УДК 517.5

©2009. **А.М. Міненкова**

НЕІНТЕГРОВНІСТЬ ПРОДОВЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ЗГОРТКИ З КЛАСУ ЖЕВРЕЯ

Отримана нижня оцінка для інтеграла від функції з класу Жеврея, що є розв'язком рівняння згортки. Також знайдена інтегральна оцінка для гладкої на півпрямій функції.

Вступ. Нехай $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, де $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ – простір розподілів з компактними носіями і нехай $r(T)$ – довжина найменшого відрізку, що містить носій T. Припустимо, що

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty, b - a > 2r(T).$$

Введемо наступне позначення

$$(a,b)_T = \{t \in \mathbb{R}^1 : t - \mathrm{supp} T \subset (a,b)\}.$$

Позначимо $C_T^\infty(a,b)$ – клас нескінченно диференційовних функцій f, які є розв'язком рівняння згортки

$$(f * T)(t) = 0, \quad t \in (a,b)_T. \tag{1}$$

Нехай $\widehat{T} = \langle T, e^{-izt} \rangle$ – перетворення Фур'є T, $\mathcal{Z}(\widehat{T})$ – множина усіх нулів $\widehat{T}$.

Тепер опишемо клас функцій Жеврея. Для $\alpha \geq 1$ позначимо через $G^\alpha[a,b]$ множину всіх функцій $f \in C^\infty[a,b]$ таких, що

$$\int_a^b |f(t)| dt \leq \gamma^q q^{\alpha q},\ q = 1, 2, ...,$$

де $\gamma > 0$ залежить тільки від f, a, b. Також

$$G^\alpha(a,b) = \{f \in C^\infty(a,b) : f \in G^\alpha[c,d]\ \ \forall [c,d] \subset [a,b]\}.$$

Якщо функція $f \in G^\alpha(a,b)$ є розв'язком рівняння (1), то будемо казати, що $f \in G_T^\alpha(a,b)$.

Появі цієї роботи передувало вивчення властивостей поліномів з експонент (див. [1]) та питання про поведінку продовження розв'язків рівняння згортки (див. [2]). У зв'язку з цим у [2, Глава 3] було отримано наступні результати.

Теорема 1. *(див. [2, Theorem 3.17]) Нехай $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ й припустимо, що*

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \frac{\mathrm{Im}\lambda}{\ln(2 + |\lambda|)} = +\infty. \tag{2}$$

Тоді існує $f \in C_T^\infty(a,+\infty)$ така, що якщо $\varepsilon > 0$ і $F \in \mathcal{D}'(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, тоді $F|_{(a,a+\varepsilon)} \neq f|_{(a,a+\varepsilon)}$.

Теорема 2._(див. [2, Remark 3.4]) Нехай_ $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$ _й припустимо, що_

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \frac{\mathrm{Im}\lambda}{(1+|\lambda|)^{1/\alpha}} = +\infty. \tag{3}$$

Тоді існує $f \in G_T^{\alpha}(a, +\infty)$ _така, що для всіх_ $\varepsilon > 0$ _і_ $F \in \mathcal{D}'(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, _тоді_ $F|_{(a,a+\varepsilon)} \neq f|_{(a,a+\varepsilon)}$.

1. Оцінка інтегралів для гладких на півпрямій функцій. Розглянемо поведінку інтеграла від гладких функцій, які є розв'язками рівняння згортки (1), близько до границі визначення. Використовуючи умови Теореми 1, отримаємо наступне твердження.

Теорема 3. _Нехай_ $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ _і_ T _задовольняє (2). Тоді існує_ $f \in C_T^{\infty}(a, +\infty)$ _така, що для деякої додатньої послідовності_ $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty} : \varepsilon_n \to 0$ _при достатньо великих_ n

$$\int_{a+\varepsilon_n/2}^{a+\varepsilon_n} |f(t)| dt \geq c\varepsilon_n^{1-n}, \tag{4}$$

_де_ $c > 0$ _– деяка константа, що не залежить від_ n.

Доведення. Позначимо через $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ деяку послідовність нулів $\widehat{T}$, яка, згідно умові (2), має наступні властивості

1) $\mathrm{Im}\zeta_k > 1$ і $|\zeta_{k+1}|/|\zeta_k| > 2$;

2) $\mathrm{Im}\zeta_{k+1} > (2k + \mathrm{Im}\zeta_k)\ln(3 + |\zeta_{k+1}|)$.

Вважаючи

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^k e^{i\zeta_k(t-a)}, \quad t \in (a, +\infty),$$

з доведення Теореми 1 (див. [2, Theorem 3.17]) відомо, що $f \in C_T^{\infty}(a, +\infty)$.

