УДК 533.6.013.42

©2009. **А.Ю. Карнаух, Н.К. Дидок**

СОБСТВЕННЫЕ ФОРМЫ СОВМЕСТНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ДНА И ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Проведено исследование совместных колебаний плоского упругого дна цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью. Получено частотное уравнение и собственные формы совместных колебаний. Показано обобщенное условие ортогональности собственных функций.

1. Постановка задачи. Рассмотрим расположенный вертикально прямой круговой цилиндрический сосуд радиуса R с плоским упругим дном толщины h_1, заполненный до уровня h идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ. Упругое днище представляет собой изотропную пластинку, жестко защемленную по контуру.

В случае большой относительной глубины заполнения жидкости уравнение, описывающее совместные колебания днища и содержащейся в сосуде жидкости, имеет вид [1]

$$\begin{aligned} D\Delta_2\Delta_2 w + \rho_1 h_1 \ddot{w} - \rho g w + \frac{\rho}{\pi R^2}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}(h\ddot{w} + gw)\, r dr d\theta + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} s_{ni} J_n(k_{ni} r)\cos n\theta \int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} \ddot{w} J_n(k_{ni} r)\cos n\theta\, r dr d\theta = \\ = -p_0 - \rho g h - \rho g \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(k_{ni} r)\cos n\theta}{\cosh(\mu_{ni} h/R)}(A_{ni}\sin\alpha_{ni} t + B_{ni}\sin\alpha_{ni} t). \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \quad s_{ni} = \frac{1}{(1+\delta_{0n})}\cdot\frac{2\rho}{\pi R \mu_{ni}\left(1 - n^2/\mu_{ni}^2\right) J_n^2(\mu_{ni})},$$

δ_{0n} – символ Кронекера,
$D = Eh_1^3/12\left(1-\nu^2\right)$ – цилиндрическая жесткость днища;
$w = w(r,\theta)$, ρ_1 – прогиб днища и его плотность; p_0 – внешнее давление;
$J_n(k_{ni} r)$ – функции Бесселя первого рода n-го порядка действительного аргумента, $k_{ni} = \mu_{ni}/R$, μ_{ni} – корни уравнения $J_n'(\mu) = 0$.

Собственные формы колебаний рассматриваемой механической системы определяются из решения соответствующего (1) однородного уравнения

$$D\Delta_2\Delta_2 w + \rho_1 h_1 \ddot{w} - \rho g w + \frac{\rho}{\pi R^2}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}(h\ddot{w} + gw)\, r dr d\theta +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} s_{ni} J_n(k_{ni} r)\cos n\theta \int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\ddot{w} J_n(k_{ni} r)\cos n\theta r dr d\theta = 0. \quad (2)$$

2. Частотное уравнение и собственные формы. Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$w(r,\theta,t) = F(r,\theta)(c_1 \sin\omega t + c_2\cos\omega t).$$

Разделяя переменные в (2), получим для неизвестной функции $F(r,\theta)$ следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$\Delta_2\Delta_2 F(r,\theta) - \beta^4 F(r,\theta) = a\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} F(r,\theta)\, r dr d\theta +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} J_n(k_{ni} r)\cos(n\theta)\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} F(r,\theta) J_n(k_{ni} r)\cos(n\theta)\, r dr d\theta. \quad (3)$$

Здесь $\beta^4 = \left(\rho g + \rho_1 h_1 \omega^2\right)/D.$

Введем безразмерные параметры

$$x = \beta R, \quad \eta = \frac{R}{h}, \quad s = \frac{\rho_1 h_1}{\rho R}, \quad q = \frac{\rho h + \rho_1 h_1}{\rho h} = 1 + \eta s,$$

$$p^4 = \frac{\rho g R^4}{D}, \quad z_{ni}^4 = \frac{\mu_{ni} s}{\mu_{ni} s + 1}\mu_{ni}^4 + \frac{1}{\mu_{ni} s + 1} p^4,$$

