УДК 517.9

©2009. **Н.В. Краснощек**

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ В МОДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается задача с движущейся границей для упругой полосы. Уравнение, описывающее эволюцию границы содержит производные по параметру длины кривой её кривизны и плотности энергии упругих деформаций.

Постановка задачи. В рамках плоской теории упругости (см., например [1]) обозначим через $u_1(x,t), u_2(x,t)$ компоненты вектора смещений $u(x,t)$; через $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, $(i,j=1,2)$ компоненты тензора деформаций, $\varepsilon(u) = \varepsilon_{11}(u) + \varepsilon_{22}(u)$ – относительное объемное расширение, а через $\sigma_{ij}(u) = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda\varepsilon(u)$ и $W(u) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ – компоненты тензора напряжений и плотность энергии упругих деформаций соответсвенно.

Рассмотрим криволинейную упругую полосу $\Omega(t) = \{-\infty < x_1 < \infty,\ -h < x_2 < \rho(x_1,t)\}$, где h – заданное положительное число, а ρ – функция, подлежащая определению.

Исходная постановка задачи состоит в следующем. Предполагается, что в области $\Omega(t)$ выполнены уравнения Ламе

$$(\lambda+\mu)\nabla\varepsilon(u) + \mu\Delta u = 0, \quad x\in\Omega(t),\ t>0. \tag{1}$$

Фиксированную границу $x_2 = -h$ обозначим через Σ, а свободную границу $x_2 = \rho(x_1,t)$ при каждом фиксированном значении времени t через $\Gamma(t)$. Полагаем, что полоса жестко соединена с недеформируемым основанием по прямой Σ:

$$u = 0 \qquad x\in\Sigma,\ t>0, \tag{2}$$

а вдоль границы $\Gamma(t)$ равномерно действует давление p

$$\sum_{j=1}^{2}\sigma_{ij}\, n_j = p\, n_i, \quad x\in\Gamma(t), t>0, \quad i=1,2. \tag{3}$$

Здесь $n = (n_1(x,t), n_2(x,t))$ – единичный вектор внешней нормали к $\Gamma(t)$, а p – фиксированный параметр (например, при сжатии $p<0$). Движение $\Gamma(t)$ описывается уравнением

$$V_n = b\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(-\varkappa + \frac{1}{\gamma}W(u)\right), \tag{4}$$

где b, γ – положительные постоянные, s – параметр длины кривой, $\varkappa$ – ее средняя кривизна, V_n – скорость движения кривой $\Gamma(t)$ по направлению нормали n. Кроме того, задано начальное положение кривой

$$\rho(x_1, 0) = \rho_0(x_1), \qquad -\infty < x_1 < \infty. \tag{5}$$

Далее полагаем, что функция $\rho_0(x_1)$ периодична с периодом равным 2π и, как следствие, периодичны по x_1 с той же величиной периода функции $\rho(x_1,t)$, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$.

Задачи данного вида возникают при моделировании движения тонких деформируемых пленок (см. [2], [3]). Обширная литература посвящена изучению задач для уравнения "поверхностной диффузии" вида $V_n = \Delta_{\Gamma(t)}\varkappa$, где $\Delta_{\Gamma(t)}$ оператор Бельтрами-Лапласа для кривой $\Gamma(t)$. См. по этому поводу работу [4] и приведенную в ней библиографию. Теоретическому исследованию задач теории упругости с неизвестными границами посвящено сравнительно мало работ. В этой связи отметим статью [5], где была рассмотрена задача управления формой упругого тела, и [6], в которой доказана устойчивость стационарного решения задачи со свободной границей для стационарной системы теории упругости. Отметим, что физическая постановка задачи, изученной в [6], связана с движением вязкой, сжимаемой жидкости. Устойчивость стационарных решений различных задач со свободной границей в обобщенной постановке рассматривалась также в работах [7], [8], [9], [10] .

В данной статье используются некоторые результаты работ [6], [7], [10].

Цель работы состоит в том, чтобы доказать сходимость обобщенного решения данной задачи к стационарному, при условии, что начальная функция ρ_0 "достаточно близка" к стационарному решению с плоским фронтом $\overline{\rho} = \text{const}$. Точные формулировки приведены ниже. План статьи состоит в следующем: в пункте 1 приводится стационарное решение; в пункте 2 исходная задача со свободной границей при помощи соответствующей замены переменной сводится к задаче в фиксированной области; в пункте 3 введены основные функциональные пространства и сформулирован основный результат; в четвертом – произведена линеаризация, а в пятом – доказана разрешимость линейной задачи; наконец, 6 пункт посвящен доказательству существования решения нелинейной задачи в фиксированной области, как неподвижной точки некоторого сжимающего оператора.

1. Стационарное решение. Замена неизвестных функций. Учитывая, что свободная граница $\Gamma(t)$ задана в явном виде, непосредственно по определению получим выражения для следующих величин:

$$\begin{gathered} n = \left(-\frac{\rho_{x_1}}{\sqrt{1+\rho_{x_1}^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+\rho_{x_1}^2}}\right), \quad \varkappa = -\frac{\rho_{x_1 x_1}}{\sqrt{\left(1+\rho_{x_1}^2\right)^3}}, \quad V_n = \frac{\rho_t}{\sqrt{1+\rho_{x_1}^2}}, \\ \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho_{x_1}^2}} \frac{d}{d\,x_1} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho_{x_1}^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \rho_{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Обозначим $\langle\rho_0\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \rho_0(x_1)\,dx_1$.

Нетрудно убедиться, что набор функций $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{\rho})$, где $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2 = p\frac{x_2+h}{\lambda+2\mu}$, $\overline{\rho} = \langle \rho_0 \rangle$ является стационарным решением задачи (2)–(6).

Замечание 1. Следует отметить, что в качестве $\overline{\rho}$, вообще говоря, можно было бы взять произвольную постоянную. Указанный выбор (т.е. $\langle \rho_0 \rangle$) вызван следующим простым соображением. Воспользовавшись формулами (6), можем записать уравнение (5) в виде $\rho_t = b\frac{d}{dx_1}\frac{\partial}{\partial s}\left(-\varkappa + \frac{1}{\gamma}W(u)\right)$. Формально проинтегрировав его по x_1 на интервале $(0, 2\pi)$, с учетом периодичности функций u_1, u_2, ρ, получим $\frac{d}{dt}\int\limits_0^{2\pi} \rho(x_1, t)\, dx_1 = 0$ и, значит, $\int\limits_0^{2\pi} \rho(x_1, t)\, dx_1 = \int\limits_0^{2\pi} \rho_0(x_1)\, dx_1$.

