УДК 517.91/943

©2009. **К.В. Шатковська**

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Знайдено умови існування і єдиності розв'язку початкової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з тотожно виродженою матрицею при похідних із запізненням аргументу, вказано метод побудови його асимптотики.

Розглянемо систему рівнянь

$$\varepsilon^h B\left(t\right)\frac{dx}{dt} = A\left(t,\varepsilon\right)x\left(t,\varepsilon\right) + C\left(t,\varepsilon\right)x\left(t-\Delta,\varepsilon\right), \tag{1}$$

з початковою умовою

$$x\left(t,\varepsilon\right) = \xi\left(t,\varepsilon\right), \forall t \in \left[-\Delta; 0\right], \tag{2}$$

де $x,\ \xi$ – n-вимірні вектори, $A(t,\varepsilon),\ C(t,\varepsilon),\ B(t)$ – квадратні матриці n-го порядку, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ – малий дійсний параметр, h – натуральне число, $\Delta > 0$.

Питання про побудову асимптотичного розв'язку початкової задачі для системи (1) досить детально вивчалось у випадку, коли матриця $B(t)$ неособлива на всьому проміжку зміни t. Бібліографію з цього питання можна знайти, наприклад, в [1]. У роботі [2] вперше розглянуто випадок, коли матриця $B(t)$ тотожно вироджена, де здійснена спроба застосувати до системи (1) матричні асимптотичні методи, розроблені в [1]. Як виявилось, такий підхід наштовхується на суттєві труднощі, для подолання яких доводиться накладати досить жорсткі умови на коефіцієнти асимптотичних розвинень, які будуються цими методами.

У даній статті пропонується інший підхід, який грунтується на теорії асимптотичного інтегрування вироджених лінійних систем, розроблений у [3], що дозволяє в явній формі виявляти умови на початковий вектор $\xi(t,\varepsilon)$, які запезпечують існування і єдиність розв'язку, та ефективно будувати його асимптотику.

Будемо передбачати, що виконуються такі умови:

1°. $\det B\left(t\right) = 0, \forall t \in [0;T]$;

2°. Матричні функції $A(t,\varepsilon),\ C(t,\varepsilon)$ і вектор-функція $\xi(t,\varepsilon)$ допускають на $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε:

$$A\left(t,\varepsilon\right) \sim \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k A_k\left(t\right), C\left(t,\varepsilon\right) \sim \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k C_k\left(t\right), \tag{3}$$

$$\xi\left(t,\varepsilon\right) \sim \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k \xi_k\left(t\right); \tag{4}$$

3°. $A_k\left(t\right), C_k\left(t\right), \xi_k\left(t\right) \in C^{\infty}_{[0;T]}$;

4°. Гранична в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ регулярна [4] і має сталу кронекерову структуру при всіх $t \in [0;T]$.

Розв'язок початкової задачі (1), (2) знаходиться методом кроків на відрізках $[0;\Delta], [\Delta;2\Delta], \ldots$, що приводить до необхідності розв'язання задач Коші

$$\varepsilon^h B(t) \frac{dx_1}{dt} = A(t,\varepsilon) x_1(t,\varepsilon) + C(t,\varepsilon) \xi(t-\Delta,\varepsilon), t \in [0;\Delta]; \tag{5}$$

$$x_1(0,\varepsilon) = \xi(0,\varepsilon); \tag{6}$$

$$\varepsilon^h B(t) \frac{dx_{s+1}}{dt} = A(t,\varepsilon) x_{s+1}(t,\varepsilon) + C(t,\varepsilon) x_s(t-\Delta,\varepsilon), t \in [s\Delta,(s+1)\Delta]; \tag{7}$$

$$x_{s+1}(s\Delta,\varepsilon) = x_s(s\Delta,\varepsilon), s = 1,2,\ldots\ . \tag{8}$$

Як показано в [3], при досить малих $\varepsilon > 0$ за виконання умов 1°-4° та деяких обмежень на структуру збурювальних матриць $A_k(t),\ k = 1,2,\ldots$, системи (5), (7) задовольняють умови теореми про звідність до центральної канонічної форми [5]. Тому згідно з [5] задачі (5), (6) будуть однозначно розв'язними тоді і тільки тоді, коли виконуватимуться умови

