УДК 531.38

©2009. **В.В. Кириченко**

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДИАГОНАЛИЗАЦИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей работе рассматривается линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида. Указаны два способа отыскания функции Ляпунова для таких систем: первый из них приводит к построению существенно нелинейной функции, а второй – функции в виде квадратичной формы. Изучены свойства нелинейных преобразований, используемых при диагонализации системы.

Введение. Метод функций Ляпунова показывает важность функций, производная которых в силу системы дифференциальных уравнений является знакопостоянной. При этом все больший интерес привлекают случаи рассмотрения производных высших порядков. Простой пример системы линейных автономных дифференциальных уравнений диагонального вида с действительными коэффициентами показывает, что для функции $V = \|x\|^2$ вторая производная в силу системы будет положительнопостоянной. Для системы в нормальной жордановой форме ситуация более сложная.

В данной работе предложены два способа построения функции Ляпунова V для систем, имеющих жорданову нормальную форму. К такому виду может быть приведена любая линейная автономная ситема дифференциальных уравнений с помощью линейного преобразования. Первый способ заключается в приведении рассматриваемой системы с помощью нелинейного преобразования к диагональному виду. Однако построенная таким образом функция является существенно нелинейной. Поэтому второй способ предлагает способ построения функции V, когда она имеет квадратичный вид.

1. Системы диагонального вида. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = M\boldsymbol{Y}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{Y}$ – вектор размерности n функций $y_k(t)$, $k=\overline{1,n}$; M – матрица коэффициентов размерности $n \times n$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – набор собственных значений матрицы M. Произведем в (1) замену

$$\boldsymbol{Y} = T\boldsymbol{X}, \tag{2}$$

где T – некоторая постоянная невырожденная матрица. Тогда с учетом замены (2) система (1) примет вид

$$\dot{\boldsymbol{X}} = T^{-1}MT\boldsymbol{X} = N\boldsymbol{X}. \tag{3}$$

Если в качестве матрицы T взять матрицу, у которой столбцы являются соответствующими собственными векторами матрицы M (предполагается что их число равно

n), то матрица N будет иметь диагональный вид. Причем по диагонали будут стоять соответствующие собственные числа матрицы M.

В случае, когда система собственных векторов матрицы M не является полной, приведение (1) к диагональному виду невозможно. В этом случае можно преобразовать систему (1) к жордановой нормальной форме [2].

Таким образом, задача построения функции Ляпунова для системы (1) сводится к задаче построения функции Ляпунова для системы (3), у которой матрица N имеет либо диагональный вид, либо приведена к жордановой форме.

Рассмотрим диагональную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n, \end{cases} \tag{4}$$

Пусть собственные числа λ_k являются действительными. Для функции

$$V = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

вычислим первую и вторую производные в силу системы уравнений (4):

$$\dot{V} = 2\sum_{i=k}^{n} \lambda_k x_k^2, \qquad \ddot{V} = 4\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 x_k^2. \tag{5}$$

Следовательно, вторая производная функции V является положительнопостоянной.

В случае комплексных собственных чисел $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, система (4) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_k = \alpha_k \xi_k - \beta_k \eta_k, \\ &\dot{\eta}_k = \beta_k \xi_k + \alpha_k \eta_k \qquad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для системы (6) рассмотрим функцию

$$V = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k^2 + \eta_k^2).$$

Тогда

$$\dot{V} = 2\sum_{i=k}^{n} \alpha_k (\xi_k^2 + \eta_k^2), \qquad \ddot{V} = 4\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 (\xi_k^2 + \eta_k^2). \tag{7}$$

Вторая производная функции V является положительнопостоянной.

В обоих случаях в качестве функции Ляпунова можно принять $V_f = \dot{V}$. Производная $\dot{V}_f$ будет знакопостоянной и заключение об устойчивости делается на основании соответствующих теорем Ляпунова и их обобщений.

