [7, 8].

Ниже решена осесимметричная смешанная задача для трансверсально-изотропного полупространства, на границе которого в круговой области V приложена нагрузка $q(r)$, вне области V нормальные напряжения пропорциональны перемещениям, касательные напряжения на плоскости, ограничивающей упругую область, отсутствуют. Частным случаем полученного решения смешанной задачи, когда коэффициент пропорциональности напряжений и перемещений на границе обращается в нуль, является приведенное в монографии С.Г.Лехницкого [9] решение первой основной задачи теории упругости для распределенной по кругу нагрузки, действующей на трансверсально-изотропное полупространство.

1. Основные соотношения трансверсально-изотропных сред. В случае осесимметричной задачи основные уравнения теории упругости для трансверсально-изотропного тела (уравнения равновесия, закон Гука, соотношения, связывающие компоненты деформации с перемещениями) сводятся к уравнению [9]

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 \phi = 0, \tag{1}$$

где $\phi(r,z)$ – функция напряжений, $\nabla_i^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{s_i^2}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, $i = 1, 2$; s_1, s_2 – неравные по модулю корни биквадратного уравнения

$$ds^4 - (a+c)s^2 + 1 = 0. \tag{2}$$

Согласно [4, 9] напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz}, τ_{rz} и перемещения u, v через функцию $\phi(r)$ записываются в виде

$$\sigma_{rr} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{b}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(b\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right),$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(c\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{c}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + d\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right),$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right),$$

$$u = (a_{13}c - a_{12}b - a_{11})\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z},$$

$$w = a_{44}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + (a_{33}d - 2a_{13}a)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \tag{3}$$

где a, b, c, d выражаются через коэффициенты деформаций a_{ij}

$$a = \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12})}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}, \qquad b = \frac{a_{13}(a_{13} + a_{44}) - a_{12}a_{33}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2},$$

$$c = \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12}) + a_{11}a_{44}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}, \qquad d = \frac{(a_{11}^2 - a_{12}^2)}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}. \tag{4}$$

2. Постановка и решение смешанной задачи. Запишем граничные условия для трансверсально-изотропного полупространства в виде

$$\sigma_{zz}(r,0) = -q(r), r < a,$$

$$\sigma_{zz}(r,0) = kw(r,0), r \geq a, \tag{5}$$

$$\tau_{rz}(r,0) = 0, r < \infty. \tag{6}$$

Введем функцию

$$\beta(r) = \left\{ \begin{array}{c} q(r) + kw(r), r < a, \\ 0, r \geq a. \end{array} \right. \tag{7}$$

С учетом (7) граничные условия (5) перепишем так:

$$\sigma_{zz}(r,0) = -\beta(r) + kw(r,0), r < \infty. \tag{8}$$

Считая, что фунция $\beta(r)$ удовлетворяет необходимым ограничениям (число точек разрыва непрерывности и экстремальных точек конечно на любом конечном интервале $r > 0$, функция $\beta(r)$ конечна при всяком r и интеграл $\int_0^{+\infty} \beta(r)\sqrt{r}dr$ абсолютно сходится), представим неизвестную нагрузку $\beta(r)$ в виде интеграла Фурье-Бесселя [10],

$$\beta(r) = \int_0^{+\infty} \psi(t) t J_0(rt) dt, \tag{9}$$

где

$$\psi(t) = \int_0^{+\infty} \beta(\xi) \xi J_0(t\xi) d\xi, \tag{10}$$

J_0 – функция Бесселя нулевого порядка.

Ограниченное на бесконечности решение уравнения (1) будем искать аналогично [9], приняв в качестве функции напряжений ϕ выражение

$$\phi(r) = \int_0^{+\infty} \left(A(t) e^{-s_1 z t} + B(t) e^{-s_2 z t} \right) J_0(rt) dt. \tag{11}$$

Подставляя $\phi(r)$ в формулы (3), найдем напряжения $\sigma_{zz}(r,z)$, $\tau_{rz}(r,z)$ и перемещение $w(r,z)$

$$\sigma_{zz}(r,z) = -\int_0^{+\infty} \left(A s_1 (d s_1^2 - c) e^{-s_1 z t} + B s_2 (d s_2^2 - c) e^{-s_2 z t} \right) t^3 J_0(rt) dt,$$

$$\tau_{rz}(r,z) = -\int_0^{+\infty} \left(A (a s_1^2 - 1) e^{-s_1 z t} + B (a s_2^2 - 1) e^{-s_2 z t} \right) t^3 J_0(rt) dt,$$

$$w(r,z) = ((a_{33} d - 2 a_{13} a) s_1^2 - a_{44}) \int_0^{+\infty} A(t) e^{-s_1 z t} t^2 J_0(rt) dt +$$

$$+ ((a_{33} d - 2 a_{13} a) s_2^2 - a_{44}) \int_0^{+\infty} B(t) e^{-s_2 z t} t^2 J_0(rt) dt. \tag{12}$$