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i}{dt^i} \Big(A(t,\varepsilon) \xi(0,\varepsilon) + C(t,\varepsilon) \xi(t-\Delta,\varepsilon), \psi_j^{(k-i)}(t,\varepsilon) \Big)_{t=0} = 0, \tag{9}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i}{dt^i} \Big(A(t,\varepsilon) x_s(s\Delta,\varepsilon) + C(t,\varepsilon) x_s(t-\Delta,\varepsilon), \psi_j^{(k-i)}(t,\varepsilon) \Big)_{t=s\Delta} = 0, \tag{10}$$

$$k = \overline{1,s_j}, j = \overline{1,r}, s = 1,2,\ldots\ ,$$

де $\psi_j^{(i)}(t,\varepsilon), i = \overline{1,s_j}, j = \overline{1,r}$ – вектори, що утворюють повний жорданів набір матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t) = A^*(t,\varepsilon) + \varepsilon^h \frac{d}{dt} B^*(t)$, а символом (x,y) позначається скалярний добуток векторів.

Умова (9) накладає обмеження на початкову вектор-функцію $\xi(t,\varepsilon)$. Що ж стосується умов (10), то, як виявилось, вони автоматично виконуються, якщо виконується (9). Покажемо це, поклавши для спрощення $r = 1, s = 2$. Маємо

$$\Big(A(\Delta,\varepsilon) x_1(\Delta,\varepsilon) + C(\Delta,\varepsilon) x_1(0,\varepsilon), \psi_1^{(1)}(\Delta) \Big) = 0; \tag{11}$$

$$\Big(A(\Delta,\varepsilon) x_1(\Delta,\varepsilon) + C(\Delta,\varepsilon) x_1(0,\varepsilon), \psi_1^{(2)}(\Delta,\varepsilon) \Big) +$$
$$+ \frac{d}{dt} \Big(A(t,\varepsilon) x_1(\Delta,\varepsilon) + C(t,\varepsilon) x_1(t-\Delta,\varepsilon), \psi_1^{(1)}(t) \Big)_{t=\Delta} = 0. \tag{12}$$

Оскільки вектор $x_1(t,\varepsilon)$ є розв'язком початкової задачі (5), (6) на відрізку $[0;\Delta]$ і, отже, $A(\Delta,\varepsilon) x_1(\Delta,\varepsilon) = \varepsilon^h B(\Delta) x_1'(\Delta,\varepsilon) - C(\Delta,\varepsilon) x_1(0,\varepsilon)$, а $B^*(t) \psi_1^{(1)}(t) = 0$, $\forall t \in [0;T]$, то звідси одразу випливає, що рівність (11) виконується, а перший доданок рівності (12) зводиться до вигляду

$$\varepsilon^h \Big(B(\Delta) x_1'(\Delta,\varepsilon), \psi_1^{(2)}(\Delta,\varepsilon) \Big) = \varepsilon^h \Big(x_1'(\Delta,\varepsilon), B^*(\Delta) \psi_1^{(2)}(\Delta,\varepsilon) \Big).$$

Взявши до уваги, що

$$B^*(t)\,\psi_1^{(2)}(t,\varepsilon)=L^*(t,\varepsilon)\,\psi_1^{(1)}(t)=\left(A^*(t,\varepsilon)+\varepsilon^h B^{*'}(t)+\varepsilon^h B^*(t)\,\frac{d}{dt}\right)\psi_1^{(1)}(t),$$

матимемо

$$\varepsilon^h\left(B(\Delta)\,x_1'(\Delta,\varepsilon),\psi_1^{(2)}(\Delta,\varepsilon)\right)=\left(A(\Delta,\varepsilon)\,x_1'(\Delta,\varepsilon),\psi_1^{(1)}(\Delta)\right)+$$
$$+\varepsilon^h\left(B(t)\,x_1'(t),\psi_1^{(1)}(t)\right)'_{t=\Delta}-\varepsilon^h\left(B(\Delta)\,x_1''(\Delta),\psi_1^{(1)}(\Delta)\right)=$$
$$=\left(A(\Delta,\varepsilon)\,x_1'(\Delta,\varepsilon),\psi_1^{(1)}(\Delta)\right).$$