2. Случай жордановой клетки, соответствующей действительному собственному числу. Произвольная система линейных дифференциальных уравнений (1) заменой (2), если в качестве матрицы T взять матрицу, у которой столбцы являются соответствующими собственными векторами матрицы M, может быть приведена к диагональной форме в случае, когда система собственных векторов этой матрицы является полной.

Если система собственных векторов матрицы M не является полной, система (1) может быть приведена к виду [2]

$$\dot{\boldsymbol{X}} = J\boldsymbol{X}, \tag{8}$$

где J – жорданова матрица. При этом действительному характеристическому числу λ матрицы M соответствует обычная жорданова клетка J_λ

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Система (8) называется жордановой нормальной формой системы (1) и является блочно-диагональной формой, поскольку наряду с диагональной частью в ней присутствуют матричные блоки, соответствующие жордановым клеткам.

Рассмотрим систему размерности n, соответствующую жордановой клетке J_λ,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2 + x_1, \\ \dots \\ \dot{x}_n = \lambda x_n + x_{n-1}. \end{cases} \tag{9}$$

Система (9) преобразованием [1]

$$z_k = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{\ln|x_1|}{\lambda}\right)^s x_{k-s}, \qquad k = 1, ..., n, \qquad \lambda \neq 0 \tag{10}$$

приводится к диагональному виду. Обратное преобразование будет иметь вид

$$x_k = \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{\ln|z_1|}{\lambda}\right)^s \frac{z_{k-s}}{s!}, \qquad k = 1, ..., n, \qquad \lambda \neq 0.$$

В новых переменных функция V и ее производные $\dot{V}, \ddot{V}$ имеют вид

$$V = \sum_{k=1}^{n} z_k^2, \qquad \dot{V} = 2\sum_{i=k}^{n} \lambda_k z_k^2, \qquad \ddot{V} = 4\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 z_k^2.$$

Преобразование (10) является частным случаем рассмотренного ниже, поэтому его свойства будут рассмотрены позднее.

3. Случай жордановой клетки, соответствующей паре комплексных чисел. Рассмотрим систему, соответствующую жордановой клетке J_α, которая соответствует паре комплексно-сопряженных собственных чисел $\lambda = \alpha \pm i\beta$:

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & -\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 - \beta\eta_1, \\ \dot{\eta}_1 = \beta\xi_1 + \alpha\eta_1, \\ \dot{\xi}_2 = \alpha\xi_2 - \beta\eta_2 + \xi_1, \\ \dot{\eta}_2 = \beta\xi_2 + \alpha\eta_2 + \eta_1, \\ \dots \\ \dot{\xi}_n = \alpha\xi_n - \beta\eta_n + \xi_{n-1}, \\ \dot{\eta}_n = \beta\xi_n + \alpha\eta_n + \eta_{n-1}. \end{cases} \tag{11}$$

В случае $\beta \neq 0$ система (11) преобразованием [1]

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\beta} \arcsin \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} \right)^s \frac{\xi_{k-s}}{s!}, \\ v_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\beta} \arcsin \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} \right)^s \frac{\eta_{k-s}}{s!}, \qquad k = 1, ..., n \end{aligned} \tag{12}$$

приводится к диагональному виду. Обратное преобразование будет иметь вид

$$\begin{aligned} \xi_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{1}{\beta} \arcsin \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \right)^s u_{k-s}, \\ \eta_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{1}{\beta} \arcsin \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \right)^s v_{k-s}, \qquad k = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Данное преобразование имеет особенность, о которой говорит следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\mathbf{\Omega}$ множество точек фазового пространства системы (11). Тогда преобразование (12) является непрерывным всюду в $\mathbf{\Omega}$. Преобразование (12) является дифференцируемым всюду в $\mathbf{\Omega}$, за исключением точек $P_0 = \{\xi_k, \eta_k,\ k = 1, \dots, n:\ \eta_1 = 0\} \in \mathbf{\Omega}$.