На границе полупространства $(z = 0)$ из соотношений (12) имеем

$$\sigma_{zz}(r,0) = -\int_0^{+\infty} \left(A s_1 (d s_1^2 - c) + B s_2 (d s_2^2 - c) \right) t^3 J_0(rt) dt,$$

$$\tau_{rz}(r,0) = -\int_0^{+\infty} \left(A (a s_1^2 - 1) + B (a s_2^2 - 1) \right) t^3 J_0(rt) dt,$$

$$w(r,0) = ((a_{33} d - 2 a_{13} a) s_1^2 - a_{44}) \int_0^{+\infty} A(t) t^2 J_0(rt) dt +$$

$$+ ((a_{33} d - 2 a_{13} a) s_2^2 - a_{44}) \int_0^{+\infty} B(t) t^2 J_0(rt) dt. \tag{13}$$

Удовлетворяя условию отсутствия касательных напряжений на границе (6), получим уравнение

$$A (a s_1^2 - 1) + B (a s_2^2 - 1) = 0. \tag{14}$$

Отсюда

$$A(t) = -\frac{1 - as_2^2}{1 - as_1^2}B(t). \tag{15}$$

Перепишем напряжения σ_{zz} и перемещения w на границе с учетом (15)

$$\sigma_{zz}(r,0) = \frac{(d - ac)(s_1 - s_2)}{d(1 - as_1^2)s_1 s_2} \int_0^{+\infty} B(t)t^3 J_0(rt)dt,$$

$$w(r,0) = -\frac{(a_{33}d - 2a_{13}a - aa_{44})(s_1^2 - s_2^2)}{1 - as_1^2} \int_0^{+\infty} B(t)t^2 J_0(rt)dt. \tag{16}$$

Удовлетворяя условию (8), получим уравнение

$$\frac{(d - ac)(s_1 - s_2)}{d(1 - as_1^2)s_1 s^2}t^3 B(t) = -k\frac{(a_{33}d - 2a_{13}a - aa_{44})(s_1^2 - s_2^2)}{1 - as_1^2}B(t)t^2 - t\psi(t), \tag{17}$$

из которого находим

$$B = \frac{\psi(t)(1 - as_1^2)}{(s_1 - s_2)t\left(\dfrac{d - ac}{\sqrt{d}}t + k(s_1 + s_2)(a_{33}d - 2a_{13}a - aa_{44})\right)} =$$

$$= \frac{\psi(t)(1 - as_1^2)}{(s_1 - s_2)t\beta_1 (t + \chi)} \tag{18}$$

и, соответственно, A

$$A = -\frac{\psi(t)(1 - as_2^2)}{(s_1 - s_2)t\left(\dfrac{d - ac}{\sqrt{d}}t + k(s_1 + s_2)(a_{33}d - 2a_{13}a - aa_{44})\right)} =$$

$$= -\frac{\psi(t)(1 - as_2^2)}{(s_1 - s_2)t\beta_1 (t + \chi)}. \tag{19}$$

Здесь

$$\beta_1 = \frac{d - ac}{\sqrt{d}},$$

$$\gamma = k(s_1 + s_2)(a_{33}d - 2a_{13}a - aa_{44}),$$

$$\chi = \frac{\gamma}{\beta_1}. \tag{20}$$

Следовательно, функция напряжений $\phi(r)$ запишется в виде

$$\phi(r) = -\frac{1}{(s_1 - s_2)\beta_1} \int_0^{+\infty} \frac{(1 - as_2^2)e^{-s_1 zt} - (1 - as_1^2)e^{-s_2 zt}}{t(t + \chi)} J_0(rt)dt. \tag{21}$$

