УДК 519.3:62-50

©2009. **О.В. Тарасенко**

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА К ВЫРОЖДЕННЫМ ЛИНЕЙНЫМ ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача оптимального управления процессом, который описывается линейной системой дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных. Доказано, что в случае приводимости этой системы к центральной канонической форме для решения данной задачи оптимального управления применим принцип максимума Л.С.Понтрягина.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + C(t)u; \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_1; \tag{2}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T ((D(t)u(t), u(t))dt \to min, \tag{3}$$

где $x(t)$ – n-мерный вектор состояния, $u(t)$ – m-мерный вектор управления, $A(t)$, $B(t)$ – квадратные матрицы n-го порядка, $C(t)$, $D(t)$ – матрицы размерности $(n \times m)$ и $(m \times m)$, соответственно. Предполагается, что матрица $D(t)$ эрмитова и положительно определена, $detB(t) \equiv 0$ на $[0;T]$, а область допустимых управлений $u(t)$ совпадает со всем m-мерным векторным пространством.

Задача состоит в отыскании такого управления $u(t)$, которое переведет систему из состояния x_0 в состояние x_1 за конечный промежуток времени T, минимизируя функционал $J(u)$.

Как известно [1], в случае, когда $detB(t) \neq 0$, для решения задачи (1)–(3) можно применить принцип максимума, выполнение которого является необходимым условием существования искомого оптимального управления. Наличие вырожденной матрицы при производных значительно усложняет эту задачу.

В данной статье показано, что к задаче (1)–(3) можно также применить принцип максимума, если система (1) удовлетворяет условиям теоремы о приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме, доказанной в [2].

Допустим, что выполняются все условия этой теоремы, а именно:

1. $rankB(t) = n - r$, $\forall t \in [0;T]$;

2. матрица $B(t)$ имеет на отрезке $[0;T]$ полный жорданов набор векторов относительно оператора $L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}$, состоящий из r цепочек $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, длины $s_1, s_2, \ldots, s_r$;

3. $A(t)$, $B(t) \in C^{3p-2}_{[0;T]}$; $C(t)$, $u(t) \in C^{p-1}_{[0;T]}$, где $p = \max_i s_i$.

Как показано в [2–4], при выполнении этих условий однородная система

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{4}$$

имеет общее решение типа Коши, которое представляется в виде линейной комбинации ее $n-s$ линейно независимых частных решений, где $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_r$. Обозначим через $X_{n-s}(t)$ прямоугольную матрицу размерности $n \times (n-s)$, составленную из этих решений, которую, следуя [4, п. 2.2], будем называть фундаментальной матрицей системы (4). Составленную аналогично фундаментальную матрицу соответствующей сопряженной системы

$$\frac{d}{dt}\left(B^*(t)y\right) = -A^*(t)y \tag{5}$$

обозначим $Y_{n-s}(t)$, определив ее так, чтобы выполнялось соотношение

$$Y^*_{n-s}(t)B(t)X_{n-s}(t) = E_{n-s},$$

где E_{n-s} – единичная матрица $(n-s)$-го порядка [4, с. 54].

Пусть

$$\Phi(t) = \left[\varphi_1^{(1)}(t), \ldots, \varphi_1^{(s_1)}(t); \varphi_2^{(1)}(t), \ldots, \varphi_2^{(s_2)}(t); \ldots; \varphi_r^{(1)}(t), \ldots, \varphi_r^{(s_r)}(t)\right],$$

$$\Psi(t) = \left[\psi_1^{(s_1)}(t), \ldots, \psi_1^{(1)}(t); \psi_2^{(s_2)}(t), \ldots, \psi_2^{(1)}(t); \ldots; \psi_r^{(s_r)}(t), \ldots, \psi_r^{(1)}(t)\right]$$

– $(n \times s)$-матрицы, составленные из векторов $\varphi_i^{(j)}(t)$, $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, образующих жордановые цепочки матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ и матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt}B^*(t)$, соответственно. Составив $(n \times n)$-матрицы

$$P(t) = [X_{n-s}(t), \Phi(t)], \qquad Q(t) = [Y_{n-s}(t), \Psi(t)]^*,$$

сделаем в системе (1) замену $x(t) = P(t)y(t)$ и умножим слева на $Q(t)$. В результате, согласно [4, с. 65–66], система (1) приводится к виду

$$\begin{pmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} Y^*_{n-s}(t)C(t)u(t) \\ \Psi^*(t)C(t)u(t) \end{pmatrix},$$