Для дальнейших вычислений удобно привести значения тензоров деформаций и напряжений для стационарного решения:

$$\begin{gathered} \overline{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11}(\overline{u}) = 0,\ \overline{\varepsilon}_{12} = \overline{\varepsilon}_{21} = 0,\ \overline{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22}(\overline{u}) = \tfrac{p}{\lambda+2\mu},\ \overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}_{11} + \overline{\varepsilon}_{22} = \tfrac{p}{\lambda+2\mu}, \\ \overline{\sigma}_{11} = p\tfrac{\lambda}{\lambda+2\mu},\ \overline{\sigma}_{12} = \overline{\sigma}_{21} = 0,\ \overline{\sigma}_{22} = p,\quad W(u) = \tfrac{p^2}{2(\lambda+2\mu)}. \end{gathered} \tag{7}$$

Неизвестные функции u_1, u_2, ρ будем искать в виде $u_i = \overline{u}_i + v_i,$, $i = 1, 2$, $\rho = \overline{\rho} + \zeta$. Тогда $\varepsilon_{ij} = \overline{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij}(v)$, $\sigma_{ij} = \overline{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}(v)$; $i, j = 1, 2$. Принимая во внимание формулы (7), имеем $\varepsilon_{11}(u) = \varepsilon_{11}(v)$; $\varepsilon_{12}(u) = \varepsilon_{12}(v)$; $\varepsilon_{22}(u) = \frac{p}{\lambda+2\mu} + \varepsilon_{22}(v)$; $\sigma_{11}(u) = \frac{p\lambda}{\lambda+2\mu} + \sigma_{11}(v)$; $\sigma_{12}(u) = \sigma_{12}(v)$; $\sigma_{22}(u) = p + \sigma_{22}(v)$. Отсюда, непосредственными вычислениями, убеждаемся в том, что

$$W(u) = W(\overline{u}) + W(v) + \frac{p}{\lambda+2\mu}\sigma_{22}(v). \tag{8}$$

Теперь можем переписать исходную задачу для неизвестных v_1, v_2, ζ :

$$\begin{gathered} (\lambda+\mu)\nabla\varepsilon(v) + \mu\Delta v = 0, \quad x \in \Omega(t),\ t > 0; \\ v = 0 \qquad x \in \Sigma,\ t > 0; \\ -\sigma_{11}(v)\zeta_{x_1} + \sigma_{12}(v) + \tfrac{2p\ \mu}{\lambda+2\mu}\zeta_{x_1} = 0,\ -\sigma_{12}(v)\zeta_{x_1} + \sigma_{22}(v) = 0,\ x \in \Gamma(t),\ t > 0, \\ \zeta_t = b\sqrt{1+\zeta_{x_1}^2}\,\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(-\frac{\zeta_{x_1x_1}}{\sqrt{\left(1+\zeta_{x_1}^2\right)^3}} + \frac{1}{\gamma}\left\{W(v) + \tfrac{p}{\lambda+2\mu}\sigma_{22}(v)\right\}\right); \\ \zeta(x_1, 0) = \zeta_0(x_1), \qquad -\infty < x_1 < \infty, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\zeta_0(x_1) = \rho(x_1) - \langle \rho_0 \rangle$.

2. Замена переменной (сведение к задаче в фиксированной области).

Обозначим через $\eta(\xi_1, \xi_2, t)$ некоторую функцию такую, что $\eta(\xi_1, 0, t) = \zeta(\xi_1, t)$. (Иными словами, $\eta(\xi, t))$ – продолжение функции $\zeta(\xi_1, t)$ с прямой $\xi_2 = 0$ на нижнюю полуплоскость. Непосредственное представление функции η дано ниже в Лемме 1).

Введем замену переменной $x = \theta(\xi, t)$:

$$x_1 = \xi_1 \qquad x_2 = \xi_2 + \overline{\rho} + \eta(\xi, t)\frac{\xi_2 + h_1}{h_1}, \tag{10}$$

где $h_1 = h + \overline{\rho}$. Как видим, прямой $\xi_2 = -h_1$ при данной замене соответствует прямая $x_2 = -h_1 + \overline{\rho} = -h$, а прямой $\xi_2 = 0$ – кривая $x_2 = \rho(x_1, t) = \overline{\rho} + \eta(x_1, t)$.

Вычислим производные первого порядка

$$\begin{gathered}\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}=1,\quad \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}=-\frac{\xi_2+h_1}{h_1}\left(1+\frac{\xi_2+h_1}{h_1}\frac{\partial\eta}{\partial\xi_2}+\frac{\eta}{h_1}\right)^{-1}\frac{\partial\eta}{\partial\xi_1},\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}=\left(1+\frac{\xi_2+h_1}{h_1}\frac{\partial\eta}{\partial\xi_2}+\frac{\eta}{h_1}\right)^{-1}\end{gathered} \tag{11}$$

и обозначим

$$a_{ij}(\xi,t)=\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j},\quad i,j=1,2. \tag{12}$$

Выражение для производной $\frac{\partial}{\partial s}$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{1+\rho_{x_1}^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\rho_{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)=\\ =\frac{1}{\sqrt{1+\rho_{x_1}^2}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}+a_{21}\left|_{\xi_2=0}\right.\frac{\partial}{\partial\xi_2}+\rho_{\xi_1}a_{22}\left|_{\xi_2=0}\right.\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)=\\ =\frac{1}{\sqrt{1+\rho_{x_1}^2}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}+\left[\left(\rho_{\xi_1}-\frac{\xi_2+h_1}{h_1}\eta_{\xi_1}\right)a_{22}\right]\Big|_{\xi_2=0}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\rho_{x_1}^2}}\frac{\partial}{\partial\xi_1}.\end{gathered} \tag{13}$$

Обозначим неизвестную вектор-функцию $v(x,t)$ в новых переменных через $\widehat{v}=v\circ\theta$.

Рассматривая компоненты тензоров деформации $\varepsilon_{ij}(v)$ и напряжений $\sigma_{ij}(v)$ как функций переменных (x,t): $\varepsilon_{ij}(x,t)=\varepsilon_{ij}(v(x,t))$, $\sigma_{ij}(x,t)=\sigma_{ij}(v(x,t))$ обозначим через $\widehat{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v})=\varepsilon_{ij}\circ\theta$, $\widehat{\sigma}_{ij}(\widehat{v})=\sigma_{ij}\circ\theta$ их значения в новых переменных.

С учетом соотношений (11)–(12), получим

$$\widehat{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v})=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2}a_{kj}\frac{\partial\widehat{v}_i}{\partial\xi_k}+\sum_{l=1}^{2}a_{li}\frac{\partial\widehat{v}_j}{\partial\xi_l}\right)=\varepsilon_{ij}(\widehat{v})+d_{ij}(\widehat{v}), \tag{14}$$

где $\varepsilon_{ij}(\widehat{v})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widehat{v}_i}{\partial\xi_j}+\frac{\partial\widehat{v}_j}{\partial\xi_i}\right)$, $d_{ij}(\widehat{v})=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{2}(a_{kj}-\delta_{kj})\frac{\partial\widehat{v}_i}{\partial\xi_k}+\sum\limits_{l=1}^{2}(a_{li}-\delta_{kj})\frac{\partial\widehat{v}_j}{\partial\xi_l}\right)$. Обозначим также $\widehat{\varepsilon}(\widehat{v})=\widehat{\varepsilon}_{11}(\widehat{v})+\widehat{\varepsilon}_{22}(\widehat{v})$. Аналогично определим

$$\widehat{\sigma}_{ij}(\widehat{v})=\sigma_{ij}(\widehat{v})+\tau_{ij}(\widehat{v}),$$