Во всех точках P^0 новые функции $\xi_k, \eta_k,\ k = 2, \ldots, n$ не имеют производной, т.к. не существует производной функции $arcsin(x)$ в точке $x = 1$. Однако в этих точках функции ξ_k, η_k непрерывны. Докажем это. Величина $\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}}$ предела не имеет при $\xi_1, \eta_1 \to 0$, однако величина $\arcsin \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}}$ ограничена. Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ что $\forall \xi_1, \eta_1, \xi_k :\ \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_k^2} < \delta$ выполняется $\xi_k \arcsin \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}} < \varepsilon$. Утверждение доказано.

В случае $\alpha \neq 0$ система (11) преобразованием [1]

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{\ln(\xi_1^2 + \eta_1^2)}{2\alpha} \right)^s \xi_{k-s}, \\ v_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{\ln(\xi_1^2 + \eta_1^2)}{2\alpha} \right)^s \eta_{k-s}, \qquad k = 1, ..., n \end{aligned} \tag{13}$$

приводится к диагональному виду. Обратное преобразование будет иметь вид

$$\begin{aligned} \xi_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{\ln(u_1^2 + v_1^2)}{2\alpha} \right)^s \frac{u_{k-s}}{s!}, \\ \eta_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{\ln(u_1^2 + v_1^2)}{2\alpha} \right)^s \frac{v_{k-s}}{s!}, \qquad k = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Преобразование (10) является частным случаем преобразования (13). Действительно при $\eta_k = 0,\ k = 1, \ldots, n$ (13) переходит в (10).

Укажем свойства преобразования (13):

Утверждение 2. Пусть $\mathbf{\Omega}$ множество точек фазового пространства системы (11). Тогда преобразование (13) является непрерывно дифференцируемым всюду в $\mathbf{\Omega}$ за исключением точек $P_0 = \{\xi_k, \eta_k,\ k = 1, \ldots, n :\ \xi_1^2 + \eta_1^2 = 0\} \in \mathbf{\Omega}$.

Во всех точках P^0 новые функции $\xi_k, \eta_k,\ k = 2, \ldots, n$ не имеют производной, т.к. не существует производной функции $ln(x)$ в точке $x = 0$. Кроме того, функции $\xi_k, \eta_k,\ k = 3, \ldots, n$ имеют в этих точках разрыв. Действительно для любых $\varepsilon > 0, \delta > 0$ всегда можно найти такие ξ_1, η_1, ξ_k из области $\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_k^2} < \delta$ (например, зафиксировав ξ_k возле границы множества, а ξ_1, η_1 возле нуля), что будет выполнятся условие $| \left(\frac{\ln(\xi_1^2+\eta_1^2)}{2\alpha} \right) \xi_k| > \varepsilon,\ k = 3, \ldots, n$. Утверждение доказано.

В новых переменных функция V и ее производные $\dot{V}, \ddot{V}$ имеют вид

$$V = \sum_{k=1}^{n} (u_k^2 + v_k^2), \qquad \dot{V} = 2 \sum_{i=k}^{n} \alpha_k (u_k^2 + v_k^2), \qquad \ddot{V} = 4 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 (u^2 + v_k^2). \tag{14}$$

4. Функция Ляпунова в виде квадратичной формы. Функция L, построенная способом, предложенным в пунктах 3,4, является существенно нелинейной.

Поэтому целесообразно построить квадратичную функцию L для системы, приведенной к нормальной жордановой форме. Рассмотрим случай пары комплексных собственных чисел. Случай вещественного кратного корня будет следовать из рассматриваемого как частный случай.

