УДК 517.984+517.988

©2009. **Е.А. Масюта**

ТОПОЛОГИЯ РАСЩЕПЛЕНИЯ КРАТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕЩЕСТВЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе изучается топология расщепления конечнократных изолированных собственных значений вещественных самосопряженных операторов. Основным инструментом исследования является специальный локальный диффеоморфизм в пространстве самосопряженных операторов, предложенный D.Fujiwara, M.Tanikawa, Sh.Yukita.

В статье [1] нами были описаны многообразия ограниченных вещественных самосопряженных операторов, имеющих собственное знаение фиксированной кратности. Работа опиралась на основопологающую статью В.И.Арнольда "Моды и квазимоды" [2] (относящуюся к конечномерному случаю) а также на ее развитие в статье D.Fujiwara, M.Tanikawa, Sh.Yukita [3] и монографии Я.М.Дымарского [4] (случай компактных операторов). Здесь мы расширяем задачу и описываем топологию стратификации окрестности выбранного фиксированного оператора, отслеживая все случаи расщепления его m-кратного собственного значения. Мы показываем, что исследуемая окрестность диффеоморфна прямому произведению аналогичной окрестности в пространстве m-мерных операторов и некоторого банахова шара, который не влияет на топологию расщепления. Подробно описаны случаи двукратного и трехкратного вырождения собственного значения, чаще всего встречающиеся в приложениях.

Автор выражает благодарность Я.М.Дымарскому за постановку проблемы и постоянную поддержку.

1. Вспомогательные утверждения.

Основные обозначения. Здесь описан диффеоморфизм, введенный в работе [3]. Подробное описание конструкции дано в [1].

Пусть H – вещественное гильбертово сепарабельное пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, L_s – банахово пространство ограниченных самосопряженных операторов с обычной операторной нормой $\|\cdot\|$. Пусть A^0 – фиксированный оператор из L_s, $V_\varepsilon(A^0) = \{A : \|A - A^0\| < \varepsilon\}$, λ^0 – изолированная точка спектра оператора A^0. Тогда [5] λ^0 – это изолированное собственное значение (и только) оператора A^0 некоторой конечной кратности. Обозначим через $L_s(A^0, \varepsilon, m) \subset L_s$ множество всех таких операторов A, что:

1. $A \subset V_\varepsilon(A^0)$;

2. $\exists\ \lambda \in (\lambda^0 - \varepsilon; \lambda^0 + \varepsilon)$ – изолированное в указанной окрестности собственное значение оператора A.

В обозначении $L_s(A^0, \varepsilon, m)$ мы поставили m потому, что известно [6], что в силу изолированности, кратность отслеживаемого собственного значения $\lambda(A) \in (\lambda^0 - \varepsilon; \lambda^0 + \varepsilon)$ равна m.

Распрямляющий диффеоморфизм. Определим локальный диффеоморфизм в окрестности $V_\varepsilon(A^0)$. Пусть $H_1 \subset H$ – собственное подпространство A^0, порожденное собственными векторами, которые отвечают собственному значению λ_0; $\{u_1^0, u_2^0, \ldots\}$ – ортонормированный базис в H_1. Пусть $H_\perp$ – ортогональное дополнение к H_1 в H. Обозначим через ν_1 и $\nu_\perp$ ортогональные проекторы на H_1 и $H_\perp$, соответственно. Понятно, что оператор B представим в виде $B = B_{11} + B_{1\perp} + B_{\perp 1} + B_{\perp\perp}$ или в блочном виде

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{1\perp} \\ B_{\perp 1} & B_{\perp\perp} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Определим антисимметрический оператор $Ant(B) = -B_{1\perp} + B_{\perp 1}$ и самосопряженный блочно-диагональный оператор $Diag(B) = B_{11} + B_{\perp\perp}$.

Рассмотрим отображение

$$\Psi : L_s \to L_s, \Psi(B) = \exp(Ant(B))(A^0 + Diag(B))(\exp(-Ant(B))), \tag{2}$$

где операторная экспонента $\exp(C) = E + C + (1/2!)C^2 + \ldots$.

Лемма 1. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что отображение Ψ диффеоморфно отображает некоторую окрестность $V(0) \subset L_s$ нуля пространства L_s на ε-окрестность $V_\varepsilon(A^0) \subset L_s$ точки A^0.*

С помощью диффеоморфизма Ψ мы будем исследовать операторы в ε-окрестности оператора A^0.