Аналогічно перетворюючи другий доданок рівності (12), дістанемо

$$\frac{d}{dt}\left(A(t,\varepsilon)\,x_1(\Delta,\varepsilon)+C(t,\varepsilon)\,x_1(t-\Delta,\varepsilon),\psi_1^{(1)}(t)\right)_{t=\Delta}=$$
$$=\left(A(t,\varepsilon)\,x_1(t,\varepsilon),\psi_1^{(1)}(t)\right)'_{t=\Delta}+\left(C(t,\varepsilon)\,x_1(t-\Delta,\varepsilon),\psi_1^{(1)}(t)\right)'_{t=\Delta}-$$
$$-\left(A(\Delta,\varepsilon)\,x_1'(\Delta,\varepsilon),\psi_1^{(1)}(\Delta)\right)=\varepsilon^h\left(B(t)\,x_1'(t,\varepsilon),\psi_1^{(1)}(t)\right)'_{t=\Delta}-$$
$$-\left(C(t,\varepsilon)\,\xi(t-\Delta,\varepsilon),\psi_1^{(1)}(t)\right)'_{t=\Delta}+\left(C(t,\varepsilon)\,x_1(t-\Delta,\varepsilon),\psi_1^{(1)}(t)\right)'_{t=\Delta}-$$
$$-\left(A(\Delta,\varepsilon)\,x_1'(\Delta,\varepsilon),\psi_1^{(1)}(\Delta)\right)=-\left(A(\Delta,\varepsilon)\,x_1'(\Delta,\varepsilon),\psi_1^{(1)}(\Delta)\right),$$

оскільки $x_1(t-\Delta,\varepsilon)=\xi(t-\Delta,\varepsilon)$ при $t\in[0;\Delta]$ завдяки початковій умові (2). Отже, рівність (12) також виконується.

Використовуючи подібні міркування, методом індукції встановимо, що умови (10) виконуються при всіх можливих r і будь-яких s.

Застосуємо для побудови асимптотичних розв'язків початкових задач (5)-(8) метод, описаний у [6]. Для спрощення викладок розглянемо випадок, коли матрична в'язка $A_0(t)-\lambda B(t)$ має простий спектр. А саме, будемо припускати, що виконуються умови:

5°. В'язка матриць $A_0(t)-\lambda B(t)$ має $n-1$ простих скінченних елементарних дільників $\lambda-\lambda_i(t),\, i=\overline{1,n-1}$, і один – нескінченний.

6°. $\lambda_i(t)\neq 0, \forall t\in[0;T]$;

7°. $\mathrm{Re}\lambda_i(t)\leqslant 0, \forall t\in[0;T], i=\overline{1,n-1}$;

8°. $\lambda_i(t_1)\neq\lambda_j(t_2)$ для будь-яких $t_1<t_2,\ t_1,t_2\in[0;T],\ i,j=\overline{1,n-1}$.

З умови 5° випливає, що матриця $B(t)$ має просте нульове власне значення відносно матриці $A_0(t)$. Власний вектор, який йому відповідає, позначимо $\tilde{\varphi}(t)$, а відповідний елемент нуль-простору спряженої матриці $B^*(t)$ – $\tilde{\psi}(t)$. Оскільки A_0 – приєднані вектори в матриці $B(t)$ відсутні, то $\tilde{\psi}(t)$ можна визначити так, що

$$\left(A_0(t)\,\varphi(t),\psi(t)\right)=1. \tag{13}$$

Крім того, згідно з [7], можна домогтися, щоб вектори $\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)$ мали такий же ступінь гладкості, що й матричні функції $A_0(t), B(t)$, тобто $\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t) \in C^{\infty}_{[0;T]}$, що й передбачатимемо в подальших викладках.

Власні вектори матриці $A_0(t)$ відносно $B(t)$, які відповідають її власним значенням $\lambda_i(t), i = \overline{1, n-1}$, позначимо $\varphi_i(t)$, а відповідні елементи нуль-простору матриці $(A_0(t) - \lambda_i(t) B(t))^* - \psi_i(t)$. При цьому визначимо їх так [3], щоб вони були нескінченно диференційовними на $[0;T]$ і виконувались співвідношення

$$(B(t)\varphi_i(t), \psi_j(t)) = \delta_{ij}, \ i, j = \overline{1, n-1}, \tag{14}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Виходячи з канонічної форми матричної в'язки $A_0(t) - \lambda B(t)$ [4], неважко переконатися, що мають місце співвідношення

$$\left(A_0(t)\varphi_i(t), \tilde{\psi}(t)\right) = 0, \ i = \overline{1, n-1}; \tag{15}$$

$$(B(t)\tilde{\varphi}(t), \psi_i(t)) = 0, \ i = \overline{1, n-1}; \tag{16}$$

$$H_i^*(t) A_0^*(t)\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}(t), \tag{17}$$

де $H_i(t)$ – напівобернена матриця $[3, c.18-22]$ до матриці $A_0(t) - \lambda_i(t) B(t)$.

