ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2009. Том 18

УДК 539.3

©2009. **О.Д. Смоктий**

КРАЕВОЙ РЕЗОНАНС ПРИ СИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУСЛОЯ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНЯМИ

Рассмотрена задача определения частот краевого резонанса при симметричных по толщине колебаниях трансверсально-изотропного полуслоя со свободными плоскими гранями. Описан алгоритм применения в рассматриваемой задаче метода рядов по базисной системе динамических однородных решений. Рассчитаны значения приведенных частот краевого резонанса для ряда трансверсально-изотропных материалов с различными показателями волновой анизотропии, а также значения верхних границ частотных интервалов, априори содержащих частоту краевого резонанса. Рассчитаны и проанализированы амплитудные формы колебаний приторцевой зоны трансверсально-изотропных полуслоев на частотах краевого резонанса и на частотах, близких к первой ненулевой частоте запирания нормальных бегущих P-SV волн для рассматриваемых полуслоев.

Введение. Различные аспекты явления краевого резонанса при установившихся упругих колебаниях изотропного полуслоя (полуполосы) исследованы и обобщены в работах [1–9, 12]. Применительно к полуслою с начальными деформациями в толщинном направлении и смешанными краевыми условиями на плоских гранях особенности проявления краевого резонанса описаны в публикации [11]. Данная работа посвящена анализу отдельных характеристик краевого резонанса для ранее не исследованного случая возбуждения симметричных по толщине колебаний в трансверсально-изотропном полуслое со свободными от напряжений плоскими гранями.

1. Постановка задачи. Рассматривается трансверсально-изотропный полуслой с нормированными упругими постоянными c_{ij}, занимающий в системе безразмерных прямоугольных координат $Ox_1x_2x_3$ область:

$$V = \{0 \le x_1 < +\infty,\ -\infty < x_2 < +\infty,\ -h \le x_3 \le h\}. \qquad (1)$$

Плоские грани полуслоя свободны от механических напряжений

$$\sigma_{3j}|_{x_3=\pm h} = 0,\ j = \overline{1,3} \qquad (2)$$

Колебания полуслоя инициируются приложенными на боковой поверхности симметричными по его толщине внешними нормальными усилиями либо обусловлены действием уединенной гармонической бегущей нормальной волны, принадлежащей некоторой моде дисперсионного спектра и падающей на боковую поверхность из глубины полуслоя. В общем случае граничные условия на боковой поверхности полуслоя $x_1 = 0$ для комплексных амплитудных характеристик тензора динамических напряжений имеют вид

$$\sigma_{11}|_{x_1=0} = \chi(x_3), \quad \sigma_{13}|_{x_1=0} = \zeta(x_3), \quad x_3 = [-h, h], \qquad (3)$$

где

$$\chi\left(x_3\right)=\chi\left(-x_3\right), \quad \zeta(-x_3)=-\zeta(x_3).$$

Сформулированная таким образом краевая задача описания и анализа поля упругих волн P-SV типа в рассматриваемом полуслое исследуется далее в работе на основе метода рядов по базисным однородным решениям (метода разложения характеристик искомого волнового поля по базисной системе бегущих и краевых стоячих нормальных волн).

2. Форма численно-аналитического решения краевой задачи. На основе общей схемы применения метода рядов по базисным динамическим однородным решениям [10] комплексные амплитудные характеристики исследуемого волнового поля в области V – амплитудные функции волновых упругих перемещений и динамических напряжений на боковой поверхности полуслоя, представляются в виде:

$$\begin{gathered} u_1=\sum_{p=1}^{\infty} B_p\widetilde{\Theta}_p(\gamma_p,x_3), \quad u_2\equiv 0, \quad u_3=\sum_{p=1}^{\infty} B_p\widetilde{\mathrm{M}}_p(\gamma_p,x_3), \\ \sigma_{11}=\sum_{p=1}^{\infty} B_p\widetilde{\Phi}_p(\gamma_p,x_3), \quad \sigma_{13}=\sum_{p=1}^{\infty} B_p\widetilde{\Psi}_p(\gamma_p,x_3). \end{gathered} \tag{4}$$