Подставив функцию $\phi(r)$ (21) в соотношение(3), получим следующие формулы для перемещений и напряжений в трансверсально-изотропном полупространстве

$$u = \frac{(a_{13}c - a_{12}b - a_{11})\sqrt{d}s_1(1-as_2^2)}{(s_1-s_2)(d-ac)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ts_1z}\psi(t)}{t+\chi} tJ_1(rt)dt-$$

$$-\frac{(a_{13}c - a_{12}b - a_{11})\sqrt{d}s_2(1-as_1^2)}{(s_1-s_2)(d-ac)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ts_2z}\psi(t)}{t+\chi} tJ_1(rt)dt, \tag{22}$$

$$w = \frac{((a_{33}d - 2a_{13}a)s_1^2 - aa_{44})(1-as_2^2)\sqrt{d}}{(s_1-s_2)(d-ac)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ts_1z}\psi(t)}{t+\chi} tJ_0(rt)dt-$$

$$-\frac{((a_{33}d - 2a_{13}a)s_2^2 - aa_{44})(1-as_1^2)\sqrt{d}}{(s_1-s_2)(d-ac)} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ts_2z}\psi(t)}{t+\chi} tJ_0(rt)dt, \tag{23}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{s_1-s_2} \int_0^{+\infty} \frac{(s_2e^{-s_1zt} - s_1e^{-s_2zt})\psi(t)}{t+\chi} t^2J_0(rt)dt, \tag{24}$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{(s_1-s_2)\sqrt{d}} \int_0^{+\infty} \frac{\left(e^{-s_1zt} - e^{-s_2zt}\right)\psi(t)}{t+\chi} t^2J_1(rt)dt, \tag{25}$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{\sqrt{d}(s_1-s_2)} \int_0^{+\infty} \frac{\left(s_1e^{-ts_1z} - s_2e^{-ts_2z}\right)\psi(t)}{t+\chi} t^2J_0(rt)dt+$$

$$+\frac{(1-b)\sqrt{d}}{(s_1-s_2)(d-ac)r} \int_0^{+\infty} \frac{\left(s_1p_2e^{-ts_1z} - s_2p_1e^{-ts_2z}\right)\psi(t)}{t+\chi} tJ_1(rt)dt, \tag{26}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\sqrt{d}}{(s_1-s_2)(d-ac)} \int_0^{+\infty} \frac{\left(s_1q_2e^{-ts_1z} - s_2q_1e^{-ts_2z}\right)\psi(t)}{t+\chi} t^2J_0(rt)dt-$$

$$-\frac{(1-b)\sqrt{d}}{(s_1-s_2)(d-ac)r} \int_0^{+\infty} \frac{\left(s_1p_2e^{-ts_1z} - s_2p_1e^{-ts_2z}\right)\psi(t)}{t+\chi} tJ_1(rt)dt. \tag{27}$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_1 &= (b-as_1^2)(1-as_2^2), \qquad & q_2 &= (b-as_2^2)(1-as_1^2), \\ p_1 &= 1-as_1^2, & p_2 &= 1-as_2^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Вычислим компоненты перемещений и напряжений на границе полупространства

$$u(r,0) = \frac{(a_{13}c - a_{12}b - a_{11})(\sqrt{d}+a)}{d-ac} \int_0^{+\infty} \frac{\psi(t)t}{t+\chi} J_1(rt)dt, \tag{29}$$

$$w(r,0) = \frac{\chi}{k} \int_0^{+\infty} \frac{\psi(t)t}{t+\chi} J_0(rt)dt, \tag{30}$$

$$\sigma_{zz}(r,0) = -\int_0^{+\infty} \frac{\psi(t)t^2}{t+\chi} J_0(rt)dt, \tag{31}$$

$$\tau_{rz}(r,0) = 0, \tag{32}$$

$$\sigma_{rr}(r,0) = -\frac{1}{\sqrt{d}}\int_0^{+\infty}\frac{\psi(t)t^2}{t+\chi}J_0(rt)dt + \frac{(1-b)(a+\sqrt{d})}{(d-ac)r}\int_0^{+\infty}\frac{\psi(t)t}{t+\chi}J_1(rt)dt, \quad (33)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r,0) = \frac{(s_1q_2 - s_2q_1)\sqrt{d}}{(s_1-s_2)(d-ac)}\int_0^{+\infty}\frac{\psi(t)t^2}{t+\chi}J_0(rt)dt -$$

$$-\frac{(1-b)(a+\sqrt{d})}{(d-ac)r}\int_0^{+\infty}\frac{\psi(t)t}{t+\chi}J_1(rt)dt. \quad (34)$$

Как видно из (32), касательные напряжения на границе полупространства отсутствуют. Преобразуем выражение (31) для напряжения σ_{zz}

$$\sigma_{zz}(r,0) = -\int_0^{+\infty}\frac{\psi(t)t^2}{t+\chi}J_0(rt)dt = -\int_0^{+\infty}\psi(t)\left(t - \frac{\chi t}{t+\chi}\right)J_0(rt)dt =$$

$$= -\int_0^{+\infty}\psi(t)tJ_0(rt)dt + \chi\int_0^{+\infty}\frac{\psi(t)t}{t+\chi}J_0(rt)dt = -\beta(r) + kw(r,0). \quad (35)$$

Из (35) видно, что граничные условия для напряжения σ_{zz} тождественно удовлетворяются.