Із співвідношення (13) випливає, що жорданів набір матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$ складається лише з одного вектора $\tilde{\psi}(t)$. Тому умова (9) спрощується і набуває вигляду

$$\left(A(0,\varepsilon)\xi(0,\varepsilon) + C(0,\varepsilon)\xi(-\Delta,\varepsilon), \tilde{\psi}(0)\right) = 0. \tag{18}$$

Зокрема, згідно з $(3), (4)$ вона виконуватиметься, якщо коефіцієнти $\xi_k(t)$ розвинення (4) задовольнятимуть співвідношення

$$\left(\sum_{i=0}^{k} A_i(0)\xi_{k-i}(0) + \sum_{i=0}^{k} C_i(0)\xi_{k-i}(-\Delta), \tilde{\psi}(0)\right) = 0, \ k = 0, 1, \dots . \tag{19}$$

Оскільки в даному випадку загальний розв'язок однорідної системи, яка відповідає (5), є лінійною комбінацією її $n-1$ лінійно незалежних розв'язків [3,п.3.2], то розв'язок задачі $(5), (6)$ будемо шукати у вигляді

$$x_1(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(t,\varepsilon)\,dt\right) + v(t,\varepsilon), \tag{20}$$

де $u_i(t,\varepsilon), i = \overline{1, n-1}, \ v(t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\varepsilon), i = \overline{1, n-1}$, – скалярні функції, які зображуються у вигляді формальних розвинень

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(i)}(t); \lambda_i(t,\varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), i = \overline{1, n-1}; \tag{21}$$

$$v(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t). \tag{22}$$

Підставивши (20) в систему (5) і прирівнявши вирази при однакових експонентах та вирази без експонент, матимемо

$$A(t,\varepsilon)\,u_i(t,\varepsilon)=\lambda_i(t,\varepsilon)\,B(t)\,u_i(t,\varepsilon)+\varepsilon^h B(t)\,u_i'(t,\varepsilon)\,,\ i=\overline{1,n-1}; \tag{23}$$

$$A(t,\varepsilon)\,v(t,\varepsilon)=-C(t,\varepsilon)\,\xi(t-\Delta,\varepsilon)+\varepsilon^h B(t)\,v'(t,\varepsilon)\,. \tag{24}$$

Зафіксуємо в (23) індекс i і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε з урахуванням розвинень (3), (4), (21), дістанемо

$$\left[A_0(t)-\lambda_i(t)\,B(t)\right]u_0^{(i)}(t)=0, \tag{25}$$

$$\left[A_0(t)-\lambda_i(t)\,B(t)\right]u_k^{(i)}(t)=b_k^{(i)}(t)\,,k=1,2,\ldots, \tag{26}$$

де

$$b_k^{(i)}(t)=-\sum_{j=1}^{k}A_j(t)\,u_{k-j}^{(i)}(t)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^{(i)}(t)\,B(t)\,u_{k-j}^{(i)}(t)+B(t)\left(u_{k-h}^{(i)}(t)\right)'. \tag{27}$$

За виконання умови розв'язності

$$\left(b_k^{(i)}(t)\,,\psi_i(t)\right)=0,\ k=1,2,\ldots \tag{28}$$

вектори $u_k^{(i)}(t)$ з цих рівнянь визначатимемо за формулами

$$u_0^{(i)}(t)=c_0^{(i)}\varphi_i(t)\,;u_k^{(i)}(t)=H_i(t)\,b_k^{(i)}(t)+c_k^{(i)}\varphi_i(t)\,,k=1,2,\ldots\ , \tag{29}$$

де $c_k^{(i)}, k=0,1,\ldots$, – сталі, які визначатимуться з початкової умови.

Для визначення ж функцій $\lambda_k^{(i)}, k=1,2,\ldots,$ використаємо умову (28). З цією метою, здійснюючи взаємну підстановку формул (27), (29), вираз для векторів $b_k^{(i)}(t)$ подамо у вигляді

$$b_k^{(i)}(t)=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}\tilde{P}_j^{k-s}\left(H_iL^{(i)}\right)\varphi_i(t)\,c_s^{(i)}, \tag{30}$$

де символом $P_j^{k-s}\left(H_iL^{(i)}\right)$ позначається сума всіх можливих "добутків" j "множників" $H_iL_{k_1}^{(i)}, H_iL_{k_2}^{(i)},\ldots,H_iL_{k_j}^{(i)}$ з натуральними індексами $k_1,k_2,\ldots,k_j$, сума яких $k_1+k_2+\ldots+k_j=k-s$. При цьому

$$L_s^{(i)}(t)=-A_s(t)+\lambda_s^{(i)}(t)\,B(t)+\delta_{s,h}B(t)\,\frac{d}{dt},\ s=1,2,\ldots\ . \tag{31}$$

Вираз $\tilde{P}_j^{k-s}\left(H_iL^{(i)}\right)$ відрізняється від $P_j^{k-s}\left(H_iL^{(i)}\right)$ відсутністю у всіх його доданках першого множника $H_i(t)$, тобто $H_i\tilde{P}_j^{k-s}\left(H_iL^{(i)}\right)=P_i^{k-s}\left(H_iL^{(i)}\right)$.