где $\sigma_{ij}(\widehat{v})=2\mu\varepsilon_{ij}(\widehat{v})+\lambda\varepsilon(\widehat{v})\delta_{ij}$, $\tau_{ij}(\widehat{v})=2\mu\left(\widehat{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v})-\varepsilon_{ij}(\widehat{v})\right)+\lambda\left(\widehat{\varepsilon}(\widehat{v})-\varepsilon(\widehat{v})\right).$

Исходя из аналогичных предпосылок, определим $\widehat{W}(\widehat{v})=W(v)\circ\theta$. Используя закон Гука, преобразуем выражение для плотности упругих деформаций следующим образом

$$\begin{gathered}W(u)=\frac{1}{2}\left(\sigma_{11}(u)\varepsilon_{11}(u)+2\sigma_{12}(u)\varepsilon_{12}(u)\right)+\sigma_{22}(u)\varepsilon_{22}(u)=\\ =\frac{\lambda}{2}\left(\varepsilon_{11}(u)+\varepsilon_{22}(u)\right)+\mu\varepsilon_{11}^2(u)+\mu\varepsilon_{22}(u)+2\mu\varepsilon_{12}(u)=\\ =\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\mu\sum_{i,j=1}^{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]^2.\end{gathered} \tag{15}$$

Отсюда, в новых переменных, получим

$$\widehat{W}(\widehat{v})=\frac{\lambda}{2}\left[\sum_{k=1}^{2}a_{k1}\frac{\partial\widehat{v}_1}{\partial\xi_k}+\sum_{l=1}^{2}a_{l2}\frac{\partial\widehat{v}_2}{\partial\xi_l}\right]^2+\frac{\mu}{4}\sum_{i,j=1}^{2}\left[\sum_{k=1}^{2}a_{kj}\frac{\partial\widehat{v}_i}{\partial\xi_k}+\sum_{l=1}^{2}a_{li}\frac{\partial\widehat{v}_j}{\partial\xi_l}\right]^2. \tag{16}$$

Введем также следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
S - \text{ окружность единичного радиуса;}\\
\Gamma = \{(\xi_1, \xi_2):\ \xi_1 \in S,\ \xi_2 = 0\};\ G = \{(\xi, t):\ \xi \in \Gamma,\ t > 0\};\\
\Sigma_1 = \{(\xi_1, \xi_2):\ \xi_1 \in S,\ \xi_2 = -h_1\};\ K = \{(\xi, t):\ \xi \in \Sigma_1,\ t > 0\};\\
\Omega = \{(\xi_1, \xi_2):\ \xi_1 \in S,\ \xi_2 \in (-h_1, 0)\};\ Q = \{(\xi, t):\ \xi \in \Omega,\ t > 0\}.
\end{gathered}
$$

Теперь исходную задачу можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
(\lambda+\mu)\sum_{k=1}^{2} a_{ki}\frac{\partial \widehat{\varepsilon}(\widehat{v})}{\partial \xi_k} + \mu \sum_{k,l,m=1}^{2} a_{kl}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(a_{ml}\frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial \xi_m}\right) = 0,\ (\xi, t) \in Q;\\
\widehat{v}_i = 0,\ i = 1, 2;\ (\xi, t) \in K,\\
-\widehat{\sigma}_{11}(\widehat{v})\eta_{\xi_1} + \widehat{\sigma}_{12}(\widehat{v}) = -p\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\eta_{\xi_1},\ (\xi, t) \in G,\\
-\widehat{\sigma}_{12}(\widehat{v})\eta_{\xi_1} + \widehat{\sigma}_{22}(\widehat{v}) = 0,\ (\xi, t) \in G,\\
\eta_t = \left[\frac{b}{\sqrt{1+\eta_{x_1}^2}}\left(-\frac{\eta_{\xi_1\xi_1}}{\sqrt{\left(1+\eta_{\xi_1}^2\right)^3}} + \frac{1}{\gamma}\left\{\widehat{W}(\widehat{v}) + \frac{p}{\lambda+2\mu}\widehat{\sigma}_{22}(\widehat{v})\right\}\right)_{\xi_1}\right]_{\xi_1},\ (\xi, t) \in G,\\
\eta(\xi, 0) = \eta_0(\xi_1),\ \xi \in \Gamma.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

3. Функциональные пространства. Вспомогательные предложения. Пространство $H^m(\Omega)$, ($m \geq 1$ – целое) определим как множество функций с конечной нормой (см. гл.2 монографии [11])

$$
||v, H^m(\Omega)|| = \sum_{j=1}^{m}\sum_{(j)}\left|\left|D_x^j v, L^2(\Omega)\right|\right|.
$$

Норму в пространстве $H^{m+\frac{1}{2}}(S)$ можно определить двумя способами: при помощи интеграла и при помощи коэффициентов ряда Фурье. "Интегральная" норма имеет вид

$$
\left|\left|v, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| = ||v||^{(m)} + \langle\langle v\rangle\rangle^{m+\frac{1}{2}},
\tag{18}
$$

где $||v||^{(m)} = \sum\limits_{k=1}^{m}\left|\left|D_{x_1}^k v, L^2(S)\right|\right|$, $\langle\langle v\rangle\rangle^{m+\frac{1}{2}} = \left[\int\limits_S dx_1 \int\limits_S \frac{\left|D_{x_1}^m v(x_1) - D_{y_1}^m v(y_1)\right|^2}{|x_1-y_1|^2}dy_1\right]^{\frac{1}{2}}$. Определив коэффициенты ряда Фурье $\widetilde{v}_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S v(x_1)e^{-inx_1}dx_1$ можно также ввести норму

$$
\left|\left|\left|v, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right|\right| = \left(\sum_{n\in Z}|\widetilde{v}_n|^2(1+|n|^2)^{m+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.
\tag{19}
$$

Применяя подход, аналогичный тому, что используется при доказательстве Леммы 4.1 работы [12], можно доказать, что нормы (18) и (18) эквивалентны, т.е. существуют постоянные c_1, c_2 такие, что

$$
c_1\left|\left|v, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| \leq \left|\left|\left|v, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right|\right| \leq c_2\left|\left|v, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right|.
\tag{20}
$$

В работе [6] доказано следующее утверждение:

Лемма 1. (Продолжение функции ζ). *Пусть* $\zeta \in H^{m-\frac{1}{2}}(S)$ *и* $\zeta = \sum\limits_{n\in Z} \widetilde{\zeta}_n e^{inx_1}$, *тогда функция* $\eta(\xi,t)$, *определенная при помощи соотношения*

$$\eta(\xi,t) = \sum_{n\in Z} \frac{1}{\sqrt{(1+(n\xi_2)^2}}\ \widetilde{\zeta}_n e^{inx_1},$$

удовлетворяет на Γ *равенству* $\eta(\xi_1,0,t) = \zeta(\xi_1,t)$, *и, кроме того, справедлива оценка*

$$||\eta, H^m(\Omega)|| \le c_3 \left|\left|\left|\zeta, H^{m-\frac{1}{2}}(S)\right|\right|\right|. \tag{21}$$

При изучении нелинейных задач в пространствах функций с обобщенными производными одну из основных технических трудностей представляет получение оценок нормы произведения функций через произведение норм, т.е. оценок следующего вида $||fg,\mathcal{B}|| \le c\,||f,\mathcal{B}||\,||g,\mathcal{B}||$, для некоторого банахова пространства $\mathcal{B}$.