Нехай $s \in \mathbb{N}, s \geq 2$. Розглянемо відрізок $\left[a + \frac{1}{2\mathrm{Im}\zeta_s}, a + \frac{1}{\mathrm{Im}\zeta_s}\right]$. Використовуючи 1), отримаємо

$$\sum_{k=1}^{s-1} |\zeta_k|^k |e^{i\zeta_k(t-a)}| = \sum_{k=1}^{s-1} |\zeta_k|^k e^{-\mathrm{Im}\zeta_k(t-a)} \leq \sum_{k=1}^{s-1} |\zeta_k|^k = \tag{5}$$

$$= |\zeta_{s-1}|^{s-1} \sum_{k=1}^{s-1} \frac{|\zeta_k|^k}{|\zeta_{s-1}|^{s-1}} \leq 2|\zeta_{s-1}|^{s-1}.$$

Згідно властивостям 1) і 2)

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} |\zeta_k|^k |e^{i\zeta_k(t-a)}| = \sum_{k=s+1}^{\infty} |\zeta_k|^k e^{-\mathrm{Im}\zeta_k(t-a)} \leq \sum_{k=s+1}^{\infty} |\zeta_k|^k e^{-\mathrm{Im}\zeta_k/\mathrm{Im}\zeta_s} = \tag{6}$$

$$= \sum_{k=s+1}^{\infty} e^{k \ln|\zeta_k| - \mathrm{Im}\zeta_k/\mathrm{Im}\zeta_s} = \sum_{k=s+1}^{\infty} e^{\mathrm{Im}\zeta_k (k \ln|\zeta_k|/\mathrm{Im}\zeta_k - 1/\mathrm{Im}\zeta_s)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=s+1}^{\infty} e^{-\frac{\mathrm{Im}\zeta_k}{2\mathrm{Im}\zeta_s}} \leq c_1,$$

де c_1 не залежить від s і t.

Тоді з нерівностей (5) і (6) отримаємо

$$|f(t)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^k e^{i\zeta_k(t-a)}\right| = \left| |\zeta_s|^s e^{i\zeta_s(t-a)} + \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\zeta_k|^k e^{i\zeta_k(t-a)} \right| >$$

$$> \frac{1}{2}\left| |\zeta_s|^s e^{i\zeta_s(t-a)} \right| \geq \frac{1}{2}|\zeta_s|^s e^{-\mathrm{Im}\zeta_s(t-a)}.$$

Використовуючи попередню нерівність, маємо наступну низку оцінок.

$$\int_{E_s} |f(t)|dt \geq \frac{1}{2} \int\limits_{a+1/2\mathrm{Im}\zeta_s}^{a+1/\mathrm{Im}\zeta_s} |\zeta_s|^s e^{-\mathrm{Im}\zeta_s(t-a)} dt = \frac{1}{2}|\zeta_s|^s \frac{e^{-\mathrm{Im}\zeta_s(t-a)}}{-\mathrm{Im}\zeta_s}\Bigg|_{a+1/2\mathrm{Im}\zeta_s}^{a+1/\mathrm{Im}\zeta_s} = \qquad (7)$$

$$= \frac{1}{2}|\zeta_s|^s \frac{1-e^{1/2}}{-2e\mathrm{Im}\zeta_s} \geq \frac{1}{4e}(\mathrm{Im}\zeta_s)^s \frac{e^{1/2}-1}{\mathrm{Im}\zeta_s} > \frac{e^{1/2}-1}{4e}(\mathrm{Im}\zeta_s)^s.$$

Положимо $\varepsilon_s = \frac{1}{\mathrm{Im}\zeta_s}$, тоді з (7) випливає, що

$$\int_{a+\varepsilon_s/2}^{a+\varepsilon_s} |f(t)|dt \geq \frac{e^{1/2}-1}{4e}\varepsilon_s^{1-s}.$$

Тобто отримана оцінка (4). Теорема доведена. □

2. Приклад неінтегровної функції класу Жеврея, яка є розв'язком рівняння згортки. У цьому розділі статті розглянемо розв'язок рівняння згортки (1) із классу Жеврея і покажемо й в цьому випадку характер неінтегрованості на границі визначення функції.

Теорема 4. *Нехай $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ і T задовольняє (3). Тоді існує $f \in G_T^{\alpha}(a, +\infty)$ така, що для певної додатньої послідовності $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty} : \varepsilon_n \to 0$ при достатньо великих n справджується нерівність (4).*

Доведення. Нехай існує $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – послідовність нулів $\widehat{T}$,що згідно умові (2), має такі властивості

i) $\mathrm{Im}\zeta_k{>}1$ і $|\zeta_{k+1}|/|\zeta_k|{>}2$;

ii) $\mathrm{Im}\zeta_{k+1} > ((\alpha+1)k + 3 + \mathrm{Im}\zeta_k)(3 + |\zeta_{k+1}|)^{1/\alpha}$.