Тоді з умови (28), враховуючи її рекурентний характер, знайдемо

$$\lambda_k^{(i)}(t)=\left(A_k(t)\,\varphi_i(t)\,,\psi_i(t)\right)-\delta_{k,h}\left(B(t)\,\varphi_i'(t)\,,\psi_i(t)\right)-$$
$$-\sum_{j=2}^{k}\left(\tilde{P}_j^{k}\left(H_iL^{(i)}\right)\varphi_i(t)\,,\psi_i(t)\right),k=1,2,\ldots\ . \tag{32}$$

Підставивши (30) у (29), отримаємо відповідний вираз для векторів $u_k^{(i)}(t)$:

$$u_k^{(i)}(t) = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-s} c_s^{(i)} P_j^{k-s} \left(H_i L^{(i)} \right) \varphi_i(t) + c_k^{(i)} \varphi_i(t),\ k = 1, 2, \dots\ . \tag{33}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε в рівності (24), дістанемо

$$A_0(t) v_k(t) = -\sum_{i=1}^{k} A_i(t) v_{k-i}(t) + B(t) v'_{k-h}(t) - \sum_{i=0}^{k} C_i(t) \xi_{k-i}(t-\Delta), k = 0, 1, \dots\ . \tag{34}$$

Оскільки $\det A_0(t) \neq 0, \forall t \in [0; T]$ завдяки умові $6°$, то звідси однозначно визначаються будь-які коефіцієнти розвинення (22):

$$v_k(t) = A_0^{-1}(t) d_k(t), k = 1, 2, \dots, \tag{35}$$

де $d_k(t)$ – права частина в (34).

Тепер для визначення сталих $c_k^{(i)}$ в формулах (33) використаємо початкову умову (6). Із врахуванням $(20), (33), (4)$ вона записується у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_k^{(i)} \varphi_i(0) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-s} c_s^{(i)} P_j^{k-s} \left(H_i L^{(i)} \right) \varphi_i(0) + v_k(0) = \xi_k(0),\ k = 0, 1, \dots\ . \tag{36}$$

Поклавши в (36) $k = 0$, маємо

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} \varphi_i(0) = \xi_0(0) - v_0(0). \tag{37}$$

Вектори $\varphi_i(0), i = \overline{1, n-1}, \tilde{\varphi}(0)$, лінійно незалежні в заданому n-вимірному просторі і, отже, утворюють його базис. Розкладемо за цим базисом вектор $\xi_0(0) - v_0(0)$. Нехай $\xi_0(0) - v_0(0) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(0)} \varphi_i(0) + \alpha_n^{(0)} \tilde{\varphi}(0)$. Взявши до уваги співвідношення (13) – (16), звідси дістанемо

$$\alpha_i^{(0)} = (B[\xi_0 - v_0], \psi_i), i = \overline{1, n-1}; \alpha_n^{(0)} = \left(A_0[\xi_0 - v_0)], \tilde{\psi} \right).$$

Тоді з рівності (37) на підставі єдиності розкладу вектора за базисом маємо

$$c_0^{(i)} = \alpha_i^{(0)}, i = \overline{1, n-1};\ \alpha_n^{(0)} = \left(A_0(0) [\xi_0(0) - v_0(0)], \tilde{\psi}(0) \right) = 0. \tag{38}$$

Отже, з умови (37) однозначно визначаються сталі $c_0^{(i)}, i = \overline{1, n-1}$. Що ж стосується рівності (38), то вона збігається з умовою (19) при $k = 0$. Дійсно, взявши до уваги, що згідно з (35) $v_0(0) = -A_0(0) C_0(0) \xi_0(-\Delta)$, маємо

$$\left(A_0(0) \xi_0(0) + C_0(0) \xi_0(-\Delta), \tilde{\psi}(0) \right) = 0.$$

Поклавши в (36) $k = 1$, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_1^{(i)} \varphi_i\left(0\right) = \xi_1\left(0\right) - v_1\left(0\right) - \sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} H_i L_1^{(i)} \varphi_i\left(0\right) = p_1.$$