В нашем случае, в частности, имеет место следующая лемма.

Лемма 2. (Оценка нормы произведения функций). *Пусть* $f, g \in H^{m+\frac{1}{2}}(S)$, $m \ge 4$, *тогда выполнена оценка*

$$\left|\left|fg, H^{m+\frac{1}{2}}\right|\right| \le c_4 \left(\left|\left|f, H^{m-2+\frac{1}{2}}\right|\right| \left|\left|g, H^{m+\frac{1}{2}}\right|\right| + \left|\left|f, H^{m+\frac{1}{2}}\right|\right| \left|\left|g, H^{m-2+\frac{1}{2}}\right|\right|\right), \tag{22}$$

где постоянная c_4 *не зависит от функций* f, g.

Доказательство. Для доказательства данной леммы нам потребуются следующие теоремы вложения (см., например, Следствие 9.1 монографии [12]):

$$\left|\left|\eta, C^{m-1}(S)\right|\right| \le c_5 \left|\left|\eta, H^{m+1/2}(S)\right|\right|,\ \left|\left|\eta, C^{m-2}(\overline{\Omega})\right|\right| \le c_6\, ||\eta, H^m(\Omega)||. \tag{23}$$

Теперь оценим $\langle\langle fg\rangle\rangle^{m+\frac{1}{2}}$. Для краткости, удобно ввести обозначение $\Delta_y^x[u] = u(x) - v(y)$. Непосредственно из определения данной полунормы получим

$$\left[\langle\langle fg\rangle\rangle^{(m+\frac{1}{2})}\right]^2 = \int\limits_S dx_1 \int\limits_S \frac{\left|\Delta_y^x\left[D_{x_1}^m(fg)\right]\right|^2}{|x_1-y_1|^2} dy_1 = \int\limits_S dx_1 \int\limits_S \frac{\left|\Delta_y^x\left[\sum\limits_{k=0}^m C_m^k f^{(k)} g^{(m-k)})\right]\right|^2}{|x_1-y_1|^2} dy_1 \le$$
$$\le 4\sum_{k=0}^m \left(C_m^k\right)^2 \int\limits_S dx_1 \int\limits_S \frac{\left|\Delta_y^x\left[f^{(k)}\right] g^{(m-k)}(x)\right|^2 + \left|f^{(k)}(y)\Delta_y^x\left[g^{(m-k)}\right]\right|^2}{|x_1-y_1|^2} dy_1 \le$$
$$\le c_7 \sum_{k=0}^m \left[\int\limits_S dx_1 \int\limits_S \frac{\left|\Delta_y^x\left[f^{(k)}\right] g^{(m-k)}(x)\right|^2}{|x_1-y_1|^2} dy_1 + \int\limits_S dx_1 \int\limits_S \frac{\left|f^{(k)}(y)\Delta_y^x\left[g^{(m-k)}\right]\right|^2}{|x_1-y_1|^2} dy_1\right] = c_7(A_1 + A_2).$$

Оценим A_1, A_2 оценивается аналогично. Имеем

$$A_1 = \sum_{k=0}^{m} \int_S dx_1 \int_S \frac{\left|f^{(k)}(x)-f^{(k)}(y)\right|^2}{|x_1-y_1|^2} \left|g^{(m-k)}(x)\right|^2 dy_1 =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \int_S dx_1 \int_S \frac{\left|\Delta_y^x[f^{(k)}]\right|^2}{|x_1-y_1|^2} \left|g^{(m-k)}(x)\right|^2 dy_1 \leq \left|\left|g, C^1\right|\right| \sum_{k=m-1}^{m} \int_S dx_1 \int_S \frac{\left|\Delta_y^x[f^{(k)}]\right|^2}{|x_1-y_1|^2} dy_1 +$$
$$+ \left|\left|g, C^3\right|\right| \sum_{k=m-3}^{m-2} \int_S dx_1 \int_S \frac{\left|\Delta_y^x[f^{(k)}]\right|^2}{|x_1-y_1|^2} dy_1 + +c_8 \left|\left|f, C^{m-3}\right|\right| \sum_{k=0}^{m-4} \int_S dx_1 \int_S \left|g^{(m-k)}(x)\right|^2 dy_1 \leq$$
$$\leq 2\ c_5 \left|\left|g, H^{2+1/2}\right|\right|^2 \left|\left|f, H^{m+1/2}\right|\right|^2 + 2c_5 \left|\left|g, H^{4+1/2}\right|\right|^2 \left|\left|f, H^{m-2+1/2}\right|\right|^2 +$$
$$+2\pi c_5 c_8 \left|\left|f, H^{m-2+1/2}\right|\right|^2 (||g||^{(m)})^2 \leq$$
$$\leq c_9 \left(\left|\left|f, H^{m-2+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| \left|\left|g, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| + \left|\left|f, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| \left|\left|g, H^{m-2+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| \right).$$

Как видим, последний переход от одного неравенства к другому возможен только в случае $m \geq 4$.

Аналогично, т.е. используя формулу Лейбница и оценку (23), доказывается неравенство

$$||\, fg \,||^{(m)} \leq c_{11} \left(\left|\left|f, H^{m-2+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| \left|\left|g, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| + \left|\left|f, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| \left|\left|g, H^{m-2+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| \right).$$

□

Для оценки выражения вида $\frac{f}{1+g}$ используем следующий подход (см., например, [10]). Представим данную дробь в виде суммы геометрической прогрессии и применим к каждому слагаемому оценку (26). В результате получим

Лемма 3. (Оценка частного функций). *Пусть $m \geq 4$, $f, g \in H^{m+\frac{1}{2}}(S)$, $|g| \leq \epsilon_1 < 1$ почти всюду в S и $\left|\left|g, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| \leq \frac{\epsilon_1}{c_4}$, тогда выполнена оценка*

$$\begin{aligned} &\left|\left|\tfrac{f}{1+g}, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| \leq c_{12}(\epsilon_1, c_4) \left(\left|\left|f, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| + \right. \\ &\left. + \left|\left|f, H^{m-2+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| \left|\left|g, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| + \left|\left|f, H^{m+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| \left|\left|g, H^{m-2+\frac{1}{2}}(S)\right|\right| \right), \end{aligned} \tag{24}$$

где постоянная c_{12} не зависит от функций f и g.

Аналогичными методами могут быть доказаны две следующие леммы:

Лемма 4. (Оценка нормы произведения функций). *Пусть $m \geq 5$, $f, g \in H^m(\Omega)$, тогда выполнена оценка*

$$||fg, H^m(\Omega)|| \leq c_{13} \left(\left|\left|f, H^{m-2}(\Omega)\right|\right| ||g, H^m(\Omega)|| + ||f, H^m(\Omega)|| \left|\left|g, H^{m-2}(\Omega)\right|\right| \right), \tag{25}$$

где постоянная c_{13} не зависит от функций f, g.