Многообразие операторов, обладающих изолированными собственными значениями. Здесь мы рассмотрим операторы , близкие A^0 и обладающие одним изолированным собственным значением фиксированной кратности. Определим линейные функционалы

$$l_{ij} : L_s \to \mathbf{R}, \quad l_{ij}(B) := \langle Bu_i, u_j \rangle - \delta_{ij} \langle Bu_1, u_1 \rangle,$$

где $1 \le i \le j \le m$, если m конечно, и $1 \le i \le j < \infty$, если m бесконечно, $i \cdot j > 1$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Имеет место

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Существует такое малое $\varepsilon > 0$, что $L_s(A^0, \varepsilon, m) \subset L_s$ является C^∞ – подмногообразием.*

2. *Кратность собственного значения λ оператора $A \in L_s(A^0, \varepsilon, m)$ равна m.*

3. *Коразмерность $L_s(A^0, \varepsilon, m)$ в L_s вычисляется по формуле Арнольда:*

$$co\dim L_s(A^0, \varepsilon, m) = \frac{(m-1)(m+2)}{2}.$$

4. *Подмногообразие* $L_s(A^0, \varepsilon, m)$ *определяется следующим образом:*

$$L_s(A^0, \varepsilon, m) = \{C \in V_\varepsilon(A^0) : \langle \Psi^{-1}(C)u_i, u_j\rangle - \delta_{ij}\langle \Psi^{-1}(C)u_1, u_1\rangle = 0\},$$

где $1 \le i \le j \le m$, $i \cdot j > 1$.

5. *Касательное пространство* $T_{A^0}L_s(A^0, \varepsilon, m)$ *в точке* A^0 *определяется условиями:*

$$T_{A^0}L_s(A^0, \varepsilon, m) = \{B \in L_s : l_{ij}(B) = 0\},$$

где $1 \le i \le j \le m$, $i \cdot j > 1$.

Замечание. Справедливы также аналогичные теоремы и для операторов, обладающих конечным или счетным числом собственных значений конечной или бесконечной кратности.

2. Топология расщепления m-кратного изолированного собственного значения.

Комбинаторика расщепления кратного собственного значения. Рассмотрим все операторы в достаточно малой окрестности оператора A^0. Понятно, что здесь присутствуют операторы A, обладающие собственными значениями близкими к λ^0, но меньшей кратности. То есть в исследуемой окрестности происходит расщепление собственного значения λ^0 исходного оператора A^0 на некоторое количество собственных значений λ_i оператора A. Через i нами обозначены внутренние номера полученных в окрестности точки λ^0 собственных значений в порядке их возрастания. Обозначим через $\overrightarrow{\eta} = \{m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_l\}$ набор, состоящий из кратностей собственных значений λ_i. Множество операторов A, у которых i-тое собственное значение $\lambda_i \in (\lambda^0 - \varepsilon; \lambda^0 + \varepsilon)$ имеет кратность m_i, обозначим $L_s(A^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta})$.

Известно [6], что при возмущении оператора, сумма кратностей всех близких собственных значений в точности равна кратности собственного значения λ^0 возмущаемого оператора. Ниже мы дадим новое доказательство этого факта (с помощью введенного диффеоморфизма Ψ) и подсчитаем количество всевозможных вариантов расщепления собственного значения λ^0 оператора A^0 при его возмущении.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Сумма кратностей* m_i *собственных значений* λ_i $(i = 1, \ldots, l)$ *возмущенного оператора* A, *которые принадлежат окрестности точки* λ^0, *равна* m.

2. *При возмущении оператора* A^0 *возможно ровно* $k = 2^{m-1}$ *вариантов расщепления его изолированного собственного значения* λ^0 *кратности* m.

Доказательство. Возьмем произвольный малый оператор $B \in L_s$ и применим к нему отображение Ψ. В силу (1) и (2), оператор

$$A := \Psi(B) = \exp\begin{pmatrix} 0 & -B_{1\perp} \\ B_{\perp 1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^0 E_{11} + B_{11} & 0 \\ 0 & A^0_{\perp\perp} + B_{\perp\perp} \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & B_{1\perp} \\ -B_{\perp 1} & 0 \end{pmatrix},$$

где E_{11} – единичный блок размерности m. Оператор A и оператор

$$A^0 + Diag(B) = \begin{pmatrix} \lambda^0 E_{11} + B_{11} & 0 \\ 0 & A^0_{\perp\perp} + B_{\perp\perp} \end{pmatrix} \tag{3}$$

ортогонально эквивалентны. Поэтому достаточно исследовать спектр оператора (3). Заметим, что если $B_{11} = \delta E_{11}$, то $A^0 + Diag(B) \in L_s(A^0, \varepsilon, m)$ и, следовательно, $A \in L_s(A^0, \varepsilon, m)$.