Як і на попередньому кроці, сталі $c_1^{(i)}, i = \overline{1, n-1}$, звідси однозначно визначаються як коефіцієнти розкладу вектора p_1 у правій частині за базисними векторами $c_1^{(i)} = \left(B\left(0\right) p_1, \psi_i\left(0\right)\right), i = \overline{1, n-1}$. Крім того, з'являється умова

$$\left(A_0\left(0\right) \xi_1\left(0\right) - A_0\left(0\right) v_1\left(0\right) - \sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} A_0\left(0\right) H_i L_1^{(i)} \varphi_i\left(0\right), \tilde{\psi}\left(0\right)\right) = 0. \qquad (39)$$

Покажемо, що ця умова збігається з умовою (19) при $k = 1$. Дійсно, врахувавши співвідношення (17), (31), рівність (39) зведемо до вигляду

$$\left(A_0\left(0\right) \xi_1\left(0\right) - A_0\left(0\right) v_1\left(0\right) + A_1\left(0\right) \sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} \varphi_i\left(0\right), \tilde{\psi}\left(0\right)\right) = 0.$$

Взявши до уваги (37), дістанемо

$$\left(A_0\left(0\right) \xi_1\left(0\right) - A_0\left(0\right) v_1\left(0\right) + A_1\left(0\right) \xi_0\left(0\right) - A_1\left(0\right) v_0\left(0\right), \tilde{\psi}\left(0\right)\right) = 0.$$

Нарешті, врахувавши, що $v_1 = A_0^{-1}\left[-A_1 v_0 - C_0 \xi_1\left(-\Delta\right) - C_1 \xi_0\left(-\Delta\right)\right]$, остаточно матимемо

$$\left(A_0\left(0\right) \xi_1\left(0\right) + A_1\left(0\right) \xi_0\left(0\right) + C_0 \xi_1\left(-\Delta\right) + C_1 \xi_0\left(-\Delta\right), \tilde{\psi}\left(0\right)\right) = 0.$$

Продовжуючи так і далі, з рівностей (36) визначимо сталі $c_k^{(i)}, i = \overline{1, n-1}$, при $k = 2, 3, \ldots$. При цьому методом математичної індукції легко переконатися, що умови сумісності рівнянь (36) збігаються з умовами (19).

Таким чином, якщо початкова вектор-функція $\xi(t, \varepsilon)$ задовольняє умови (19), то задача Коші (5), (6) має формальний розв'язок вигляду (20), де коефіцієнти відповідних розвинень (21), (22) визначаються за допомогою рекурентних формул (32), (33), (35), а сталі $c_k^{(i)}, i = \overline{1, n-1}, k = 0, 1, \ldots,$ – за описаним алгоритмом. Цей розв'язок буде формальним розв'язком початкової задачі (1), (2) на відрізку $[0; \Delta]$.

Водночас згідно з теоремою 2.4 із [3, *с.*67] виконання умови (19) гарантує існування і єдиність точного розв'язку $x^{(1)}(t, \varepsilon)$ задачі (5), (6) на заданому відрізку $[0; T]$, який є розв'язком початкової задачі (2) для системи рівнянь (1) на $[0; \Delta]$. Виходячи з умови 7°, методами роботи [3] можна довести, що побудований формальний розв'язок є асимптотичним розвиненням цього точного розв'язку, а саме, має місце рівність

$$x^{(1)}\left(t, \varepsilon\right) = \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}\left(t, \varepsilon\right) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}\left(t, \varepsilon\right) dt\right) + v_m\left(t, \varepsilon\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1-h}\right), \qquad (40)$$

де $u_m^{(i)}(t, \varepsilon), v_m(t, \varepsilon), \lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon)$ утворюються шляхом обірвання розвинень (21)–(22) на m-у члені.

У результаті приходимо до такої теореми.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* $1^\circ - 8^\circ$, *а також умова* (19), *то початкова задача* $(1),(2)$ *має на відрізку* $[0;\Delta]$ *єдиний розв'язок, який виражається асимптотичною формулою* (40).