Лемма 5. (Оценка частного функций). *Пусть $m \geq 5$, $f, g \in H^m(\Omega)$, $|g| \leq \epsilon_1 < 1$ почти всюду в Ω и $||g, H^m(\Omega)|| \leq \frac{\epsilon_1}{c_{13}}$, тогда выполнена оценка*

$$\left|\left|\frac{f}{1+g}, H^m\right|\right| \leq c_{14}(\epsilon_1) \left(||f, H^m|| + \left|\left|f, H^{m-2}\right|\right| ||H^m|| + ||f, H^m|| \left|\left|g, H^{m-2}\right|\right| \right), \tag{26}$$

где постоянная c_{14} не зависит от функций f и g.

Введем далее функциональные пространства, в терминах которых будет сформулирован основной результат данной работы.

Полагая, что $\alpha > 0$, обозначим через $V_{m,\alpha}(Q)$ и $V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)$ множества функций с ограниченными нормами соответственно

$$||u, V_{m,\alpha}(G)|| = \sup_{t\in(0,\infty)} \|e^{\alpha t}u(\cdot,t), H^{m-2}(\Omega)\| + \left(\int\limits_0^\infty \|e^{\alpha t}u(\cdot,t), H^m(\Omega)\|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\left|u, V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right| = \sup_{t\in(0,\infty)} \|e^{\alpha t}u(\cdot,t), H^{m-2+\frac{1}{2}}(\Gamma)\| + \left(\int\limits_0^\infty \|e^{\alpha t}u(\cdot,t), H^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma)\|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим $||\widehat{v}, V_{m+4,\lambda}(Q)|| = \sum\limits_{i=1}^{2} ||\widehat{v}_i, V_{m+4,\alpha}(Q)||$.

Возвращаясь к формулам (11), (13), видим, что неизвестная функция η должна быть такой, чтобы не обращались в ноль выражения в знаменателе, а именно:

$$1+\eta_{x_1}^2 \geq \frac{3}{4} \text{ п.в. в } G, \quad 1+\frac{\xi_2+h_1}{h_1}\frac{\partial\eta}{\partial\xi_2}+\frac{\eta}{h_1} \geq \frac{3}{4} \text{ п.в. в } Q. \tag{27}$$

Для справедливости данных неравенств достаточно потребовать, чтобы

$$\left|\left|\eta, L^\infty((0,\infty); C^1(\overline{\Omega}))\right|\right| \leq \frac{\max\{1,h_1\}}{8}. \tag{28}$$

В дальнейшем полагаем, что

$$\left|\left|\eta, L^\infty((0,\infty); H^3(\Omega))\right|\right| \leq \delta_0 \equiv c_6\frac{\max\{1,h_1\}}{8}. \tag{29}$$

Здесь постоянная c_6 взята из оценки вложения (23).

Из Лемм 2–5 следует

Лемма 6. (Мультипликативное свойство нормы).

1) Пусть $m \geq 5$, $f,g \in V_{m,\alpha}(Q)$, $(i=1,2)$, тогда выполнена оценка

$$||fg, V_{m,\alpha}(Q)|| \leq c_{16}\, ||f, V_{m,\alpha}(Q)||\, ||g, V_{m,\alpha}(Q)||. \tag{30}$$

2) Пусть $m \geq 5$, $f,g \in V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)$, $(i=1,2)$, тогда выполнена оценка

$$\left|\left|fg, V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right| \leq c_{17}\left|\left|f, V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right| \left|\left|g, V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right|. \tag{31}$$

Сформулируем основной результат данной статьи.

Теорема 1. *Пусть $m \geq 2$ – целое, $\alpha < b$. Существует постоянная $\epsilon_0 \in (0,\delta_0)$ такая, что если начальная функция ζ_0 удовлетворяет условию*

$$\left|\left|\zeta_0, V_{m+3+\frac{1}{2},\lambda}(S)\right|\right| \leq \epsilon_0, \tag{32}$$

то существует единственное решение задачи (17) такое, что $\widehat{v}_i \in V_{m+4,\alpha}(Q)$, $(i = 1,2)$, $\eta \in V_{m+4,\alpha}(Q)$ *и* $\eta_t \in V_{m-\frac{1}{2},\lambda}(G)$.

4. Линеаризация задачи (17). Далее преобразуем полученные соотношения таким образом, чтобы оставить в левой части слагаемые линейные относительно неизвестных функций $\widehat{v}_1$, $\widehat{v}_2$, η и их производных.

Имеем

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2_{\xi_1}}}\left(\frac{\eta_{\xi_1\xi_1}}{\sqrt{\left(1+\eta^2_{\xi_1}\right)^3}}\right)_{\xi_1}\right)_{\xi_1} = \frac{\partial^4\eta}{\partial\xi_1^4} + \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left\{\frac{\partial^3\eta}{\partial\xi_1^3}\left(\frac{1}{(1+\eta^2_{\xi_1})^2}-1\right) - 3\frac{\eta^2_{\xi_1\xi_1}\eta^2_{\xi_1}}{(1+\eta^2_{\xi_1})^3}\right\}.$$

и, кроме того,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2_{\xi_1}}}\frac{\partial\widehat{\sigma}_{22}(\widehat{v})}{\partial\xi_1}\right)_{\xi_1} = \frac{\partial^2\sigma_{22}(\widehat{v})}{\partial\xi_1^2} + \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2_{\xi_1}}}-1\right)\frac{\partial\sigma_{22}(\widehat{v})}{\partial\xi_1} + \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2_{\xi_1}}}\frac{\partial\tau_{22}(\widehat{v})}{\partial\xi_1}\right\}_{\xi_1}.$$

Теперь задача (17) принимает вид:

$$\begin{gathered}
(\lambda+\mu)\frac{\partial\varepsilon(\widehat{v})}{\partial\xi_i} + \mu\Delta\widehat{v}_i = \mathbb{F}_i(\widehat{v},\eta),\ (\xi,t)\in Q;\\
\widehat{v}_i = 0,\ i=1,2;\ (\xi,t)\in K,\\
\widehat{\sigma}_{12}(\widehat{v}) + p\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\eta_{\xi_1} = \mathbb{H}_1(\widehat{v},\eta),\ \widehat{\sigma}_{22}(\widehat{v}) = \mathbb{H}_2(\widehat{v},\eta),\ (\xi,t)\in G,\\
\eta_t + b\frac{\partial^4\eta}{\partial\xi_1^4} - p\frac{b}{\gamma(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2\sigma_{22}(\widehat{v})}{\partial\xi_1^2} = \frac{\partial\mathbb{H}_3(\widehat{v},\eta)}{\partial\xi_1},\ (\xi,t)\in G,\\
\eta(\xi,0) = \eta_0(\xi_1),\ \xi\in\Gamma.
\end{gathered} \tag{33}$$