Поскольку возмущение B мало, то в окрестности изолированной точки λ^0 спектр оператора A будет состоять только из собственных значений блока $\lambda^0 E_{11} + B_{11}$. Последний имеет размерность m. Следовательно, сумма кратностей собственных значений λ_i равна m. То есть $A \in L_s(A^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta})$. Первое утверждение доказано.

Докажем теперь второе утверждение. Поскольку наборы $\overrightarrow{\eta}$ определяются не только значениями кратностей m_i, но и порядком их расположения, то поставленная задача о подсчете количества различных наборов $\overrightarrow{\eta}$ равносильна известной комбинаторной задаче о представлении натурального числа m в виде суммы натуральных слагаемых с учетом их порядка. Последняя решена, например, в [7]. Итак, существует $k = 2^{m-1}$ всевозможных наборов $\overrightarrow{\eta}$ при возмущении оператора A^0. $\square$

Связь бесконечномерного и конечномерного случаев. Покажем, что топология расщепления m-кратного изолированного собственного значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве сводится к расщеплению m-кратного собственного значения самосопряженного оператора, действующего в $\mathbb{R}^m$.

Введем обозначения по аналогии с бесконечномерным случаем. Пусть $L_s^{(m)}$ – пространство вещественных самосопряженных операторов, действующих в $\mathbb{R}^m$, $E_m \in L_s^{(m)}$ – единичный оператор, а $A^0_m := \lambda^0 E_m \subset L_s^{(m)}$. Обозначим $L_s^{(m)}(A^0_m, \varepsilon, m) \subset L_s^{(m)}$ – многообразие самосопряженных операторов, ε-близких A^0_m и обладающих изолированным m-кратным собственным значением λ, близким к λ^0. Понятно, что $L_s^{(m)}(A^0_m, \varepsilon, m) = \{\lambda E_m, \ \ \lambda \in (\lambda^0 - \varepsilon; \lambda^0 + \varepsilon)\}$.

Обозначим $L_s^{(m)}(A^0_m, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta}) \subset L_s^{(m)}$ – множество операторов A, ε-близких A^0_m, у которых i-тое собственное значение $\lambda_i \in (\lambda^0 - \varepsilon; \lambda^0 + \varepsilon)$ имеет кратность m_i, а $\overrightarrow{\eta} = \{m_1, \dots, m_i, \dots, m_l\}$ – набор кратностей собственных значений λ_i оператора A^0_m, $\sum m_i = m$, $l \le m$.

С помощью оператора A^0_m можно записать оператор A^0 следующим образом. Обозначим $\widetilde{A}^0_m = \begin{pmatrix} A^0_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_s$ оператор, полученный из A^0_m путем добавления к нему нулевых бесконечномерных блоков, а $\widetilde{A}^0_\perp = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^0_{\perp\perp} \end{pmatrix} \in L_s$. Тогда $A^0 = \widetilde{A}^0_m + \widetilde{A}^0_\perp$. Пусть $V_{\varepsilon,\lrcorner,m}(0)$ – ε-шар малых самосопряженных операторов вида $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}$, где звездочки обозначают произвольные малые блоки.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 3. *Малая окрестность $V_\varepsilon(A^0)$ оператора A^0 диффеоморфна прямому произведению малой окрестности $V_\varepsilon^{(m)}(A^0_m)$ конечномерного оператора A^0_m на ε-*

шар малых самосопряженных операторов специального вида из пространства $V_{\varepsilon,\lrcorner,m}(0)$*:*

$$V_\varepsilon(A^0) \cong V_\varepsilon^{(m)}(A_m^0) \times V_{\varepsilon,\lrcorner,m}(0).$$