Суммирование в представлениях (1) осуществляется по упорядоченному множеству волновых чисел – корней дисперсионного уравнения для симметричных нормальных P-SV волн в трансверсально-изотропном полуслое. Для образующих это множество действительных значений γ_p $(Re(\gamma_p)>0)$ и мнимых значений γ_p $(Im(\gamma_p)>0)$ имеем

$$\widetilde{\Theta}(\gamma_p,x_1,x_3)=\Theta(\gamma_{p,}x_3)e^{i\gamma_p x_1}, \quad \widetilde{\mathrm{M}}(\gamma_p,x_1,x_3)=\mathrm{M}(\gamma_{p,}x_3)e^{i\gamma_p x_1},$$

$$\widetilde{\Phi}(\gamma_p,x_1,x_3)=\Phi(\gamma_{p,}x_3)e^{i\gamma_p x_1}, \quad \widetilde{\Psi}(\gamma_p,x_1,x_3)=\Psi(\gamma_{p,}x_3)e^{i\gamma_p x_1},$$

а для входящих в указанное множество комплексных значений γ_p $(Re(\gamma_p)>0$, $Im(\gamma_p)>0)$

$$\widetilde{\Theta}(\gamma_p,x_1,x_3)=\Theta(\gamma_p,x_3)e^{i\gamma_p x_1}+\Theta(-\bar{\gamma}_p,x_3)e^{-i\bar{\gamma}_p x_1},$$

$$\widetilde{\mathrm{M}}(\gamma_p,x_1,x_3)=\mathrm{M}(\gamma_p,x_3)e^{i\gamma_p x_1}+\mathrm{M}(-\bar{\gamma}_p,x_3)e^{-i\bar{\gamma}_p x_1},$$

$$\widetilde{\Phi}(\gamma_p,x_1,x_3)=\Phi(\gamma_p,x_3)e^{i\gamma_p x_1}+\Phi(-\bar{\gamma}_p,x_3)e^{-i\bar{\gamma}_p x_1},$$

$$\widetilde{\Psi}(\gamma_p,x_1,x_3)=\Psi(\gamma_p,x_3)e^{i\gamma_p x_1}+\Psi(-\bar{\gamma}_p,x_3)e^{-i\bar{\gamma}_p x_1}.$$

Здесь

$$\Phi_p(\gamma_{p,}x_3)=c_{13}f_{3p}^{/}(x_3)-c_{11}\gamma_p^2 f_{1p}^{(}x_3), \quad \Psi_p=c_{44}i\gamma_p(f_{3p}^{(}x_3)+f_{1p}^{/}(x_3)),$$

$$\Theta_p=i\gamma_p f_{1p}(x_3), \quad \mathrm{M}_p=f_{3p}(x_3),$$

$$f_{1p}(x_3)=\alpha_{2p}\cos(\sigma_1^{(p)}x_3)-\alpha_{1p}\cos(\sigma_2^{(p)}x_3), \quad \alpha_{1p}=(\kappa_{1p}-\sigma_1^{(p)})\sin\sigma_1^{(p)}h,$$

$$f_{3p}(x_3)=\alpha_{2p}\kappa_{1p}\cos(\sigma_1^{(p)}x_3)-\alpha_{1p}\kappa_{2p}\cos(\sigma_2^{(p)}x_3), \quad \alpha_{2p}=(\kappa_{2p}-\sigma_2^{(p)})\sin\sigma_2^{(p)}h.$$

Для нахождения неизвестных произвольных коэффициентов B_p в редуцированных рядах (3) в реализуемом исследовании используется метод наименьших квадратов, в соответствии с которым искомые величины определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{p=1}^{N} B_p \int\limits_{-h}^{h} (\widetilde{\Phi}_p(\gamma_p,0,x_3)\overline{\overline{\Phi}}_j(\gamma_j,0,x_3) + \widetilde{\Psi}_p(\gamma_p,0,x_3)\overline{\overline{\Psi}}_j(\gamma_j,0,x_3))dx_3 = \\ = \int\limits_{-h}^{h} (\overline{\overline{\Phi}}_j(\gamma_j,0,x_3)\chi(x_3) + \overline{\overline{\Psi}}_j(\gamma_j,0,x_3)\zeta(x_3))dx_3,\ (j=\overline{1,N}),\end{gathered} \tag{5}$$

в которой N – количество слагаемых в рассматриваемом представлении исследуемого волнового поля по системе базисных нормальных волн. Для интегралов в соотношении (5) после соответствующих преобразований получены явные аналитические представления.

Для исследования специфики проявления краевого резонанса в рассматриваемом полуслое используются приемы варьирования вида функций, характеризующих внешние гармонические воздействия, варьирования частотного параметра и последующего выявления случаев выраженной локализации волнового поля вблизи боковой поверхности полуслоя $x_1 = 0$.