где

$$\begin{gathered}
\mathbb{F}_i(\widehat{v},\eta) = (\lambda+\mu)\sum_{k=1}^{2} a_{ki}\frac{\partial\widehat{\varepsilon}(\widehat{v})}{\partial\xi_k} + \mu\sum_{k,l,m=1}^{2} a_{kl}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(a_{ml}\frac{\partial\widehat{v}_i}{\partial\xi_m}\right) - (\lambda+\mu)\frac{\partial\varepsilon(\widehat{v})}{\partial\xi_i} - \mu\Delta\widehat{v}_i,\\
\mathbb{H}_i(\widehat{v},\eta) = \widehat{\sigma}_{1i}(\widehat{v})\eta_{\xi_1} - \tau_{i2}(\widehat{v}),\ i=1,2,\\
\mathbb{H}_3(\widehat{v},\eta) = -b\left\{\frac{\partial^3\eta}{\partial\xi_1^3}\left(\frac{1}{(1+\eta^2_{\xi_1})^2}-1\right) - 3\frac{\eta^2_{\xi_1\xi_1}\eta^2_{\xi_1}}{(1+\eta^2_{\xi_1})^3}\right\} +\\
+ \frac{b}{\gamma}\widehat{W}(\widehat{v}) + \frac{pb}{\gamma(\lambda+2\mu)}\left\{\left(\left(1+\eta^2_{\xi_1}\right)^{-1/2}-1\right)\frac{\partial\sigma_{22}(\widehat{v})}{\partial\xi_1} + \left(1+\eta^2_{\xi_1}\right)^{-1/2}\frac{\partial\tau_{22}(\widehat{v})}{\partial\xi_1}\right\}.
\end{gathered}$$

Для наглядности, приведем более подробное представление, например, для $\mathbb{F}_1$

$$\begin{gathered}
\mathbb{F}_1(\widehat{v},\eta) = (\lambda+2\mu)\left\{(2+a_{21})a_{21}\frac{\partial^2\widehat{v}_1}{\partial\xi_1\xi_2} + (a_{21}+1)\frac{\partial a_{21}}{\partial\xi_1}\frac{\partial\widehat{v}_1}{\partial\xi_2}\right\} +\\
+\mu\left\{(a^2_{22}-1)\frac{\partial^2\widehat{v}_1}{\partial\xi_2^2} + a_{22}\frac{\partial a_{22}}{\partial\xi_2}\frac{\partial\widehat{v}_1}{\partial\xi_2}\right\} +\\
+(\lambda+\mu)\left\{(a_{22}-1)\frac{\partial^2\widehat{v}_2}{\partial\xi_1\xi_2} + a_{21}a_{22}\frac{\partial^2\widehat{v}_2}{\partial\xi_1\xi_2} + a_{22}\frac{\partial a_{21}}{\partial\xi_2}\frac{\partial\widehat{v}_2}{\partial\xi_1}\right\},
\end{gathered} \tag{34}$$

причем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial a_{21}}{\partial\xi_1} = -a_{22}\frac{\xi_2+h_1}{h_1}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi_1^2} + \frac{\xi_2+h_1}{h_1^2}a^2_{22}\left((\xi_2+h_1)\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi_1\xi_2} + \frac{\partial\eta}{\partial\xi_1}\right)\frac{\partial\eta}{\partial\xi_1},\\
\frac{\partial a_{21}}{\partial\xi_2} = -\frac{a_{22}}{h_1}\left((\xi_2+h_1)\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi_1\xi_2} + \frac{\partial\eta}{\partial\xi_1}\right) + \frac{\xi_2+h_1}{h_1^2}a^2_{22}\left((\xi_2+h_1)\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi_1\xi_2} + 2\frac{\partial\eta}{\partial\xi_2}\right),\\
a_{22}-1 = -\frac{a_{22}}{h_1}\left((\xi_2+h_1)\frac{\partial\eta}{\partial\xi_2} + \eta\right),\quad a^2_{22}-1 = (a_{22}+1)(a_{22}-1),\\
\frac{\partial a_{22}}{\partial\xi_1} = -\frac{a^2_{22}}{h_1}\left((\xi_2+h_1)\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi_1\xi_2} + \frac{\partial\eta}{\partial\xi_1}\right),\ \frac{\partial a_{21}}{\partial\xi_2} = -\frac{a^2_{22}}{h_1}\left((\xi_2+h_1)\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi_2^2} + 2\frac{\partial\eta}{\partial\xi_2}\right).
\end{gathered}$$

5. Линейная задача. Рассмотрим линейную задачу

$$\begin{gathered}(\lambda+\mu)\,\frac{\partial\varepsilon(\widehat{v})}{\partial\xi_i}+\mu\Delta\widehat{v}_i=\mathsf{f}_i,\ (\xi,t)\in Q;\\ \widehat{v}_i=0,\ i=1,2;\ (\xi,t)\in K,\\ \widehat{\sigma}_{12}(\widehat{v})+p\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\eta_{\xi_1}=\mathsf{h}_1,\ \widehat{\sigma}_{22}(\widehat{v})=\mathsf{h}_2,\ (\xi,t)\in G,\\ \eta_t+b\frac{\partial^4\eta}{\partial\xi_1^4}-p\frac{b}{\gamma(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2\sigma_{22}(\widehat{v})}{\partial\xi_1^2}=\frac{\partial\mathsf{h}_3}{\partial\xi_1},\ (\xi,t)\in G,\\ \eta(\xi,0)=\zeta_0(\xi_1),\ \xi\in\Gamma.\end{gathered}\tag{35}$$

Теорема 2. (Разрешимость линейной задачи.) *Пусть* $\zeta_0\in V_{m+3+\frac{1}{2},\alpha}(S)$, $\mathsf{f}_i\in V_{m+2,\alpha}(Q)$, $\mathsf{h}_i\in V_{m+2+\frac{1}{2},\alpha}(G)$, $(i=1,2)$, $\mathsf{h}_3\in V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)$, *тогда существует единственное решение задачи (35), причем справедлива оценка*

$$\begin{gathered}||\widehat{v},V_{m+4,\alpha}(Q)||+||\eta,V_{m+4,\alpha}(Q)||+\left|\left|\eta_t,V_{m-\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right|\le\mathsf{C}_0\left(\left|\left|\zeta_0,V_{m+3+\frac{1}{2},\alpha}(S)\right|\right|+\right.\\ \left.+\sum_{i=1}^{2}||\mathsf{f}_i,V_{m+2,\alpha}(Q)||+\sum_{i=1}^{2}\left|\left|\mathsf{h}_i,V_{m+2+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right|+\left|\left|\mathsf{h}_3,V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right|\right).\end{gathered}\tag{36}$$

Из граничных условий на G из (35) следует, что

$$\eta_t+b\frac{\partial^4\eta}{\partial\xi_1^4}=\frac{\partial\mathsf{h}_0}{\partial\xi_1}\equiv\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\mathsf{h}_3+p\frac{b}{\gamma(\lambda+2\mu)}\frac{\partial\mathsf{h}_2}{\partial\xi_1}\right),\ (\xi,t)\in G,\ \ \eta(\xi,0)=\zeta_0(\xi_1),\ \xi\in\Gamma.\tag{37}$$

Т.о. линейная задача расщепляется на две: для свободной границы и для смещений.

