УДК 517.5

©2009. **Ю.П. Дыбов**

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

В работе устанавливается целый ряд критериев существования регулярных решений задачи Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами.

1. Введение. Пусть G – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$, и пусть $\mu : G \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. **Уравнением Бельтрами** называется уравнение вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1}$$

где $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные отображения f по x и y, соответственно. Функция μ называется **комплексным коэффициентом** или просто **характеристикой**, а $K_\mu(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$ – **максимальной дилатацией** или просто **дилатацией** уравнения (1). Уравнение называется **вырожденным,** если дилатация K_μ является существенно неограниченной, $K_\mu \notin L^\infty(D)$, т.е. если нет постоянной $K \in [1, \infty)$ такой, что $K_\mu(z) \le K$ п.в. Гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{loc}$ назовем **регулярным**, если его **якобиан** $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 > 0$ п.в. Любой регулярный гомеоморфизм удовлетворяет некоторому уравнению Бельтрами с коэффициентом $\mu(z) = \mu_f(z) = \frac{f_{\overline{z}}}{f_z}$. **Касательной дилатацией** в точке z, относительно $z_0 \in \overline{G}$, называется величина $K^T_\mu(z, z_0) = \frac{\left|1 - \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}\mu(z)\right|^2}{1-|\mu(z)|^2}$. Известно, что для п.в. $z \in G$ $K^T_\mu(z, z_0) = \frac{|f_\theta(z)|^2}{r^2 J_f(z)}$, где $z = z_0 + re^{i\theta}$, см., напр., (2.4) в [8]. Пусть G – область в $\mathbb{C}$, $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$, $A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, $S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}$, $i = 1, 2$. Следуя работе [8], будем говорить, что гомеоморфизм $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$ является **кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке** $z_0 \in G$, если соотношение

$$M\left(\Delta\left(fS_1, fS_2, fG\right)\right) \le \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^2(|z - z_0|)\, dm(z) \tag{2}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, z_0)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \ge 1\,. \tag{3}$$

Говорят, что гомеоморфизм $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$ является **кольцевым Q-гомеоморфизмом** в G, если условие (2) выполнено для всех точек $z_0 \in G$. В работе [10] впервые рассматривались кольцевые Q-гомеоморфизмы в граничных точках области G. Гомеоморфизм $f:G\to\overline{\mathbb{C}}$ называется **кольцевым $Q-$гомеоморфизмом в граничной точке** z_0 области G, если

$$M\ (\Delta\,(fC_1,fC_2,fG))\ \le \int\limits_{A\cap G} Q(x)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\ dm(z) \tag{4}$$

для любого кольца $A=A(z_0,r_1,r_2)$ и произвольных континуумов C_1 и C_2 в G, которые принадлежат различным компонентам дополнения кольца A в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащим z_0 и ∞, соответственно, и для любой измеримой функции $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$, удовлетворяющей условию (3).

2. Характеризация кольцевых Q-гомеоморфизмов на границе единичного круга.

Лемма 1. *Пусть $Q:\mathbb{D}\to[0\,,\infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $z_0\in\partial\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда*

$$M\ (\Delta\,(fC_1^*,fC_2^*,f\,(A\cap\mathbb{D})))\ \le \int\limits_{A\cap\mathbb{D}} Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\ dm(z) \tag{5}$$

для любого кольца $A=A(z_0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r<r_2<2$, где $C_1^*=S(z_0,r_1)\cap\mathbb{D}$ и $C_2^*=S(z_0,r_2)\cap\mathbb{D}$ – границы кольца $A=A(z_0,r_1,r_2)$ в $\mathbb{D}$, и для любой измеримой функции $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$, удовлетворяющей условию (3).

Доказательство. Действительно, семейство кривых $\Delta(fC_1^*,fC_1^*,f\,(A\cap\mathbb{D}))$ минорирует любое семейство $\Delta(fC_1,\,fC_1,\,\mathbb{D})$, где C_1, C_2 – произвольные континуумы в $\mathbb{D}$, принадлежащие разным компонентам дополнения кольца A и, таким образом, $M(\Delta(fC_1,\,fC_2,\,\mathbb{D}))\le M(\Delta(fC_1^*,\,fC_2^*,\,f(A\cap\mathbb{D})))$. Следовательно, (5) влечет (4). Покажем наоборот, что (5) имеет место для любого кольцевого Q-гомеоморфизма $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ в точке z_0. Для этого возьмем в (4) расширяющиеся последовательности $C_1=C_1^n$ и $C_2=C_2^n$ замкнутых дуг, которые исчерпывают открытые дуги C_1^* и C_2^*, соответственно. Тогда $\Delta(fC_1^*,\,fC_2^*,\,\mathbb{D})=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta(fC_1^n,\,fC_2^n,\,\mathbb{D})$ и, следовательно, см. [11],

$$M(\Delta(fC_1^*,\,fC_2^*,\,\mathbb{D}))=\lim_{n\to\infty}M(\Delta(fC_1^n,\,fC_2^n,\,\mathbb{D}))\,.$$