При исследовании варианта рассматриваемой задачи, в котором колебания полуслоя обусловлены падающей из его глубины нормальной волной, в качестве предварительного вспомогательного этапа анализа частот краевого резонанса в настоящей работе применена методика определения специальных критических значений угла падения α парциальной SV-составляющей бегущей нормальной волны низшей моды, при котором угол отражения β парциальной P-составляющей этой волны от свободного торца полуслоя равен нулю [5, 6]. Частотная зависимость для искомого критического значения определяется соотношением $k_1\cos\alpha = k_2\cos\beta$, в котором k_1 и k_2 – соответственно волновые числа для парциальной SV-составляющей падающей волны и P-составляющей отраженной от торца нормальной волны. В итоге частота, соответствующая искомому критическому углу падения, вычисляется как корень нелинейного алгебраического уравнения $\cos\alpha = Re\sigma_1^{(1)}/(\gamma_1^2 + (Re\sigma_1^{(1)})^2)^{1/2}$, где $\gamma_1(\Omega)$ – волновое число (действительнозначный корень дисперсионного уравнения) для распространяющейся нормальной волны низшей моды.

3. Результаты численных исследований. В процессе численных исследований анализ эффекта краевого резонанса для трансверсально-изотропного полуслоя был осуществлен на основе результатов решения задачи о колебаниях полуслоя при внешнем гармоническом нагружении вида (3) с амплитудными характеристиками

$$\chi(x_3) = \cos(\pi x_3), \quad \zeta(x_3) = 0. \tag{6}$$

Был реализован также поиск значений приведенной частоты, ограничивающей сверху частотный диапазон возникновения краевого резонанса, на основе анализа задачи о падении бегущей нормальной волны низшей моды на свободный торец полуслоя из его глубины.

В качестве нормирующего параметра для координат и амплитудных характеристик упругих перемещений выбиралось значение полутолщины h рассматриваемого тела.

В процессе расчетов установлено, что оптимальным для получения контрастной картины проявления краевого резонанса является задание в (3) самоуравновешенного нормального нагружения, для которого

$$\int_{-h}^{h} \chi(x_3)dx_3 = 0, \quad \int_{-h}^{h} \zeta(x_3)dx_3 = 0. \tag{7}$$

В работе рассмотрены случаи возбуждения колебаний в полуслое из ряда конкретных конструкционных материалов. Достоверность проведенных численных исследований контролировалась, в частности, сравнением результатов использования разработанного алгоритма применительно к изотропному полуслою с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.31$ с результатами, полученными для данного варианта задачи в работах Городецкой, Гринченко, Мелешко [3, 5, 6, 9].

В частности, при исследовании рассматривались материалы, волноводные свойства которых характеризуются различными альтернативными величинами так называемого приведенного параметра волновой анизотропии Δ [10], значение которого определяет особенности структуры дисперсионного спектра нераспространяющихся нормальных волн в соответствующих волноводах. Так для полуслоя из материалов $BaTiO_3$, $PbTiO_3$ значение параметра $|\Delta|$ близко к нулю, вследствие чего эти материалы характеризуются малой волноводной анизотропией. Для полуслоя из монокристалла Co параметр Δ принимает большое положительное значение, чему соответствует дисперсионный спектр, в котором краевые стоячие волны описываются преимущественно комплексными ветвями. Для полуслоя из монокристалла β-кварца параметр Δ имеет отрицательное значение, и в этом случае краевые стоячие волны практически полностью принадлежат мнимым модам. Для характеристики частоты краевого резонанса используется приведенный параметр вида $\Omega = \widetilde{\Omega}/\widetilde{\Omega}_{*1}$, где $\widetilde{\Omega} = \rho\omega^2 h^2/c_*$, $\widetilde{\Omega}_{*1}$ – значение первой ненулевой безразмерной частоты запирания нормальных P-SV волн в рассматриваемом полуслое, ρ – плотность материала полуслоя (кг/м^3), h – полутолщина слоя (м), $c_* = 10^{10}$ Па.

На основе проведенных расчетов получено подтверждение того факта, что частота краевого резонанса Ω_e для трансверсально-изотропного полуслоя также находится в интервале, ограниченном сверху частотой, соответствующей критическому углу падения парциальной SV-составляющей в бегущей волне низшей моды с нулевой частотой запирания на свободный торец полуслоя.

Результаты расчетов представлены в таблице.

Характеристики явления краевого резонанса.