тогда

$$a = \frac{1}{\pi R^6}\cdot\frac{x^4 - p^4 q}{q-1}, \quad b_{ni} = \frac{1}{\pi^2 R^6}\cdot\frac{2}{(1+\delta_{0n})}\cdot\frac{x^4 - p^4}{\mu_{ni} s b_{ni}^*}, \quad b_{ni}^* = J_n^2(\mu_{ni})\left(1 - \frac{n^2}{\mu_{ni}^2}\right),$$

а собственная частота, как функция безразмерной переменной x, вычисляется по формуле

$$\omega^2 = \frac{g}{h}\cdot\frac{x^4 - p^4}{\eta p^4 s}. \quad (4)$$

Решение уравнения (3), не обращающееся в бесконечность при $r = 0$, имеет вид

$$F_n(r,\theta) = \left\{C_n + A_n J_n\left(\frac{x}{R} r\right) + B_n I_n\left(\frac{x}{R} r\right) + \sum_{i=1}^{\infty} K_{ni} J_n(k_{ni} r)\right\}\cos n\theta, \quad (5)$$

где C_n, A_n, B_n, K_{ni} – константы, подлежащие определению. Выражение, стоящее в фигурных скобках и представляющее функцию только от r, обозначим через $X_n(r)$.

После подстановки (5) в (3) получим соотношения для C_n и K_{ni}

$$C_n = -2\delta_{0n}\frac{x^4 - p^4 q}{xq\left(x^4 - p^4\right)}\left(A_0 J_1(x) + B_0 I_1(x)\right),$$

$$K_{ni} = -2\frac{x^4 - p^4}{x^4 - z_{ni}^4}\left(A_n f_{ni}^A(x) + B_n f_{ni}^B(x)\right).$$

Здесь

$$f_{ni}^A(x) = \frac{xJ_n(\mu_{ni})\, J_{n+1}(x) - \mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})\, J_n(x)}{b_{ni}^*\left(x^2 - \mu_{ni}^2\right)(1 + s\mu_{ni})\left(x^2 - z_{ni}^2\right)},$$

$$f_{ni}^B(x) = \frac{xJ_n(\mu_{ni})\, I_{n+1}(x) + \mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})\, I_n(x)}{b_{ni}^*\left(x^2 + \mu_{ni}^2\right)(1 + s\mu_{ni})\left(x^2 - z_{ni}^2\right)}.$$

Полученные значения C_n и K_{ni} подставим в $X_n(r)$

$$X_n(r) = A_n J_n\left(\frac{x}{R}r\right) + B_n I_n\left(\frac{x}{R}r\right) - 2\delta_{0n}\frac{\left(x^4 - p^4 q\right)\left(A_0 J_1(x) + B_0 I_1(x)\right)}{xq\left(x^4 - p^4\right)} -$$
$$- 2\left(x^4 - p^4\right)\sum_{i=1}^{\infty}\left(A_n f_{ni}^A(x) + B_n f_{ni}^B(x)\right) J_n(k_{ni} r). \quad (6)$$

Неизвестные A_n и B_n найдем (с точностью до постоянного множителя) из граничных условий жесткой заделки днища

$$X_n(r)\big|_{r=R} = 0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{dX_n(r)}{dr}\right|_{r=R} = 0.$$

Полагая $A_{nj} = 1$, найдем

$$B_{nj} = \frac{x_{nj} J_{n+1}(x_{nj}) - nJ_n(x_{nj})}{x_{nj} I_{n+1}(x_{nj}) + nI_n(x_{nj})}, \quad B_{0j} = \frac{J_1(x_{nj})}{I_1(x_{nj})}.$$

Здесь x_{nj} – корни следующего характеристического уравнения $(n = 0, 2, ...)$

$$\left(nI_n(x) + xI_{n+1}(x)\right)\left\{\frac{J_n(x)}{2} - J_1(x)\frac{\delta_{0n}\left(x^4 - p^4 q\right)}{xq\left(x^4 - p^4\right)} - \left(x^4 - p^4\right)\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{i=1}^{\infty} f_{ni}^A(x)\, J_n(\mu_{ni})\right\} - \left(nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)\right)\times$$
$$\times\left\{\frac{I_n(x)}{2} - I_1(x)\frac{\delta_{0n}\left(x^4 - p^4 q\right)}{xq\left(x^4 - p^4\right)} - \left(x^4 - p^4\right)\sum_{i=1}^{\infty} f_{ni}^B(x)\, J_n(\mu_{ni})\right\} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, для собственных форм колебаний $F_{nj}(r,\theta)$ получим выражение