Лемма 7. (Разрешимость задачи для свободной границы.) *Пусть* $\alpha<b$, $\zeta_0\in V_{m+3+\frac{1}{2},\alpha}(S)$, *и* $\mathsf{h}_0\in V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)$, *тогда существует единственное решение задачи (37), причем справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\left|\left|\eta,V_{m+3+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right|+\left|\left|\eta_t,V_{m-\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right|\le\\ \le\mathsf{C}_0\left(\left|\left|\zeta_0,V_{m+3+\frac{1}{2},\alpha}(S)\right|\right|+\left|\left|\mathsf{h}_0,V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right|\right).\end{gathered}\tag{38}$$

Доказательство. Для доказательства используем разложение функций η, ζ_0, h_0 в ряды Фурье. Для коэффициентов получаем задачу

$$\widetilde{\eta}_{n,t}+bn^4\widetilde{\eta}_n=in\widetilde{\mathsf{h}}_{0,n},\ \widetilde{\eta}_{n,0}=\widetilde{\zeta}_{0,n}.\tag{39}$$

Воспользуемся следующим утверждением

Лемма 8.(*см. Лемму 3.1 работы [7]*) *Пусть* $f(t)\in L^2(0,T)$ *для любого* $T>0$. *Если* $0<\alpha<K$, *то для решения задачи* $\frac{du}{dt}+Ku=f(t)$, $u(0)=u_0$, *для любого* $t>0$ *имеют место оценки*

$$\begin{gathered}u^2(t)e^{2\alpha t}\le\frac{2}{K-\alpha}\int\limits_0^t(e^{\alpha\tau}f(s))^2ds+2u_0^2,\\ \int\limits_0^t u^2(\tau)e^{2\alpha\tau}d\tau\le\frac{2}{(K-\alpha)^2}\int\limits_0^t(e^{\alpha s}f(s))^2ds+\frac{u_0^2}{K-\alpha}.\end{gathered}$$

Применим данную лемму к задаче (39) при $n \neq 0$:

$$|\widetilde{\eta}_n(t)|^2 e^{2\alpha t} \leq \tfrac{2}{bn^4-\alpha} \int\limits_0^t n^2 e^{2\alpha s}|\widetilde{\mathsf{h}}_{0,n}|^2 ds + 2|\widetilde{\zeta}_{0,n}|^2,$$
$$\int\limits_0^t |\widetilde{\eta}_n(\tau)|^2 e^{2\alpha\tau} d\tau \leq \tfrac{2}{(bn^4-\alpha)^2} \int\limits_0^t n^2 e^{2\alpha s}|\widetilde{\mathsf{h}}_{0,n}|^2 ds + \tfrac{|\widetilde{\zeta}_{0,n}|^2}{bn^4-\alpha}.$$

Далее, умножая первое неравенство на $(1+n^2)^{m+1+\frac{1}{2}}$, а второе – на $(1+n^2)^{m+3+\frac{1}{2}}$ и суммируя по целым n, приходим к оценке (38). Здесь следует отметить, что ζ_0 выбрано таким образом, что $\widetilde{\zeta}_{0,0} = 0$, а тогда из уравнения видим, что и $\widetilde{\eta}_0 \equiv 0$. $\Box$

Далее, при заданной функции η, к задаче (35), как к смешанной задаче теории упругости применимы результаты работы [14], из которых следует оценка (36) для смещений.

6. Доказательство Теоремы 1. В данном пункте применим ход рассуждений, предложенный в работе [10]. Ввиду ограниченности объёма сформулируем без доказательства две леммы.

Лемма 9.(Оценка правой части в нелинейной задаче.) *Существует $C_1(\delta_0)$ такая, что для любых $\delta \in (0,\delta_0)$*

$$\sum_{i=1}^{2} ||\mathbb{F}_i(\widehat{v},\eta), V_{m+2,\lambda}(Q)|| + \sum_{i=1}^{2} \left|\left|\mathbb{H}_i(\widehat{v},\eta), V_{m+2+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right| + \left|\left|\mathbb{H}_3(\widehat{v},\eta), V_{m+\frac{1}{2},\lambda}(G)\right|\right| \leq$$
$$\leq C_1(\delta_0)\left(||\widehat{v}, V_{m+4,\alpha}(Q)|| + ||\eta, V_{m+4,\alpha}(Q)||\right)^2, \tag{40}$$

для всех $\widehat{v}_i$, η: $||\widehat{v}_i, V_{m+4,\alpha}(Q)|| + ||\eta, V_{m+4,\alpha}(Q)|| \leq \delta$.

Лемма 10. (Оценка разности правой части в нелинейной задаче.) *Существует $C_2(\delta_0)$ такая, что для любых $\delta \in (0,\delta_0)$ и произвольных пар $(\widehat{v}^{(i)},\eta^{(i)}$, $i = 1,2$, удовлетворяющих условию*

$$\max\left\{\left|\left|\widehat{v}^{(1)}, V_{m+4,\alpha}(Q)\right|\right| + \left|\left|\eta^{(1)}, V_{m+4,\alpha}(Q)\right|\right|,\right.$$
$$\left.\left|\left|\widehat{v}^{(2)}, V_{m+4,\alpha}(Q)\right|\right| + \left|\left|\eta^{(2)}, V_{m+4,\alpha}(Q)\right|\right|\right\} \leq \delta \tag{41}$$

выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{2} \left|\left|\mathbb{F}_i(\widehat{v}^{(1)},\eta^{(1)}) - \mathbb{F}_i(\widehat{v}^{(2)},\eta^{(2)}), V_{m+2,\alpha}(Q)\right|\right| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \left|\left|\mathbb{H}_i(\widehat{v}^{(1)},\eta^{(1)}) - \mathbb{H}_i(\widehat{v}^{(2)},\eta^{(2)}), V_{m+2+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right| + \tag{42}$$
$$+ \left|\left|\mathbb{H}_3(\widehat{v}^{(1)},\eta^{(1)}) - \mathbb{H}_3(\widehat{v}^{(2)},\eta^{(2)}), V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right| \leq$$
$$\leq C_2(\delta_0)\ \delta\left(\left|\left|\widehat{v}^{(1)} - \widehat{v}^{(2)}, V_{m+4,\alpha}(Q)\right|\right| + \left|\left|\eta^{(1)} - \eta^{(2)}, V_{m+4,\lambda}(Q)\right|\right|\right)^2.$$

Решающую роль при доказательстве данных лемм играет мультипликативное свойство норм используемых пространств (см. Лемму 6).

Определим отображение Υ

$$(\widehat{v},\eta) \to \Upsilon(\widehat{v},\eta) = (\widehat{v}', \eta'),$$

где $(\widehat{v}', \eta')$ – решение задачи (41)–(46) с заданными правыми частями $\mathbb{F}_i$, (i=1,2), $\mathbb{H}_j$, (j=1,2,3), т.е. задачи вида (35), к которой можем применить Теорему 2.