где $I = diag\{I_1, I_2, \ldots, I_r\}$, I_j – нильпотентная клетка жордана размерности s_j. Тогда задача (1)–(3) распадается на две: задачу оптимального управления

$$\frac{dy_1}{dt} = Y^*_{n-s}(t)C(t)u(t); \tag{6}$$

$$y_1(0) = [Q^{-1}(0)]_1 x_0, \qquad y_1(T) = [Q^{-1}(T)]_1 x_1; \tag{7}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T ((D(t)u(t), u(t))dt \to min \tag{8}$$

и краевую задачу

$$I\frac{dy_2}{dt} = y_2 + \Psi^*(t)C(t)u(t); \tag{9}$$

$$y_2(0) = [Q^{-1}(0)]_2 x_0, \qquad y_2(T) = [Q^{-1}(T)]_2 x_1, \tag{10}$$

где $y_1(t)$, $y_2(t)$ – $(n-s)$-мерный и s-мерный векторы, которые составляют $y(t)$, $[Q^{-1}]_1$, $[Q^{-1}]_2$ – прямоугольные матрицы, состоящие соответственно из $n-s$ первых и s последних строк матрицы Q^{-1}.

Так как система (6) имеет явный вид, то к задаче (6)–(8) применим принцип максимума. Если эта задача имеет решение, то существует ненулевой $(n-s)$-мерный вектор p таков, что

$$C^*(t)Y_{n-s}(t)p - D(t)u(t) = 0; \qquad \frac{dp}{dt} = 0,$$

откуда с учетом (6) находим

$$u(t) = D^{-1}(t)C^*(t)Y_{n-s}(t)c_1; \tag{11}$$

$$y_1(t) = \int\limits_0^t Y^*_{n-s}(\tau)C(\tau)D^{-1}(\tau)C^*(\tau)Y_{n-s}(\tau)d\tau c_1 + c_2, \tag{12}$$

где c_1, c_2 – постоянные $(n-s)$-мерные векторы, для определения которых используем краевые условия (7).

Предположим, что

$$detW(T) \neq 0, \tag{13}$$

где

$$W(t) = \int\limits_0^t Y^*_{n-s}(\tau)C(\tau)D^{-1}(\tau)C^*(\tau)Y_{n-s}(\tau)d\tau.$$

Тогда, приняв во внимание соотношение

$$\left[Q^{-1}(t)\right]_1 = Y^*_{n-s}(t)B(t), \tag{14}$$

доказанное в [4, с. 71], будем иметь

$$c_1 = W^{-1}(T)\left[Y^*_{n-s}(T)B(T)x_1 - Y^*_{n-s}(0)B(0)x_0\right], \tag{15}$$

$$c_2 = Y^*_{n-s}(0)B(0)x_0. \tag{16}$$

В свою очередь, решая уравнение (9) с учетом (11), найдем

$$y_2(t) = -\sum_{k=0}^{p-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi^*(t)C(t)D^{-1}(t)C^*(t)Y_{n-s}(t)\right]c_1. \tag{17}$$

При этом, согласно [4, с. 71], краевые условия (10) запишутся в виде

$$\Psi^*(0)A(0)x_0 + \frac{d}{dt}[\Psi^*(t)B(t)]_{t=0}x_0 + \Omega(0)c_1 = 0; \tag{18}$$

$$\Psi^*(T)A(T)x_1 + \frac{d}{dt}[\Psi^*(t)B(t)]_{t=T}x_1 + \Omega(T)c_1 = 0, \tag{19}$$

где

$$\Omega(t) = \sum_{k=0}^{p-1} J^k \frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)C(t)D^{-1}(t)C^*(t)Y_{n-s}(t)].$$

Переходя к исходной переменной и учитывая (12), (17), (15), (16), получим следующие выражения для оптимальной траектории и оптимального управления:

$$\begin{aligned} x(t) = P(t)y(t) = X_{n-s}(t)y_1(t) + \Phi(t)y_2(t) = (X_{n-s}(t)W(t) - \Phi(t)\Omega(t))c_1 + \\ + X_{n-s}(t)c_2 = (X_{n-s}(t)W(t) - \Phi(t)\Omega(t))W^{-1}(T)[Y^*_{n-s}(T)B(T)x_1 - \\ - Y^*_{n-s}(0)B(0)x_0] + X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(0)B(0)x_0; \end{aligned} \tag{20}$$

$$u(t) = D^{-1}(t)C^*(t)Y_{n-s}(t)W^{-1}(T)[Y^*_{n-s}(T)B(T)x_1 - Y^*_{n-s}(0)B(0)x_0], \tag{21}$$

если векторы x_0, x_1 начального и конечного состояний удовлетворяют условиям допустимости (18), (19). Рассмотрим теперь систему уравнений