Тип материала полуслоя	**Значение критического угла α падения SV-составляющей нормальной волны на торцевую поверхность полуслоя, рад**	**Приведенное значение частотного параметра, соответствующего критическому углу падения α**	**Приведенная частота краевого резонанса Ω_e**
Изотропный, $\nu = 0.31$	1,01840	0,962230	0,862963
$BaTiO_3$	1,02999	0,928078	0,828000
$PbTiO_3$	0,87000	0,996429	0,905000
$\beta-$кварц	0,91899	0,959505	0,874194
Co	0,93299	0,982379	0,851724
Ni	1,01799	0,900272	0,807407

Важным аспектом исследования специфики краевого резонанса является анализ форм колебаний приторцевой зоны полуслоя на частоте краевого резонанса Ω_e и при частотах, отличающихся от Ω_e. Так на рис. 1 представлена амплитудная форма колебаний зоны вблизи торца изотропного полуслоя при краевом резонансе, а на рис. 2, 3, 4 – аналогичные формы для полуслоя из нескольких трансверсально-изотропных материалов.

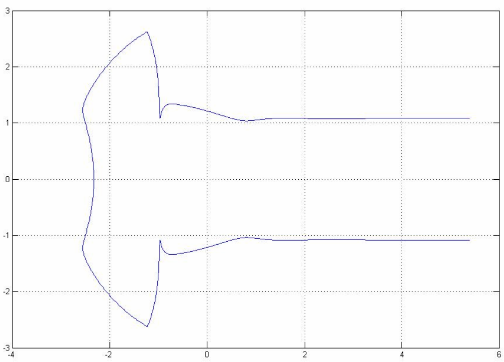

Рис. 1. Изотропный полуслой, $\nu = 0.31$

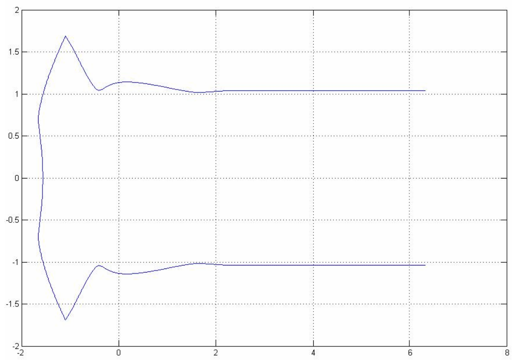

Рис. 2. Полуслой из керамики $BaTiO_3$

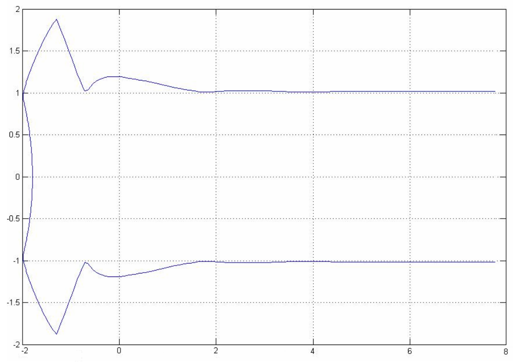

Рис. 3. Полуслой из монокристалла $\beta-$кварца

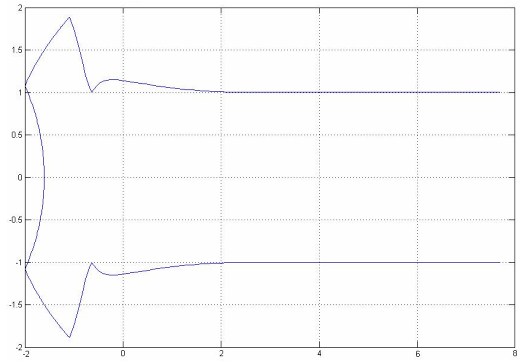

Рис. 4. Полуслой из монокристалла Co

Для характеристики контрастности явления краевого резонанса на рис. 5, 6, 7, 8 показаны амплитудные формы колебаний приторцевой зоны полуслоев из тех же материалов на частотах, близких к приведенной частоте $\Omega_{*1} = 1$.