$$F_{nj}(r,\theta) = \cos n\theta \left\{ J_n(\frac{x_{nj}}{R}r) + I_n\left(\frac{x_{nj}}{R}r\right)\frac{x_{nj}J_{n+1}(x_{nj}) - nJ_n(x_{nj})}{x_{nj}I_{n+1}(x_{nj}) + nI_n(x_{nj})} - \right.$$
$$- 4\delta_{0n}J_1(x_{nj})\frac{x_{nj}^4 - p^4 q}{x_{nj}q\left(x_{nj}^4 - p^4\right)} - 2\left(x_{nj}^4 - p^4\right)\times$$
$$\left.\times\sum_{i=1}^{\infty}\left[f_{ni}^A(x_{nj}) + f_{ni}^B(x_{nj})\frac{x_{nj}J_{n+1}(x_{nj}) - nJ_n(x_{nj})}{x_{nj}I_{n+1}(x_{nj}) + nI_n(x_{nj})}\right]J_n(k_{ni}r)\right\}. \quad (8)$$

3. Ортогональность собственных форм. Найденные собственные формы колебаний (8) являются решениями уравнения (3), поэтому имеет место равенство

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\left[F_{ni}\Delta_2\Delta_2 F_{mj} - F_{mj}\Delta_2\Delta_2 F_{ni}\right]\xi d\xi d\vartheta - \left(\omega_{mj}^2 - \omega_{ni}^2\right)\left\{\rho_1 h_1\int_0^R\int_0^{2\pi}F_{mj}F_{ni}\xi d\xi d\vartheta + \right.$$
$$+\frac{\rho h}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi}F_{mj}\xi d\xi d\vartheta\int_0^R\int_0^{2\pi}F_{ni}\xi d\xi d\vartheta + \frac{2\rho}{\pi^2 R}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\delta_{0p})\mu_{pq}J_p^2(\mu_{pq})\left(1 - p^2/\mu_{pq}^2\right)}\times$$
$$\left.\times\int_0^R\int_0^{2\pi}F_{mj}J_p(k_{pq}\xi)\cos(p\vartheta)\xi d\xi d\vartheta\int_0^R\int_0^{2\pi}F_{ni}J_p(k_{pq}\xi)\cos(p\vartheta)\xi d\xi d\vartheta\right\} = 0.$$

В [2] показано, что бигармонический оператор является симметричным и положительно определенным в L_2 на множестве функций, которые удовлетворяют граничным условиям жесткого закрепления. Поэтому,

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\left[F_{ni}\Delta_2\Delta_2 F_{mj} - F_{mj}\Delta_2\Delta_2 F_{ni}\right]\xi d\xi d\vartheta \equiv 0,$$

откуда следует обобщенное условие ортогональности собственных форм

$$\rho_1 h_1\int_0^R\int_0^{2\pi}F_{mj}F_{ni}\xi d\xi d\vartheta + \frac{\rho h}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi}F_{mj}\xi d\xi d\vartheta\int_0^R\int_0^{2\pi}F_{ni}\xi d\xi d\vartheta + \frac{2\rho}{\pi^2 R}\times$$
$$\times\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\delta_{0p})\mu_{pq}J_p^2(\mu_{pq})\left(1 - p^2/\mu_{pq}^2\right)}\int_0^R\int_0^{2\pi}F_{mj}J_p(k_{pq}\xi)\cos(p\vartheta)\xi d\xi d\vartheta\times$$
$$\times\int_0^R\int_0^{2\pi}F_{ni}J_p(k_{pq}\xi)\cos(p\vartheta)\xi d\xi d\vartheta = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m \text{ или } i \neq j, \\ N^2, & \text{если } n = m \text{ и } i = j. \end{cases} \quad (9)$$

Полученное соотношение (9) позволяет поставить задачу о вынужденных колебаниях рассматриваемой механической системы [3]. В этом случае правая часть уравнения (1) имеет смысл внешней нагрузки $Q(r, \theta, t)$, и общее решение (1) можно искать в виде разложения в ряд по собственным формам (8).