Для продовження цього розв'язку на відрізок $[\Delta; 2\Delta]$ розглянемо задачу $(7),(8)$ при $s=1$, яка з врахуванням (40), запишеться у вигляді

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx_2}{dt} = A(t,\varepsilon)x_2 + \sum_{i=1}^{n-1} C(t,\varepsilon)u_m^{(i)}(t-\Delta,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^{t-\Delta}\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)\,dt\right)+$$

$$+C(t,\varepsilon)v_m(t-\Delta,\varepsilon) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1-h}\right), t\in[\Delta;2\Delta]; \tag{41}$$

$$x_2(\Delta,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(\Delta,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^{\Delta}\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)\,dt\right) + v_m(\Delta,\varepsilon) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1-h}\right). \tag{42}$$

За доведеним вище ця задача матиме єдиний розв'язок, який будемо шукати у вигляді

$$x_2(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^{t}\lambda_i(t,\varepsilon)\,dt\right) + \sum_{i=1}^{n-1}\tilde u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_\Delta^{t}\lambda_i(t,\varepsilon)\,dt\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\hat u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^{t-\Delta}\lambda_i(t,\varepsilon)\,dt\right) + \tilde v(t,\varepsilon), \tag{43}$$

де вектори $u_i(t,\varepsilon)$ і функції $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ – ті самі, що і в розв'язку (20), побудованому на першому кроці, а $\tilde v(t,\varepsilon), \tilde u_i(t,\varepsilon), \hat u_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ – вектори, які підлягають визначенню і зображаються формальними розвиненнями

$$\tilde u_i(t,\varepsilon) = \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k \tilde u_k^{(i)}(t), \hat u_i(t,\varepsilon) = \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k \hat u_k^{(i)}(t), \tilde v(t,\varepsilon) = \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k \tilde v_k(t). \tag{44}$$

Підставимо вектор (43) в систему (41) . Врахувавши співвідношення (23) та прирівнявши вирази при однакових експонентах і без них, дістанемо

$$\varepsilon^h B(t)\tilde u_i'(t,\varepsilon) + \lambda_i(t,\varepsilon)B(t)\tilde u_i(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)\tilde u_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n-1};$$

$$\varepsilon^h B(t)\hat u_i'(t,\varepsilon) + \lambda_i(t-\Delta,\varepsilon)B(t)\hat u_i(t,\varepsilon) =$$

$$= A(t,\varepsilon)\hat u_i(t,\varepsilon) + C(t,\varepsilon)u_m^{(i)}(t-\Delta,\varepsilon), i=\overline{1,n-1};$$

$$\varepsilon^h B(t)\tilde v'(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)\tilde v(t,\varepsilon) + C(t,\varepsilon)v_m(t-\Delta,\varepsilon) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1-h}\right).$$

Підставляючи в ці співвідношення розвинення $(3),(44),(21),(22)$ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, отримаємо відповідні формули для визначення вектор-функцій $\tilde u_k^{(i)}(t)$, $\hat u_k^{(i)}(t), v_k(t), k\geqslant 0$. Зокрема, вектори $\tilde u_k^{(i)}(t)$ знаходитимуться за формулами, аналогічними (33):

$$\tilde{u}_k^{(i)}(t) = \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s} \tilde{c}_s^{(i)} P_j^{k-s}\left(H_i L^{(i)}\right)\varphi_i(t) + \tilde{c}_k^{(i)}\varphi_i(t), i = \overline{1, n-1}, k \geqslant 0, \tag{45}$$

в яких підлягають визначенню сталі $\tilde{c}_s^{(i)}$. Враховуючи умови $6^\circ, 8^\circ$, для векторів $\hat{u}_k^{(i)}(t), \tilde{v}_k(t), k \geqslant 1$, отримаємо

$$\hat{u}_k^{(i)}(t) = (A_0(t) - \lambda_i(t-\Delta)B(t))^{-1}\left[\sum_{s=1}^{k}\lambda_s^{(i)}(t-\Delta)B(t)\hat{u}_{k-s}^{(i)}(t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=1}^{k} A_s(t)\hat{u}_{k-s}^{(i)}(t) - \sum_{s=0}^{k} C_s(t) u_{k-s}^{(i)}(t-\Delta) + B(t)(\hat{u}_{k-h}(t))'\right]; \tag{46}$$

$$\tilde{v}_k(t) = A_0^{-1}(t)\left[B(t)\tilde{v}'_{k-h}(t) - \sum_{s=1}^{k} A_s(t)\tilde{v}_{k-s}(t) - \sum_{s=0}^{k} C_s(t) v_{k-s}(t-\Delta)\right]. \tag{47}$$

Як і на попередньому кроці, для визначення сталих $\tilde{c}_s^{(i)}$, $s = \overline{1, n-1}$, використаємо початкову умову (42), яка згідно з (43) запишеться у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i(\Delta, \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^\Delta \lambda_i(t,\varepsilon)\,dt\right) + \sum_{i=1}^{n-1}\tilde{u}_i(\Delta,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n-1}\hat{u}_i(\Delta,\varepsilon) + \tilde{v}(\Delta,\varepsilon) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(\Delta,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^\Delta \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)\,dt\right) + v_m(\Delta,\varepsilon) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1-h}\right),$$

звідки, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, матимемо

$$\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{u}_k^{(i)}(\Delta) + \sum_{i=1}^{n-1}\hat{u}_k^{(i)}(\Delta) + \tilde{v}_k(\Delta) = v_k(\Delta), k \geqslant 0.$$

Зокрема, при $k = 0$, взявши до уваги (45), дістанемо
$\sum\limits_{i=1}^{n-1}\tilde{c}_0^{(i)}\varphi_i(\Delta) = v_0(\Delta) - \tilde{v}_0(\Delta) - \sum\limits_{i=1}^{n-1}\hat{u}_0^{(i)}(\Delta)$.