Лемма. *Для системы (11) найдется такой набор коэффициентов* $a_1, \ldots, a_n$, *что функция* $V = a_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \ldots + a_n(\xi_n^2 + \eta_n^2)$ *будет иметь знакоопределенную вторую производную, взятую в силу системы уравнений (11).*

Доказательство. Возьмем функцию V следующего вида

$$V = a_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + a_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \ldots + a_n(\xi_n^2 + \eta_n^2). \tag{15}$$

Заметим, что если положить $\eta_k = 0,\ k = \overline{1,n}$, то система (11) сведется к системе (9). Посчитаем первую и вторую производные в силу системы (11):

$$\begin{aligned} \dot V = {} & 2a_1\alpha(\xi_1^2 + \eta_1^2) + 2a_2\alpha(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \ldots + 2a_n\alpha(\xi_n^2 + \eta_n^2) + \\ & + 2a_2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) + 2a_3(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3) + \ldots + 2a_n(\xi_{n-1}\xi_n + \eta_{n-1}\eta_n), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \ddot V = 2\big[& (2a_1\alpha^2 + a_2)(\xi_1^2 + \eta_1^2) + (2a_2\alpha^2 + a_3)(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \ldots + \\ & + (2a_{n-1}\alpha^2 + a_n)(\xi_{n-1}^2 + \eta_{n-1}^2) + 2a_n\alpha^2(\xi_n^2 + \eta_n^2) + \\ & + 4a_2\alpha(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) + 4a_3\alpha(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3) + \ldots + 4a_n\alpha(\xi_{n-1}\xi_n + \eta_{n-1}\eta_n) + \\ & + a_3(\xi_1\xi_3 + \eta_1\eta_3) + a_4(\xi_2\xi_4 + \eta_2\eta_4) + \ldots + a_n(\xi_{n-2}\xi_n + \eta_{n-2}\eta_n)\big]. \end{aligned} \tag{17}$$

Матрица квадратичной формы (17) будет состоять из двух одинаковых матриц, стоящих на диагонали следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 2a_n\alpha^2 & 2a_n\alpha & \frac{a_n}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2a_n\alpha & 2a_{n-1}\alpha^2 + a_n & 2a_{n-1}\alpha & \frac{a_{n-1}}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_n}{2} & 2a_{n-1}\alpha & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{a_{n-1}}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{a_5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 2a_4\alpha & \frac{a_4}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 2a_3\alpha^2 + a_4 & 2a_3\alpha & \frac{a_3}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2a_3\alpha & 2a_2\alpha^2 + a_3 & 2a_2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a_3}{2} & 2a_2\alpha & 2a_1\alpha^2 + a_2 \end{pmatrix}.$$

Выпишем окаймляющие миноры этой матрицы:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 2a_n\alpha^2,\\
A_2 &= (2a_{n-1}\alpha^2 + a_n)A_1 - 4a_n^2\alpha^2,\\
A_3 &= (2a_{n-2}\alpha^2 + a_{n-1})A_2 - 4\alpha^2 a_{n-1}^2 A_1 - (2a_{n-1}\alpha^2 + a_n)\frac{a_n^2}{4} + 4\alpha^2 a_{n-1}a_n^2,\\
A_4 &= (2a_{n-3}\alpha^2 + a_{n-2})A_3 - 4\alpha^2 a_{n-2}^2 A_2 -\\
&\quad - (2a_{n-2}\alpha^2 + a_{n-1})\frac{a_{n-1}^2}{4}A_1 + \frac{a_{n-1}^2 a_n^2}{16} +\\
&\quad + 4\alpha^2 a_{n-2}a_{n-1}^2 A_1 - 2\alpha^2 a_{n-2}a_{n-1}a_n^2,\\
A_{i+1} &= (2a_{n-i}\alpha^2 + a_{n-i+1})A_i - 4\alpha^2 a_{n-i+1}A_{i-1} -\\
&\quad - (2a_{n-i+1}\alpha^2 + a_{n-i+2})\frac{a_{n-i+2}^2}{4}A_{i-2} + \frac{a_{n-i+2}^2 a_{n-i+3}^2}{16}A_{i-3} +\\
&\quad + \alpha^2\sum_{k=2}^{i}(-2)^{4-k}A_{i-k}a_{n-i+k}\prod_{j=1}^{k}a_{n-i+j}.
\end{aligned}
$$

Здесь $A_0 = 1$, $i = 3, \ldots, n$.