Доказательство. Возьмем произвольные малые операторы $B = B_{11} \in L_s^{(m)}$ и $B_\lrcorner = (B_{1\perp} + B_{\perp 1} + B_{\perp\perp}) \in V_{\varepsilon,\lrcorner,m}(0)$ и применим к ним отображение Ψ:

$$A := \Psi(B_{11} + B_\lrcorner) = \exp(Ant(B_\lrcorner))(\lambda^0 E_{11} + B_{11} + A^0_{\perp\perp} + B_{\perp\perp})\exp(-Ant(B_\lrcorner)) \quad (4)$$

Дальнейшее доказательство немедленно следует из свойств отбражения Ψ и фактически повторяет доказательство теоремы 2. □

Лемма 2. *Диффеоморфизм (4) сохраняет спектр оператора* A^0 *и конечномерного оператора* A_m^0 *в окрестности точки* λ^0*.*

Следствие 1. Множество $L_s(A^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta})$ является C^∞-подмногообразием диффеоморфным $L_s^{(m)}(A_m^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta}) \times V_{\varepsilon,\lrcorner,m}(0)$:

$$L_s(A^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta}) \cong L_s^{(m)}(A_m^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta}) \times V_{\varepsilon,\lrcorner,m}(0).$$

Доказательтво следствия следует из леммы 2.

Следствие 2. Многообразие $L_s(A^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta})$ гомотопно многообразию $L_s^{(m)}(A_m^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta})$:

$$L_s(A^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta}) \sim L_s^{(m)}(A_m^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta}).$$

Доказательство следствия сразу вытекает из гомотопической тривиальности шара $V_{\varepsilon,\lrcorner,m}(0)$.

Опишем точки,принадлежащие замыканию многообразия $L_s(A^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta})$, но не принадлежащие ему:

Теорема 4. *Множество* $\overline{L_s(A^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta_i})} \setminus L_s(A^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta_i})$ *содержит все подмножества* $L_s(A^0, \varepsilon, m, \overrightarrow{\eta_i})$*, для которых наборы* $\overrightarrow{\eta_i}$ *получаются в результате слияния некоторых (по крайней мере, двух) рядом стоящих собственных значений. При этом кратности собственных значений складываются.*

Так множество $\overline{L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{1,1,1\})} \setminus L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{1,1,1\})$ содержит в себе подмножества $L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{2,1\})$ и $L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{1,2\})$ (полученные путем слияния двух рядом стоящих собственных значений), и подмножество $L_s(A^0, \varepsilon, 3)$ (полученное путем слияния всех трех собственных значений).

3. Случаи двукратных и трехкратных собственных значений.

Топология расщепления собственого значения кратности два. Рассмотрим случай $m = 2$. Для операторов A, близких к A^0, возможны следующие наборы кратностей: либо $A \in L_s(A^0, \varepsilon, 2)$ (собственное значение $\lambda \in (\lambda^0 - \varepsilon; \lambda^0 + \varepsilon)$ оператора

A остается двукратным), либо $A \in L_s(A^0, \varepsilon, 2, \{1,1\})$ (собственное значение λ^0 расщепляется на два однократных собственных значения λ_1 и λ_2). Следовательно,

$$V_\varepsilon(A^0) = L_s(A^0, \varepsilon, 2) \cup L_s(A^0, \varepsilon, 2, \{1,1\}).$$

Гомотопически нетривиальным является только многообразие $L_s(A^0, \varepsilon, 2, \{1,1\})$. Его описывает

Теорема 5. $L_s(A^0, \varepsilon, 2, \{1,1\}) \cong (S^1 \times (-\varepsilon; \varepsilon) \times (0, \varepsilon)) \times V_{\varepsilon,\perp,2}(0)$.

Доказательство. Многообразие $L_s(A^0, \varepsilon, 2, \{1,1\}) \cong V_\varepsilon^{(2)}(A_2^0) \backslash L_s^{(2)}(A_2^0, \varepsilon, 2)$. Многообразие $L_s^{(2)}(A_2^0, \varepsilon, 2)$ – это отрезок, а окрестность $V_\varepsilon^{(2)}(A_2^0)$ оператора A_2^0 является трехмерным шаром. Таким образом, $L_s(A^0, \varepsilon, 2, \{1,1\})$ диффеоморфно шару, из которого удалили ось. Что в свою очередь диффеоморфно произведению $S^1 \times (-\varepsilon; \varepsilon) \times (0, \varepsilon)$. □

Из теоремы 5 сразу вытекает

Теорема 6. $L_s(A^0, \varepsilon, 2, \{1,1\}) \sim S^1$.