Визначимо функцію f наступним чином

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^k e^{i\zeta_k(t-a)},\quad t\in(a,+\infty),$$

тоді з [2, Remark 3.4], i) та ii) видно, що $f\in G_T^{\alpha}(a,+\infty)$.

Спочатку розглянемо значення функції f на відрізку $\left[a+\frac{1}{2\mathrm{Im}\zeta_s},a+\frac{1}{\mathrm{Im}\zeta_s}\right]$, де $s\in\mathbb{N}, s\geq 2$. Використовуючи властивість i), отримаємо

$$\sum_{k=1}^{s-1}|\zeta_k|^k|e^{i\zeta_k(t-a)}|=\sum_{k=1}^{s-1}|\zeta_k|^k e^{-\mathrm{Im}\zeta_k(t-a)}\leq\sum_{k=1}^{s-1}|\zeta_k|^k= \tag{8}$$

$$=|\zeta_{s-1}|^{s-1}\sum_{k=1}^{s-1}\frac{|\zeta_k|^k}{|\zeta_{s-1}|^{s-1}}\leq 2|\zeta_{s-1}|^{s-1}.$$

Згідно властивості i) та ii)

$$\sum_{k=s+1}^{\infty}|\zeta_k|^k|e^{i\zeta_k(t-a)}|=\sum_{k=s+1}^{\infty}|\zeta_k|^k e^{-\mathrm{Im}\zeta_k(t-a)}\leq\sum_{k=s+1}^{\infty}|\zeta_k|^k e^{-\mathrm{Im}\zeta_k/\mathrm{Im}\zeta_s}= \tag{9}$$

$$=\sum_{k=s+1}^{\infty}e^{k\ln|\zeta_k|-\mathrm{Im}\zeta_k/\mathrm{Im}\zeta_s}\leq\sum_{k=s+1}^{\infty}e^{k(1+|\zeta_k|)^{1/\alpha}-\mathrm{Im}\zeta_k/\mathrm{Im}\zeta_s}$$

$$\leq\sum_{k=s+1}^{\infty}e^{-\frac{\mathrm{Im}\zeta_k}{2\mathrm{Im}\zeta_s}}\leq c_2,$$

де c_2 не залежить від s і t.

Тоді з нерівностей (8) і (9) маємо

$$|f(t)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^k e^{i\zeta_k(t-a)}\right|=\left||\zeta_s|^s e^{i\zeta_s(t-a)}+\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{s\}}|\zeta_k|^k e^{i\zeta_k(t-a)}\right|>$$

$$>\frac{1}{2}\left||\zeta_s|^s e^{i\zeta_s(t-a)}\right|\geq\frac{1}{2}|\zeta_s|^s e^{-\mathrm{Im}\zeta_s(t-a)}.$$

Таким чином, отримаємо наступну нерівність

$$\int_{E_s}|f(t)|dt\geq\frac{1}{2}\int\limits_{a+1/2\mathrm{Im}\zeta_s}^{a+1/\mathrm{Im}\zeta_s}|\zeta_s|^s e^{-\mathrm{Im}\zeta_s(t-a)}dt=\frac{1}{2}|\zeta_s|^s\frac{e^{-\mathrm{Im}\zeta_s(t-a)}}{-\mathrm{Im}\zeta_s}\Bigg|_{a+1/2\mathrm{Im}\zeta_s}^{a+1/\mathrm{Im}\zeta_s}= \tag{10}$$

$$=\frac{1}{2}|\zeta_s|^s\frac{1-e^{1/2}}{-2e\mathrm{Im}\zeta_s}\geq\frac{1}{4e}(\mathrm{Im}\zeta_s)^s\frac{e^{1/2}-1}{\mathrm{Im}\zeta_s}>\frac{e^{1/2}-1}{4e}(\mathrm{Im}\zeta_s)^s.$$

Положимо $\varepsilon_s=\frac{1}{\mathrm{Im}\zeta_s}$, тоді використовуючи (10), отримаємо оцінку (4). Теорема доведена. □

1. *Леонтьев А.Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. – М.: Наука, 1980. – 384с.
2. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Mean periodic functions. – Donetsk: Donetsk National University Press., 2008. – 194c.

Ін-т прикл. математики та механіки НАН України, Донецьк
a.minenkova@gmail.com

Получено 22.04.09