Теперь, используя критерий Сильвестра и свойство самосопряженности комплексных корней, найдем условия на коэффициенты, при которых $\ddot{V}$ будет знакоопределенной.

$$A_k > 0, \qquad (-1)^k A_k > 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Заметим, что коэффициент a_{n-i} входит в определитель A_{i+1} линейно и только в первое слагаемое ($i = 0, \ldots, n-1$), а характеристический корень α имеет только четную степень и, следовательно, на выбор параметров a_i не влияет. Поэтому все неравенства (18) разрешаются последовательно относительно коэффициентов a_i, начиная с первого. Лемма доказана. □

Используя вышедоказанную лемму для системы дифференциальных уравнений (11) можно построить функцию Ляпунова следующего вида $L = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$, где $a_1, \ldots, a_n$ – некоторые вещественные коэффициенты.

Рассмотрим функцию V вида:

$$V = a_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + a_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \ldots + a_n(\xi_n^2 + \eta_n^2). \tag{19}$$

Возьмем коэффициенты a_i, $(i = \overline{1, n})$ таким образом, чтобы выполнялись условия (18). Тогда вторая производная функции V, взятая в силу системы уравнений (11), будет знакоопределена, а первая производная иметь вид (16).

Матрица квадратичной формы (16) будет состоять из двух одинаковых матриц, стоящих на диагонали следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 2a_n\alpha & 2a_n & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 2a_{n-1}\alpha & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & 2a_{n-2}\alpha & a_{n-2} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-2} & 2a_{n-3}\alpha & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 2a_4\alpha & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & a_4 & 2a_3\alpha & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_3 & 2a_2\alpha & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & a_2 & 2a_1\alpha \end{pmatrix}.$$

Выпишем окаймляющие миноры этой матрицы:

$$\begin{aligned} B_1 &= 2a_n\alpha, \\ B_2 &= 2\alpha a_{n-1}B_1 - a_n^2, \\ B_3 &= 2\alpha a_{n-2}B_2 - a_{n-1}^2 B_1, \\ B_{i+2} &= 2\alpha a_{n-i-1}B_{i+1} - a_{n-i}^2 B_i, \qquad i = 1, \ldots, n-2. \end{aligned}$$

С помощью критерия Сильвестра найдем условия знакоопределенности квадратичной формы (16):

$$(-1)^k B_k > 0, \qquad B_k > 0 \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Знаки миноров B_k зависят от коэффициентов a_i и знака вещественной части характеристического числа α. Из формул видно, при $\alpha > 0$ легко подобрать коэффициенты a_i $(i = \overline{1,n})$ таким образом, чтобы выполнялись условия $A_k > 0$, $B_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. В качестве функции Ляпунова берем функцию $L = \dot{V}$. Тогда L и $\dot{L}$ будут определенно-положительными функциями и, следовательно, нулевое решение неустойчиво. Если $\alpha < 0$, то коэффициенты a_i $(i = \overline{1,n})$ подбираются из условий $A_k > 0$, $(-1)^k B_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда L будет определенно-отрицательной функцией, а $\dot{L}$ – определенно-положительной. Тогда нулевое решение асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова.

Заключение. Данная статья дополняет результаты работы [3]. С целью использования построенных функций при анализе устойчивости проанализированы свойства используемых нелинейных преобразований. Кроме того, дано детальное доказательство теоремы о построении функции Ляпунова в виде квадратичной формы. Проведенный анализ позволяет сделать вывод о нецелесообразности построения функции со знакопостоянной производной для систем с жордановой клеткой при нулевых и чисто мнимых собственных числах.

1. *Ковалев А.М.* Диагонализация линейных автономных динамических систем // Доповіді НАНУ. – 2007, №1. – С.7-11.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 351с.

3. *Кириченко В.В, Ковалев А.М.* Построение функций с положительнопостоянной второй производной для линейной системы дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та прикл. матем. и мех. НАНУ. – 2008, – **Т.17**. – С.74-79.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
vkirichenko@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 10.03.09