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + C(t)u(t); \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}(B^*(t)p) = -A^*(t)p; \tag{23}$$

$$C^*(t)p - D(t)u = 0, \tag{24}$$

которая получается в результате формального применения принципа максимума непосредственно к исходной задаче оптимального управления (1)–(3), если в качестве гамильтониана взять функцию $H(t,x,p,u) = (A(t)x,p) + (C(t)u,p) - \frac{1}{2}(D(t)u,u)$, а условие минимизации критерия записать в виде

$$grad_u H = 0; \qquad \frac{d}{dt}(B^*(t)p) = -grad_x H. \tag{25}$$

Решая ее методом, описанным в [3, 4], найдем

$$p(t) = Y_{n-s}(t)c_1;$$

$$u(t) = D^{-1}(t)C^*(t)Y_{n-s}(t)c_1;$$

$$\begin{aligned} x(t) = X_{n-s}(t)c_2 + X_{n-s}(t)\int_0^t Y^*_{n-s}(\tau)C(\tau)D^{-1}(\tau)C^*(\tau)Y_{n-s}(\tau)d\tau c_1 - \\ - \Phi(t)\sum_{k=0}^{p-1} J^k \frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)C(t)u(t)] = X_{n-s}(t)c_2 + (X_{n-s}(t)W(t) - \Phi(t)\Omega(t))c_1, \end{aligned}$$

где c_1, c_2 – постоянные $(n-s)$-мерные векторы.

Используя краевые условия (2) и принимая во внимание, что $[Q^{-1}(t)]_1 X_{n-s}(t) = E_{n-s}$, $[Q^{-1}(t)]_1 \Phi(t) = 0$, а также соотношение (14), для определения c_1, c_2 получим формулы (15), (16). Кроме того, для выполнения условий (2) требуется, чтобы имели место равенства (18), (19).

Таким образом, применение принципа максимума к задаче (6)–(10), полученной из (1)–(3) с помощью эквивалентных преобразований, и его непосредственное применение к задаче (1)–(3) в виде (25) приводит к одному и тому же результату.

В итоге приходим к таким утверждениям.

Теорема 1. *Если выполняются условия 1–3, то для существования решения задачи оптимального управления (1)–(3) необходимо, чтобы существовал ненулевой n-мерный вектор $p(t)$, удовлетворяющий уравнению*

$$\frac{d}{dt}(B^*(t)p) = -A^*(t)p,$$

при котором имеет решение краевая задача

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + C(t)u(t);$$

$$D(t)u - C^*(t)p = 0;$$

$$x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_1.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1–3 и матрица $D(t)$ положительно определенная на заданном отрезке $[0;T]$. Тогда, если имеет место неравенство (13) и векторы x_0, x_1 удовлетворяют условиям допустимости*

$$\Psi^*(0)A(0)x_0 + \frac{d}{dt}[\Psi^*(t)B(t)]_{t=0}x_0 + \Omega(0)W^{-1}(T)[Y^*_{n-s}(T)B(T)x_1 - Y^*_{n-s}(0)B(0)x_0] = 0;$$

$$\Psi^*(T)A(T)x_1 + \frac{d}{dt}[\Psi^*(t)B(t)]_{t=T}x_1 + \Omega(T)W^{-1}(T)[Y^*_{n-s}(T)B(T)x_1 - Y^*_{n-s}(0)B(0)x_0] = 0,$$

то существует единственное оптимальное управление $u(t)$, переводящее данную систему из состояния x_0 в состояние x_1 за время T минимизируя функционал (3), которое выражается формулой (21). При этом переход системы из одного состояния в другое осуществляется по траектории, определяемой формулой (20).

В заключение отметим, что теорема 1 может эффективно использоваться для приближенного решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u; \tag{26}$$

$$x(0,\varepsilon) = x_0(\varepsilon), \qquad x(T,\varepsilon) = x_1(\varepsilon);$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T ((D(t,\varepsilon)u, u)dt \to min,$$

с применением асимптотических методов, разработанных в [4, 5], поскольку в случае стабильного поведения спектра предельного пучка матриц $A(t,0)-\lambda B(t)$ и отсутствия точек поворота система (26) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условиям приводимости к центральной канонической форме.

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983 – 392с.
2. *Самойленко А.М., Яковец В.П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Докл. АН Украины. – 1993. – № 4. – С.10-15.
3. *Яковець В.П.* Деякі властивості вироджених лінійних систем // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, № 9. – С.1278-1296.
4. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294с.
5. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – К.: Выща шк., 1991. – 207с.

Нежинский государственный ун-т им. Николая Гоголя
oxana.tarasenko@gmail.com
Получено 30.02.09