Рассмотрим множество

$$\mathsf{K} = \left\{ (\widehat{v}, \eta) \in V_{m+2,\alpha}(Q) \times V_{m+2,\lambda}(Q): \quad \eta_t \in V_{m-\frac{1}{2},\alpha}(G), \quad \eta(\xi_1, 0, 0) = \eta_0(\xi_1) \right\}$$

и определим норму $||(\widehat{v}, \eta)||_{\mathsf{K}} = ||\widehat{v}, V_{m+4,\alpha}(Q)|| + ||\eta, V_{m+4,\alpha}(Q)|| + \left|\left|\eta_t, V_{m-\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right|$.

Наша цель состоит в том, чтобы доказать, что Υ является сжимающим отображением выпуклого замкнутого множества K в себя.

Из оценки (36) непосредственно вытекает, что

$$\begin{gathered} ||\Upsilon(\widehat{v}, \eta)||_{\mathsf{K}} \le \mathsf{C}_0 \left(\left|\left|\zeta_0, V_{m+3+\frac{1}{2},\alpha}(S)\right|\right| + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{2} ||\mathbb{F}_i, V_{m+2,\alpha}(Q)|| + \sum_{i=1}^{2} \left|\left|\mathbb{H}_i, V_{m+2+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right| + \left|\left|\mathbb{H}_3, V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right| \right) \end{gathered} \tag{43}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} &\left|\left|\Upsilon(\widehat{v}^{(1)}, \eta^{(1)}) - \Upsilon(\widehat{v}^{(2)}, \eta^{(2)})\right|\right|_{\mathsf{K}} \le \\ &\quad \le \mathsf{C}_0 \left(\sum_{i=1}^{2} \left|\left|\mathbb{F}_i(\widehat{v}^{(1)}, \eta^{(1)}) - \mathbb{F}_i(\widehat{v}^{(2)}, \eta^{(2)}), V_{m+2,\alpha}(Q)\right|\right| + \right. \\ &\quad\quad + \sum_{i=1}^{2} \left|\left|\mathbb{H}_i(\widehat{v}^{(1)}, \eta^{(1)}) - \mathbb{H}_i(\widehat{v}^{(2)}, \eta^{(2)}), V_{m+2+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right| + \\ &\quad\quad\quad \left. + \left|\left|\mathbb{H}_3(\widehat{v}^{(1)}, \eta^{(1)}) - \mathbb{H}_3(\widehat{v}^{(2)}, \eta^{(2)}), V_{m+\frac{1}{2},\alpha}(G)\right|\right| \right). \end{aligned} \tag{44}$$

Продолжая оценку (43) при помощи неравенства (40), видим, что

$$\begin{aligned} &||\Upsilon(\widehat{v}, \eta)||_{\mathsf{K}} \le \\ &\le \mathsf{C}_0 \left(\left|\left|\zeta_0, V_{m+3+\frac{1}{2},\alpha}(S)\right|\right| + \mathsf{C}_1 \left(||\widehat{v}, V_{m+4,\lambda}(Q)|| + ||\eta, V_{m+4,\lambda}(Q)||\right)^2 \right) \le \\ &\qquad\qquad \le \mathsf{C}_0 \left(\epsilon_0 + \mathsf{C}_1\, \delta^2\right) \le \widehat{\mathsf{C}}_0 \left(\epsilon_0 + \widehat{\mathsf{C}}_1\, \delta^2\right), \end{aligned} \tag{45}$$

где $\widehat{\mathsf{C}}_0 = \max\{1, \mathsf{C}_0\}$, $\widehat{\mathsf{C}} = \max\{\mathsf{C}_1, \mathsf{C}_2\}$. Применяя к правой части (44) оценку (42), получаем

$$\begin{aligned} &\left|\left|\Upsilon(\widehat{v}^{(1)}, \eta^{(1)}) - \Upsilon(\widehat{v}^{(2)}, \eta^{(2)})\right|\right|_{\mathsf{K}} \le \\ &\le \mathsf{C}_0 \mathsf{C}_2\, \delta \left|\left|(\widehat{v}^{(1)} - \widehat{v}^{(2)}, \eta^{(1)} - \eta^{(2)})\right|\right|_{\mathsf{K}} \le \widehat{\mathsf{C}}_0 \widehat{\mathsf{C}}\, \delta \left|\left|(\widehat{v}^{(1)} - \widehat{v}^{(2)}, \eta^{(1)} - \eta^{(2)})\right|\right|_{\mathsf{K}}. \end{aligned} \tag{46}$$

Из неравенств (45) и (46) заключаем, что нам нужно выбрать постоянные ϵ_0 и δ таким образом, чтобы неравенства $\widehat{\mathsf{C}}_0 \left(\epsilon_0 + \widehat{\mathsf{C}}\delta^2\right) \le \delta$ и $\widehat{\mathsf{C}}_0 \widehat{\mathsf{C}}\, \delta < 1$ выполнялись одновременно. Последнее будет, очевидно, выполнено при $\delta = \frac{1}{2\widehat{\mathsf{C}}_0 \widehat{\mathsf{C}}}$, а тогда в первом неравенстве достаточно положить, что $\epsilon_0 = \frac{1}{4\widehat{\mathsf{C}}_0^2 \widehat{\mathsf{C}}}$.

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Физматгиз, 1966. – 707с.

2. *Kirill D.J., Davis S.H., Miksis M.J., Voorhees P.W.* Morphological instability of a whisker // Proc. R. Soc. Lond. – 1999. – V.455. – P.3825-3844.
3. *Tekalign W.T., Spencer B.J.* Evolution equation for a thin epitaxial folm on a deformable sustrate // Journal of Applied Physics. – 2004. – V.96. – P.5505-5512.
4. *Deckelink K., Dziuk G., Elliot C.M.* Error analysis of a semiscrete numerical scheme for diffusion in axially symmetric surfaces // SIAM J. Numer. Anal. – 2003. – V.41. – P.2161-2179.
5. *Renardy M.* Shape Control by Collinear Actuators // Arch. Rational Mech. Anal. – 2001. – V.156. – P.231–240.
6. *Bum Ja Jin* Estimates of the solutions of the elastic system in a moving domain with free upper interface // Nonlinear Analysis. – 2002. – V.51. – P.1009–1029.
7. *Bazaliy B.V., Friedman A.* Global existence and asymptotic stability for an elliptic-parabolic free boyndary problem: an application to a model of tumor growth // Indiana University Mathematics Journal. – 2003. – V.52. – P.1265-1304.
8. *Friedman A., Reitich F.* Nonlinear stability of quasi-static Stefan problem with surface tension: a continuation approach // Ann. Scu. Norm. Super. Pisa. – 2001. – V.30. – P.341-403.
9. *Friedman A., Reitich F.* Quasi-static motion of a capillary drop, I: the two-dimensional case // Journal of Differential Equations Volume. – 2002. – V.178. – P.212-263
10. *Abergel F., Hilhorst D., Issard-Roch F.* On a dissolution-growth problem with surface tension in the neighborhood of a stationary solution // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1993. – V.24. – P.299-316.
11. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736с.
12. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 233с.
13. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371с.
14. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary condition II // Comm/ Pure Apll. Math. – 1964. – V.17. – P.35-92.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
krasnoschok@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 19.05.09