Міркуючи так само, як і при визначенні сталих $c_0^{(i)}, i = \overline{1, n-1}$ із рівності (37), звідси знайдемо $\tilde{c}_0^{(i)}, i = \overline{1, n-1}$. При цьому з'явиться умова

$$\left(A_0(\Delta)v_0(\Delta) - A_0(\Delta)\tilde{v}_0(\Delta) - \sum_{i=1}^{n-1} A_0(\Delta)\hat{u}_0^{(i)}(\Delta), \tilde{\psi}(\Delta)\right) = 0. \tag{48}$$

Покажемо, що вона виконується. Дійсно, згідно з (46), (47)

$$\tilde{v}_0(\Delta) = -A_0^{-1}(\Delta)C_0(\Delta)v_0(0),$$

$$\hat{u}_0^{(i)}(\Delta) = -(A_0(\Delta) - \lambda_i(0)B(\Delta))^{-1}C_0(\Delta)u_0^{(i)}(0).$$

Тоді, взявши до уваги, що

$A_0^*(t)\,\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}(t)$, $\left[(A_0(t) - \lambda_i(t-\Delta)\,B(t))^*\right]^{-1}\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}(t)$, умову (48) запишемо у вигляді $A_0(\Delta)\,v_0(\Delta) + C_0(\Delta)\left[v_0(0) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} u_0^{(i)}(0)\right] = 0$, звідки, враховуючи (29), (35), (37), переконуємось у її виконанні.

Аналогічно визначаються сталі $\tilde{c}_s^{(i)}$ при $s \geqslant 1$.

Методами [3] можна довести, що побудований у такий спосіб формальний розв'язок (43) задачі $(41),(42)$ є асимптотичним зображенням точного розв'язку $x^{(2)}(t,\varepsilon)$ початкової задачі $(1),(2)$ на відрізку $[\Delta;2\Delta]$, а саме:

$$x^{(2)}(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)\,dt\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{u}_{m-h}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_\Delta^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)\,dt\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} \hat{u}_{m-h}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^{t-\Delta} \lambda_{m-h}^{(i)}(t,\varepsilon)\,dt\right) + \tilde{v}_{m-h} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1-2h}\right), \qquad (48)$$

де $\tilde{u}_{m-h}^{(i)}(t,\varepsilon), \hat{u}_{m-h}^{(i)}(t,\varepsilon), \tilde{v}_{m-h}(t,\varepsilon)$ утворюються з формальних розвинень (44), якщо в них обмежитись першими $m-h$ членами.

Отже, справджується така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* $1^\circ - 8^\circ$, *і умова* (19), *то початкова задача* $(1),(2)$ *має на відрізку* $[\Delta;2\Delta]$ *єдиний розв'язок, який виражається асимптотичною формулою* (48).

Продовжуючи аналогічні міркування, можна побудувати асимптотику розв'язку даної задачі на відрізках $[2\Delta;3\Delta],\ldots,[(k-1)\Delta;k\Delta], k \leqslant \frac{T}{\Delta}$.

1. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Пидченко Ю.П., Сотниченко Н.А.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – К.: Наук. думка, 1981. – 296с.
2. *Самусенко П.Ф.* Побудова асимптотичних розв'язків систем диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу та виродженою матрицею при похідних // Нелінійні коливання. – 2002. – т.5, №4. – С.527-539.
3. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища школа, 2000. – 294с.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552с.
5. *Самойленко А.М., Яковец В.П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Докл. АН Украины. – 1993. – №4. – С.10-15.
6. *Яковець В.П., Кочерга О.І.* Асимптотика розв'язку задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи // Допов. НАН України. – 1999. – №5. – С.21-23.
7. *Y. Sibuya.* Some global properties of functions of one variable // Math.Anal. – 1965. – 161, №1. – P.67-77.

Національний педагогічний ун-т імені М.П.Драгоманова, Київ
shatkovskakv@ukr.net

Получено 20.02.09