Для определения $\psi(t)$ подставим функцию β, задаваемую формулой (7), в равенство (10)

$$\psi(t) = \int_0^{+\infty}\beta(\xi)\xi J_0(\xi t)d\xi = \int_0^{a}(q(\xi) + kw(\xi))\xi J_0(\xi t)d\xi. \quad (36)$$

Используя равенство (30), получим интегральное уравнение

$$\psi(t) = \int_0^{a} q(\xi)\xi J_0(\xi t)d\xi - \chi\int_0^{a}\int_0^{+\infty}\frac{\psi(t_1)t_1\xi}{t_1+\chi}J_0(\xi t)J_0(\xi t_1)dt_1d\xi. \quad (37)$$

Обозначив ядро интегрального уравнения через $K(t,t_1)$

$$K(t,t_1) = \int_0^{a}\xi J_0(\xi t)J_0(\xi t_1)d\xi, \quad (38)$$

запишем соотношение (37) в виде

$$\psi(t) = \int_0^{a} q(\xi)\xi J_0(\xi t)d\xi - \chi\int_0^{+\infty}\frac{\psi(t_1)t_1K(t,t_1)}{t_1+\chi}dt_1. \quad (39)$$

Таким образом, решение краевой задачи (5)–(6) для трансверсально-изотропного полупространства определяется формулами (16)–(21), (23)–(28), причем входящая в них функция $\psi(t)$ находится из интегрального уравнения (39).

Если в формулах (16)–(21), (39) положить $\chi = 0$ ($k = 0$), то получим решение С.Г.Лехницкого [9]. В случае сосредоточенной силы, когда $\beta(r) = \delta(r)$, результаты совпадаютс с формулами, приведенными в работе [4].

1. *Кавлакан М.В., Михайлов А.М.* Решение смешанной статической задачи теории упругости для полупространства на упругом основании // ДАН СССР 2551. – 1980.– №6. – С.1338-1341.
2. *Хапилова Н.С.* Осесимметричная смешанная задача для полупространства на упругом основании // Современные проблемы концентрации напряжений: Тр. Междунар. науч. конф., Донецк, 21-25 июня 1998. – С.242-246.
3. *Алтухова М.Л., Хапилова Н.С.* Смешанная задача теории упругости для трансверсально-изотропного полупространства, лежащего на упругом основании // Донецк: Теоретическая и прикладная механика, сб.39, 2004. – С.36-41.
4. *Алтухова М.Л.* Распределние нормального напряжения на границе трансверсально-изотропного полупространства,лежащего на упругом основании, при действии соредоточенной силы // Труды ИПММ НАН Украины. – 2003. – Т.8. – С.3-6.
5. *Залетов В.В.* Осесимметричная задача теории упругости для изотропного полупространства, лежащего на упругом основании, при действии сосредоточенной силы // Труды ИПММ НАН Украины. – 2004. – Т.9. – С.61-67.
6. *Хапилова Н.С., Алтухова М.Л.* Смешанная задача теории упругости для трансверсально-изотропного полупространства, лежащего на упругом основании // Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. Ростов-на Дону, 13-16.10.2003. Ростов на Дону: Новая книга, 2004. – С.391–393.
7. *Theret D.P., Levesque M.J., Sato M., Nerem R.M., Wheeler L.T.* The application of a homogeneous half-space model in the analysis of endothelial cell micropipette measurements // Journal of biomechanical engineering. August 1988. – Issue 3. – Vol.110. – P.190-199.
8. *Selvadurai A.P.* Boussinesq‘s Problem for an Elastic Half-Space Reinforced with a Rigid Disk Inclusion // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2000. – Vol.5. – No.4. – P.483-499.
9. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М: Наука, 1977. – 416с.
10. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. Учебник для втузов. – М.: Высшая школа, 1975. – 407с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
khapilova@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 30.10.09