Топология расщепления собственого значения кратности три. Пусть $m = 3$. Для операторов A, близких к A^0, возможны следующие наборы кратностей: либо $A \in L_s(A^0, \varepsilon, 3)$ (собственное значение $\lambda \in (\lambda^0 - \varepsilon; \lambda^0 + \varepsilon)$ оператора A остается трехратным), либо $A \in L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{2,1\})$ (собственное значение λ^0 расщепляется на одно двукратное и одно однократное собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2$ и λ_3), либо $A \in L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{1,2\})$ (собственное значение λ^0 расщепляется на одно однократное и одно двукратное собственные значения λ_1 и $\lambda_2 = \lambda_3$), либо $A \in L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{1,1,1\})$ (собственное значение λ^0 расщепляется на три однократных собственных значения λ_1, λ_2 и λ_3). Следовательно,

$$V_\varepsilon(A^0) = L_s(A^0, \varepsilon, 3) \cup L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{2,1\}) \cup L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{1,2\}) \cup L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{1,1,1\}).$$

Воспользуемся евклидовой нормой оператора A в пространстве $L_s^{(3)}$, которая определяется по формуле [8]:

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j}^2},$$

где $a_{i,j}$ – элементы матрицы, задающей оператор A в данном базисе. Так как $\|A\|$ не зависит от выбора ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^3$, то для оператора $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in L_s^{(3)}$ квадрат нормы равен $\|A\|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$.

В силу теоремы 3 достаточно рассмотреть трехмерный случай. Поскольку $L_s^{(3)}(A_3^0, \varepsilon, 3, \{1,2\}) \backslash \{A_3^0\}$ диффеоморфно $(S^5 \cap L_s^{(3)}(A_3^0, \varepsilon, 3, \{1,2\})) \times (0, \varepsilon)$, нам достаточно рассмотреть исследуемые объекты на сфере S^5. Рассмотрим сферу S^5 радиуса $r = 1$(так как в трехмерном случае радиус не существенен). Собственные значения операторов A, у которых первое собственное значение однократно, а второе – двукратно, удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 \\ \lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 = 1 \end{cases} . \tag{5}$$

Допустимый набор (λ_1, λ_2), определяемый условиями (5), можно параметризировать углом $\alpha \in (0;\pi)$ между вектором $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ и вектором (λ_1, λ_2). Итак, все исследуемые операторы из $L_s^{(3)}(A_3^0, \varepsilon, 3, \{1,2\}) \times S^5$ определяются углом $\alpha \in (0;\pi)$ и выбором произвольного собственного направления e_1, отвечающего λ_1 (так как плоскость, ортогональная e_1, автоматически является собственной для $\lambda_2 = \lambda_3$). Все указанные направления e_1 в $\mathbb{R}^3$ образуют проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$. При фиксированном угле α полученная проективная плоскость вложена в S^5.

Таким образом, справедливо следующее утверждение

Теорема 7. $L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{2,1\}) \cong L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{1,2\}) \cong \big((\mathbb{R}P^2) \times (0,\pi) \times (0,\varepsilon)\big) \times V_{\varepsilon,\lrcorner,3}(0)$.

Из теоремы 7 следует

Теорема 8. $L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{1,2\}) \cong L_s(A^0, \varepsilon, 3, \{2,1\}) \sim \mathbb{R}P^2$.

Геометрия многообразия $L_s^{(3)}(A^0, \varepsilon, \{1,2\})$. Зафиксируем радиус сферы S^5 равным $\varepsilon = 1$. Рассмотрим многообразие $L_s^3(A^0, \varepsilon, 3, \{1,2\}) \cap S^5 \cong \mathbb{R}P^2 \times (0,\pi)$. Второй сомножитель $(0,\pi)$ характеризует пару собственных значений $(\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3)$, а первый сомножитель содержит все операторы, у которых зафиксированы собственные значения: $(\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3)$, причем $\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 = 1$.