Таким образом, (4) влечет (5), т.к. $\Delta(fC_1^*,\,fC_2^*,\,f\,(A\cap\mathbb{D}))\subseteq\Delta(fC_1^*,\,fC_2^*,\,\mathbb{D})$.

Лемма 2. *Пусть $Q:\mathbb{D}\to[0,\infty]$ – измеримая функция и $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ – кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $z_0\in\partial\mathbb{D}$. Тогда*

$$M\ (\Delta\,(fC_1^*,fC_2^*,\mathbb{D})))\ \le\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\|Q\|_1(r)}\right)^{-1} \tag{6}$$

для любых $0<r_1<r_2<2$, где $\|Q\|_1(r)=\int\limits_{\gamma_r}Q(z)|dz|$ – норма в L_1 функции Q над дугами $\gamma_r=\mathbb{D}\cap S(z_0,r)$, $C_1^*=S(z_0,r_1)\cap\mathbb{D}$ и $C_2^*=S(z_0,r_2)\cap\mathbb{D}$.

Доказательство. Пусть $I = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_1(r)}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что $\infty \neq I \neq 0$. Тогда $\|Q\|_1(r) \neq 0$ п.в. на $(r_1\,, r_2)$. Положим

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\int\limits_{\gamma_t} Q(z)|dz|}\,, & t \in (r_1, r_2)\ , \\ 0\,, & t \notin (r_1, r_2)\ . \end{cases}$$

Тогда, по теореме Фубини в полярных координатах с центром в точке z_0, имеем

$$\int\limits_{A\cap\mathbb{B}} Q(z)\cdot\psi^2(|z-z_0|)\ dm(z)\ = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\int\limits_{\gamma_r} Q(z)\,|dz|}\,. \tag{7}$$

Пусть Γ – семейство всех кривых, соединяющих окружности C_1^* и C_2^* в $A\cap\mathbb{D}$. Пусть также ψ^*– борелевская функция, такая, что $\psi^*(t) = \psi(t)$ для п.в. $t \in [0,\infty]$. Такая функция ψ^* существует по теореме Лузина. Тогда функция $\rho(z)\ = \psi^*(|z-z_0|)/I$ является допустимой для семейства Γ и, согласно соотношению (7), для любого кольцевого Q-гомеоморфизма в точке z_0 будем иметь, что $M(f\Gamma) \leq \int\limits_{A\cap\mathbb{D}} Q(z)\cdot \rho^2(z)\ dm(z) = \left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\int\limits_{\gamma_r} Q(z)\,|dz|}\right)^{-1}$.

Лемма 3. *Пусть $Q : \mathbb{D} \to [0,\infty]$ – измеримая функция и $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $z_0 \in \partial\mathbb{D}$. Положим $\eta_0(r) = \frac{1}{\|Q\|_1(r)\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{\|Q\|_1(t)}}$, где $\|Q\|_1(r) = \int\limits_{\gamma_r} Q(z)|dz|$ и $\gamma_r = \mathbb{D}\cap S(z_0,r)$. Тогда*

$$\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_1(r)}\right)^{-1} = \int\limits_{A\cap\mathbb{D}} Q(z)\cdot\eta_0^2(|z-z_0|)\ dm(z) \leq \int\limits_{A\cap\mathbb{D}} Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\ dm(z) \tag{8}$$

для любой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\ dr\ = 1\,. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $I = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_1(r)}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < I < \infty$. Тогда из (8) следует, что $\|Q\|_1(r) \neq 0$ п.в. в (r_1, r_2). Поэтому без ограничения общности при доказательстве неравенства в (8) можно считать, что также $\eta(r) \neq \infty$ п.в. в (r_1, r_2). Полагая $\alpha(r) = \|Q\|_1(r)\,\eta(r)$, $w(r) = \frac{1}{\|Q\|_1(r)}$, имеем, что $\eta(r) = \alpha(r)w(r)$ п.в. в (r_1, r_2). Пусть $C\colon = \int\limits_{A\cap\mathbb{D}} Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z) =$