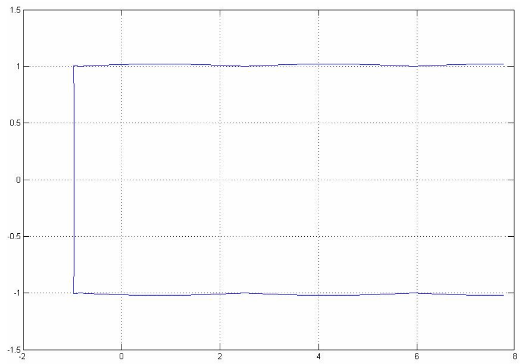

Рис. 5. Изотропный полуслой, $\nu = 0.31$

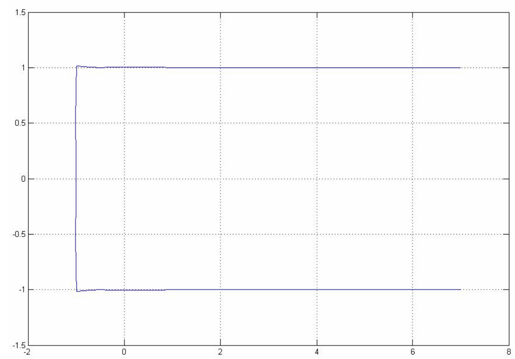

Рис. 6. Полуслой из керамики $BaTiO_3$

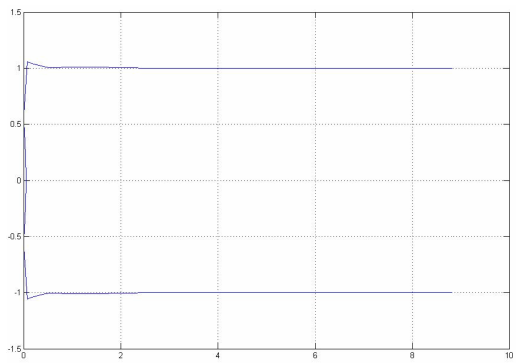

Рис. 7. Полуслой из монокристалла $\beta-$кварца

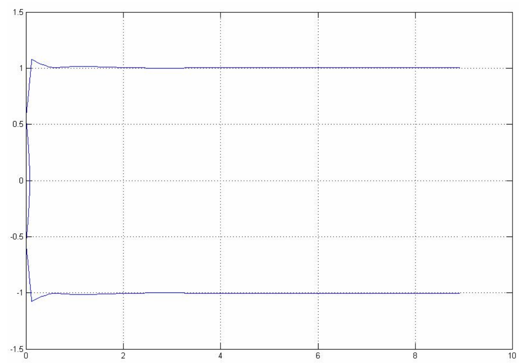

Рис. 8. Полуслой из монокристалла Co

Таким образом, в работе впервые получены результаты, которые дают характеристику некоторых аспектов явления краевого резонанса в трансверсально-изотропном упругом полуслое со свободными плоскими гранями. Прежде всего они дают основание заключить, что при всех варьируемых сочетаниях параметров полуслоя в нем имеет место явление краевого резонанса. Для рассчитанных значений приведенной частоты краевого резонанса Ω_e не выявлено сколь либо выраженной связи с параметром Δ волновой анизотропии материала полуслоя. Выявлены некоторые особенности в формах амплитудных колебаний приторцевой зоны трансверсально-изотропного полуслоя на частоте краевого резонанса.

1. *Гомилко А.М., Городецкая Н.С., Мелешко В.В.* О динамическом принципе Сен-Венана для упругой полуполосы // Теор. и прикл. мех. – Вища школа. – 1991. – Вып.22.– С.40.
2. *Гомилко А.М., Городецкая Н.С., Мелешко В.В.* Краевой резонанс при вынужденных изгибных колебаниях полуполосы // Акуст. журнал – 1991. – Вып.37, N5. – С.908-914.
3. *Гомилко А.М., Городецкая Н.С.* Краевой резонанс при вынужденных колебаниях волновода // XI Всесоюз.акуст конференция. – 1991. – М. – С.127-130.
4. *Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мартыненко О.Н.* Краевой резонанс в полубесконечном жестко защемленном волноводе // Прикл. математика и механика. – 1991. – Вып.55, N6. – С.982-988.
5. *Городецкая Н.С.* Еще раз о краевом резонансе // Акуст. вестн. – 2000. – Т.3, N4. – С.35-44.
6. *Городецкая Н.С., Гринченко В.Т.* Анализ физических особенностей явления краевого резонанса в упругих телах // Акуст. вестн. – 2004. – Т.7, N1. – С.30-43.
7. *Гринченко В.Т., Городецкая И.С.* Об эффективности возбуждения краевой моды в упругой полуполосе // Прикл. механика. – 1998. – Вып.34, N2. –С.17-25.
8. *Гринченко В.Т., Городецкая И.С.* Краевой резонанс при изгибных колебаниях полуполосы // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1985. – N4. – С.20-23.
9. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284с.
10. *Космодамианский А.С., Сторожев В.И.* Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. – Киев: Наук. думка, 1985. – 176с.
11. *Kaplunov J.D., Prikazchikov D.A., Rogerson G.A.* Edge vibration of a pre-stressed semi-infinite strip with traction-free edge and mixed face boundary conditions // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik. – 2004. – Vol.55, N4. – P.701-719.
12. *Torvik P.J.* Reflection of wave trains in semi-infinite plate. // J. Acoust. Soc. Amer. – 1967. – N41. – P.346-353.

Донецкий национальный ун-т
smokty_oksana@mail.ru

Получено