4. Исследование частотного уравнения. В осесимметричном случае ($n = 0$) уравнение (7) примет вид

$$J_0(x)I_1(x) + J_1(x)I_0(x) - \\ - 4J_1(x)I_1(x)\left\{\frac{x^4 - p^4q}{xq\left(x^4 - p^4\right)} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(x^4 - p^4\right)x^3}{\left(x^4 - \mu_{0i}^4\right)\left(1 + s\mu_{0i}\right)\left(x^4 - z_{0i}^4\right)}\right\} = 0. \quad (10)$$

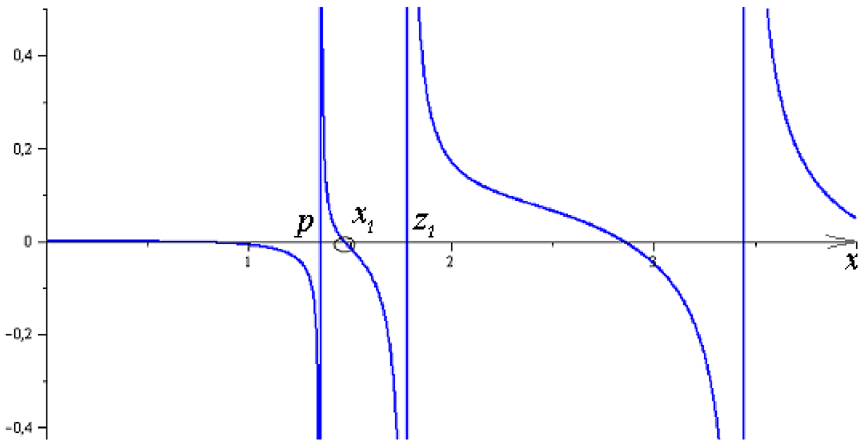

Рис. 1. График левой части уравнения (10) *при условии* $p < \mu_i$

Заметим, что $\min\left(\mu_{0i}, p\right) < z_{0i} < \max\left(\mu_{0i}, p\right)$ в случае $p \neq \mu_{0i}$ и $z_{0i} = p$ в случае $p = \mu_{0i}$.

Поскольку величина $\omega^2 = g\left(x^4 - p^4\right)/\eta hps$ должна быть неотрицательной, то необходимо, чтобы $p < x_1$. Численный анализ уравнения (10) показал, что последнее условие выполняется, если $p < \mu_{0i}$ (при этом $p < x_1 < z_{01}$), и не выполняется в случае $p > \mu_{0i}$. При $p < \mu_{0i}$ график левой части уравнения (10) показан на рис 1.

Поведение отдельных слагаемых левой части уравнения (10) показано на рис.2, на котором:

$$- 4J_1(x)I_1(x)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^3\left(x^4 - p^4\right)}{\left(x^4 - \mu_{0i}^4\right)\left(1 + s\mu_{0i}\right)\left(x^4 - z_{0i}^4\right)} \text{ – сплошная линия,}$$

$$- 4J_1(x)I_1(x) \cdot \frac{x^4 - p^4q}{xq\left(x^4 - p^4\right)} \text{ – штриховая линия,}$$

$$J_0(x)I_1(x) + J_1(x)I_0(x) \text{ – штрих-пунктирная линия.}$$

Из рис.2 видно, что на промежутке (p, x_1) слагаемое, содержащее сумму, пренебрежимо мало по отношению к двум другим. Кроме того, на отрезке $[0, \mu_{01}]$ функции

Бесселя $J_n(x)$ и $I_n(x)$ $(n = 0, 1)$ с хорошей точностью можно представить разложением по формуле Тейлора, сохраняя степени x не выше шестой. Тогда для оценки первого положительного корня (10) получим приближенное уравнение