$\int\limits_{r_1}^{r_2} \alpha^2(r)\cdot w(r)dr$. Применяя неравенство Иенсена с весом $w(r)$ в интервале $\Omega = (r_1, r_2)$, см. теорему 2.6.2 в [6], с выпуклой функцией $\varphi(t) = t^2$, и вероятностной мерой $\nu(E) = \frac{1}{I}\int\limits_E w(r)\,dr$, $E \subset \Omega$, получаем $\left(\fint \alpha^2(r)w(r)\,dr\right)^{1/2} \geq \fint \alpha(r)w(r)\,dr = \frac{1}{I}$, где мы также использовали тот факт, что $\eta(r) = \alpha(r)\,w(r)$ удовлетворяет соотношению (9) и что $I = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_1(r)}$. Следовательно, $C \geq \left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_1(r)}\right)^{-1}$, что и доказывает (8).

Теорема 1. *Пусть $Q : \mathbb{D} \to [0,\infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $z_0 \in \partial\mathbb{D}$, тогда и только тогда, когда*

$$M\ \left(\Delta\left(fC_1^*, fC_2^*, f\left(\mathbb{D}\cap A\right)\right)\right)\ \leq \left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_1(r)}\right)^{-1}, \tag{10}$$

для всех $0 < r_1 < r_2 < 2$, где $\|Q\|_1(r) = \int\limits_{\gamma_r} Q(z)|dz|$ – норма в L_1 функции Q над дугами $\gamma_r = \mathbb{D}\cap S(z_0, r)$, $C_1^* = S(z_0, r_1)\cap\mathbb{D}$ и $C_2^* = S(z_0, r_2)\cap\mathbb{D}$.

Замечание 1. Инфимум в выражении справа в (4) достигается для функции $\eta_0(r) = \frac{1}{\|Q\|_1(r)\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{\|Q\|_1(t)}}$.

3. Регулярные гомеоморфизмы.

Лемма 4. *Пусть $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ регулярный гомеоморфизм класса $W^{1,1}_{loc}$ и пусть $z_0 \in \partial\mathbb{D}$. Тогда*

$$M\ \left(\Delta\left(fC_1^*, fC_2^*, f\left(\mathbb{D}\cap A\right)\right)\right)\ \leq \left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|K_\mu^T\|_1(r)}\right)^{-1} \tag{11}$$

для любых $0 < r_1 < r_2 < 2$, где $\|K_\mu^T\|_1(r) = \int\limits_{\gamma_r} K_\mu^T(z, z_0)|dz|$ – норма в L_1 функции $K_\mu^T(z, z_0)$ над дугами $\gamma_r = \mathbb{D}\cap S(z_0, r)$, $C_1^* = S(z_0, r_1)\cap\mathbb{D}$ и $C_2^* = S(z_0, r_2)\cap\mathbb{D}$.

Доказательство. Пусть $\Gamma = \Delta(fC_1^*, fC_2^*, f\left(A\cap\mathbb{D}\right)$. Рассмотрим криволинейный четырехсторонник $R = \{z \in A\cap\mathbb{D} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Существует конформное отображение h, которое отображает образ криволинейного четырехсторонника fR на круговое полукольцо $R' = \{w : 1 < |w| < L, \operatorname{Im} w > 0\}$. Пусть Γ^* – семейство кривых, соединяющих граничные компоненты $|w| = 1$ и $|w| = L$ полукольца R'. Тогда, в силу конформной инвариантности модуля $M(\Gamma^*) = M(h\Gamma)$. Таким образом, $M(\Gamma^*) = \frac{\pi^2}{\int\limits_{R'}\frac{dudv}{|w|^2}}$, где $w = u + iv$. Для $g = h\circ f$ имеем, что $g \in W^{1,1}_{loc}\left(f\left(A\cap\mathbb{D}\right)\right)$, и потому отображение g является абсолютно непрерывным и дифференцируемым п.в.