Обозначим $L_s^3(A^0, \varepsilon, 3, \{1,2\}, \alpha)$ многообразие $L_s^{(3)}(A^0, \varepsilon, \{1,2\})$ с фиксированным углом $\alpha \in (0,\pi)$. Найдем при каком значении угла $\alpha \in (0,\pi)$ многообразие $L_s^3(A^0, \varepsilon, 3, \{1,2\}, \alpha) \cap S^5 \cong \mathbb{R}P^2$ достигает своего наибольшего диаметра и вычислим этот диаметр. Итак, пусть собственные значения, определяемые условиями (5), зафиксированы. Пусть $A, B \in L_s^3(A^0, \varepsilon, 3, \{1,2\}, \alpha) \cap S^5$ – операторы обладающие указанными собственными значениями; $\{e_1(A), e_2(A), e_3(A)\}$ и $\{e_1(B), e_2(B), e_3(B)\}$ – собственные векторы этих операторов. Без ограничения, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, а $B = VAV^{-1}$, где V – матрица перехода от базиса $\{e_1(A), e_2(A), e_3(A)\}$ к базису $\{e_1(B), e_2(B), e_3(B)\}$.

Лемма 3. *Максимальный диаметр многообразия* $L_s^3(A^0, \varepsilon, 3, \{1,2\}, \alpha) \cap S^5$ *достигается при* $\lambda_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ *и равен* $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Доказательство. Так как расстояние $\|A - B\|$ зависит только от угла между $e_1(A)$ и $e_1(B)$, то без ограничения общности можно считать, что $e_1(B)$ поворачивается в плоскости $\{e_1(A), e_2(A)\}$. Тогда:

$$e_1(B) = R_O^{\varphi} e_1(A) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2(B) = R_O^{\varphi} e_2(A) = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3(B) = e_3(A).$$

Матрица перехода V и обратная ей V^{-1} имеют следующий вид:

$$V = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разность операторов A и B равна :

$$A - B = A - VAV^{-1} = (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi\sin\varphi & -\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\|A - B\| = |\lambda_1 - \lambda_2|\sqrt{2\sin^4\varphi + 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \sqrt{2}|\sin\varphi||\lambda_1 - \lambda_2|$.

Норма разности операторов A и B достигает максимума по φ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Найдем теперь максимум нормы разности операторов A и B по λ_1 и λ_2. Перепишем условие (5) в виде

$$\begin{cases} \lambda_1 = \cos\alpha \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha \end{cases}$$

и найдем максимум $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$. Так как $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \frac{3}{2}\cos^2(\alpha + \alpha_0)$ (где α_0 удовлетворяет условиям $\cos\alpha_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \sin\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$), то максимум нормы разности операторов A и B по λ_1 и λ_2 достигается при $\alpha = -\alpha_0$ и $\alpha = \pi - \alpha_0$. Учитывая условие $\lambda_1 < \lambda_2$, получаем, что $\lambda_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Итак, диаметр $L_s^3(A^0, \varepsilon, 3, \{1, 2\}, \alpha) \cap S^5$ достигается тогда, когда векторы $e_1(A)$ и $e_1(B)$ перпендикулярны и $\lambda_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Рассмотрим самые далекие операторы A и B из $L_s^3(A^0, \varepsilon, 3, \{1, 2\}, \alpha) \cap S^5$ и найдем угол между ними.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Угол между операторами A и B найдем из соотношения $\cos\widehat{AB} = \frac{Tr(A \cdot B)}{|A| \cdot |B|}$. Для этого вычислим $Tr(A \cdot B)$: так как $A \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, то $Tr(A \cdot B) = -\frac{1}{2}$.

Следовательно, $\cos\widehat{AB} = \frac{Tr(A \cdot B)}{|A| \cdot |B|} = -\frac{1}{2}$, и угол между операторами A и B равен $\widehat{AB} = 120^\circ$.

Вычислим $\|A - B\| = \sqrt{2}|\sin\varphi||\lambda_1 - \lambda_2| = \sqrt{\frac{3}{2}}$. $\square$

4. Случай конечного числа собственных значений. Пусть A^0 – фиксированный оператор из L_s, обладающий изолированными точками спектра

$\lambda_1^0, \ldots, \lambda_k^0, \ldots, \lambda_n^0$ $(k = 1, \ldots, n)$, которые являются собственными значениями кратности $m_1 \leq \infty, \ldots, m_k \leq \infty, \ldots, m_n \leq \infty$, соответственно. Пусть далее $\zeta_n = (m_1, \ldots, m_k, \ldots, m_n)$ – набор из кратностей, выбранных собственных значений оператора A^0.