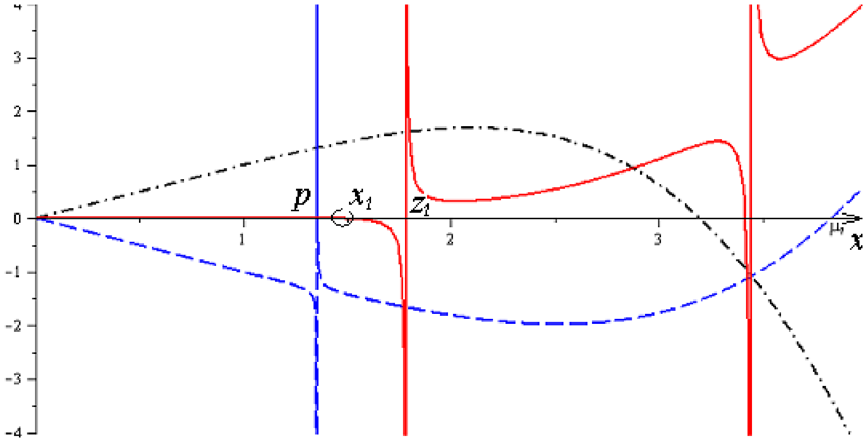

Рис. 2. Поведение отдельных слагаемых в (10)

$$x - \frac{1}{96}x^5 - \left(x^2 - \frac{1}{96}x^6\right)\frac{x^4 - p^4 q}{xq\,(x^4 - p^4)} = 0,$$

решение которого $x_1^4 = \big(192\,(q-1) + p^4 q\big)\big/(2q-1)$ дает искомую оценку основной частоты (в размерных величинах)

$$\omega_1^2 = \frac{192D - \rho g R^4}{R^4\,(\rho h + 2\rho_1 h_1)}. \tag{11}$$

Численные расчеты показали, что погрешность полученной таким образом оценки (11) не превышает в среднем 1,5-2% на всем диапазоне изменения параметра: $p \in (0, \mu_{01})$. Параметры q и s изменялись в следующих пределах $q \in (1, 2)$, $s \in (0, 1)$ (т.к. предполагается $h/R \gg 1$, $h_1/R \ll 1$, то $s \ll 1$, $q \simeq 1$).

Поскольку $p < x_1 < z_{01}$, то существует некоторое число $\lambda > 0$ такое, что

$$x_1 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}p + \frac{1}{\lambda}z_1.$$

В случае безинерционного днища ($\rho_1 = 0$, $s = 0$ и $x_1 = p$) выражение (4) дает неопределенность, но его предел при $s \to 0$ существует и равен

$$\tilde{\omega}_1^2 = \lim_{s\to 0}\frac{g}{h}\cdot\frac{x_1^4 - p^4}{\eta p^4 s} = \frac{g}{h}\cdot\frac{\mu_{01}\left(\mu_{01}^4 - p^4\right)}{\eta\lambda p^4}.$$

Если $\lambda \gg 1$, то $\tilde{\omega}_1^2$ можно оценить аналитически следующим образом. Зафиксируем в (10) аргумент в функциях Бесселя $x = p$, а выражение в фигурных скобках заменим его разложением в окрестности p, сохранив в сумме только первое слагаемое (как главную часть). Получим

$$\frac{\eta s}{(1+\eta s)\,(x-p)} + \frac{8+5\eta s}{p\,(1+\eta s)} = 4K, \tag{12}$$

где

$$K = \frac{J_0(p)I_1(p) + J_1(p)I_0(p)}{J_1(p)I_1(p)}.$$

Решение уравнения (2) относительно x в пределе при $s \to 0$ дает оценку

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{g}{h} \cdot \frac{1}{1-Kp}.$$

1. *Петренко М.П.* Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости // Прикладная механика. – 1969. – Т.5, №6. – С.44-50.
2. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М. Наука, 1970. – 512с.
3. *Петренко М.П.* Вынужденные совместные колебания жидкости и упругого днища// Прикладная механика. – 1970. – Т.6, №6. – С.127-131.

Донецкий национальный ун-т
nick_di@rambler.ru

Получено 24.03.09