Обозначим через $L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_n)$ множество таких операторов A, что:

1. $A \subset V_\varepsilon(A^0) \subset L_s$;
2. $\exists\ \lambda_k \in (\lambda_k^0 - \varepsilon; \lambda_k^0 + \varepsilon)$ – изолированные в указанных окрестностях собственные значения оператора A.

Представим произвольный малый оператор B в блочном виде, согласованным с разложением на блоки оператора A^0:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} & B_{1\perp} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} & B_{n\perp} \\ B_{\perp 1} & \cdots & B_{\perp n} & B_{\perp\perp} \end{pmatrix}.$$

Определим самосопряженный блочно-диагональный и антисимметрический операторы

$$Diag_n(B) = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_{nn} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_{\perp\perp} \end{pmatrix}, \quad Ant_n(B) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & -B_{1n} & -B_{1\perp} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & 0 & -B_{n\perp} \\ B_{\perp 1} & \cdots & B_{\perp n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, аналогично формуле (2), определим локальный диффеоморфизм

$$\Psi_n : L_s \to L_s, \quad \Psi_n(B) = \exp(Ant_n(B))(A^0 + Diag_n(B))(\exp(-Ant_n(B)).$$

С помощью отображения Ψ_n мы будем исследовать операторы в ε-окрестности оператора A^0. Как и ранее, здесь возможны два случая:

1. Оператор A обладает собственными значениями λ_k с кратностями , отвечающими набору ζ_n (то есть $A \in L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_n)$).
2. Произошло расщепление собственных значений в окрестности исходных.

Мы будем рассматривать второй случай. Множество операторов с таким расщеплением обозначим $L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_n, \theta)$, где $\theta = \{\overrightarrow{\eta}_1, ..., \overrightarrow{\eta}_k, ... \overrightarrow{\eta}_n\}$ – набор из наборов кратностей, полученных при возмущении (здесь $\overrightarrow{\eta}_k$ – набор соответствующий расщеплению k-того собственного значения).

Замечание. Если мы зафиксируем только одно собственное значение и не будем отслеживать остальные – мы вернемся к рассмотренным выше результатам.

Как уже известно для m_k возможно ровно 2^{m_k-1} различных наборов $\overrightarrow{\eta}_k$. Следовательно, количество различных наборов θ равно

$$l = 2^{m_1-1} \cdot \ldots \cdot 2^{m_k-1} \cdot \ldots \cdot 2^{m_n-1} = 2^{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\right)-n}.$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 9. *Множество $L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_n, \theta) \subset V_\varepsilon(A^0)$ является C^∞-многообразием диффеоморфным*

$$L_s^{(m_1)}(A^0_m, \varepsilon, m_1, \overrightarrow{\eta}_1) \times \ldots \times L_s^{(m_k)}(A^0_{m_k}, \varepsilon, m_k, \overrightarrow{\eta}_k) \times \ldots \times L_s^{(m_n)}(A^0_{m_n}, \varepsilon, m_n, \overrightarrow{\eta}_n) \times V_{\varepsilon,\lrcorner,\zeta_n}(0),$$

где $V_{\varepsilon,\lrcorner,\zeta_n}(0)$ – шар малых операторов, у которых диагональные блоки нулевые, а остальные блоки произвольные малые.

Доказательство фактически повторяет доказательство теоремы 2.

1. *Масюта Е.А.* Многообразие самосопряженных операторов, обладающих изолированным собственным значением // Нелинейные граничные задачи. – 2007. – 17. – С.74-86.
2. *Арнольд В.И.* Моды и квазимоды // Функциональный анализ и его приложения. – 1972. – 6, №2. – С.94-101.
3. *Fujiwara D., Tanikawa M., Yukita Sh.* The spectrum of Laplasian and Boundary Perturbation. I // Proc. Jap. Acad. Ser. A. – 1978. – 54, № 4. – P.87-91.
4. *Дымарский Я.М.* Метод многообразий в теории собственных векторов нелинейных операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т.24. – С.3-159.
5. *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу. – М.: МЦНМО, 2004. – 552с.
6. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Учеб. пособие. – Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 264с.
7. *Виленкин Н.Я.* Популярная комбинаторика. - М.: Наука, 1975. – 208с.
8. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т* Современная геометрия: Методы и приложения. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – 760с.

Луганский национальный ун-т им. Тараса Шевченко
cegec@yandex.ru
Получено 15.04.09