на γ_r для п.в. $r \in (r_1, r_2)$, см., напр., [5]. Заметим, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \frac{J_g(z_0 + re^{i\theta})}{|g(z_0 + re^{i\theta})|^2} \, r \, dr \, d\theta \le \int\limits_{R'} \frac{du \, dv}{|w|^2} = \frac{\pi^2}{M(\Gamma^*)} \,, \tag{12}$$

где $\theta_1(r)$ и $\theta_2(r)$ – угловые координаты концов дуг γ_r, J_g – якобиан отображения g. Замена переменных здесь корректна в силу теоремы Лебега и теоремы Геринга-Лехто, см., напр., теорему III. 3.1 в [4], и леммы III. 3.2 в [4]. Для почти всех $r \in (r_1, r_2)$, имеем $\pi \le \int\limits_{\gamma_r} |d \, arg \, g| \le \int\limits_{\gamma_r} |d \, log \, g| = \int\limits_{\gamma_r} \frac{|dg(z)|}{|g(z)|} = \int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \frac{|g_\theta(z_0 + re^{i\theta})|}{|g(z_0 + re^{i\theta})|} \, d\theta$. Отсюда, применяя неравенство Коши-Шварца, получаем, что $\pi^2 \le \left(\int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \frac{|g_\theta(z_0 + re^{i\theta})|}{|g(z_0 + re^{i\theta})|} \, d\theta \right)^2 \le \int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \frac{|g_\theta(z_0 + re^{i\theta})|^2}{J(z_0 + re^{i\theta})} \, d\theta \int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \frac{J(z_0 + re^{i\theta})}{|g(z_0 + re^{i\theta})|^2} d\theta$, т.е.

$$\frac{\pi^2}{\int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \frac{|g_\theta(z_0 + re^{i\theta})|^2}{rJ(z_0 + re^{i\theta})} d\theta} \le r \int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \frac{J(z_0 + re^{i\theta})}{|g(z_0 + re^{i\theta})|^2} d\theta \,.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по $r \in (r_1, r_2)$, имеем

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \frac{|g_\theta(z_0 + re^{i\theta})|^2}{rJ(z_0 + re^{i\theta})} d\theta} \le \pi^{-2} \int\limits_{r_1}^{r_2} r \int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \frac{J(z_0 + re^{i\theta})}{|g(z_0 + re^{i\theta})|^2} d\theta \, dr. \tag{13}$$

Наконец, комбинируя последнее неравенство с (12), имеем, что

$$M \ (\Gamma^*) \ \le \left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \frac{|g_\theta(z_0 + re^{i\theta})|^2}{rJ(z_0 + re^{i\theta})} d\theta} \right)^{-1} , \tag{14}$$

и так как модуль семейства кривых является конформным инвариантом, получаем (11).

Теперь, комбинируя предыдущие леммы 1, 2 и 4, получаем следующее заключение.

Теорема 2. *Пусть $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{loc}$. Тогда f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ с $Q(z) = K^T_\mu(z, z_0)$.*

Следствие 1. *Пусть $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ – регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{loc}$. Тогда f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0\in\partial\mathbb{D}$ с $Q(z)=K_\mu(z)$.*

4. О гомеоморфном продолжении на границу. Граничную терминологию см. в [7].

Лемма 5. *Пусть $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ – регулярный гомеоморфизм такой, что*

$$\int\limits_{\mathbb{D}(z_0,\varepsilon)} K^T_\mu(z,z_0)\cdot\psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z-z_0|)\,dx\,dy \;=\; o(I^2_{z_0}(\varepsilon)) \tag{15}$$

при $\varepsilon\to 0$, где $\mu(z)=\mu_f(z)$, $z_0\in\partial\mathbb{D}$, $D(z_0,\varepsilon)=\{z\in\mathbb{D}:\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon(z_0)\}$, $\varepsilon(z_0)\in(0,1)$, и $\psi_{z_0,\varepsilon}(t)$ – семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0,\infty)$ таких, что $0<I_{z_0}(\varepsilon)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi_{z_0,\varepsilon}(t)\,dt<\infty\quad\forall\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Тогда f продолжим в точку z_0 по непрерывности.

Доказательство. Покажем, что предельное множество $E=C(z_0,f)$ состоит из единственной точки. Отметим, что $E\neq\emptyset$ ввиду компактности $\overline{\mathbb{D}}$, а $\partial\mathbb{D}$ сильно достижима в любой точке $w_0\in E$. Допустим, что существует хотя бы еще одна точка $w^*\in E$. Пусть $U=B(w_0,r_0):=\{w\in\mathbb{C}:|w-w_0|<r_0\}$, где $0<r_0<d(w_0,w^*)$, и $D_m=\{z\in\mathbb{D}:\ |z-z_0|<\frac{1}{m}\}$, $m=1,2,\ldots$. Тогда найдутся точки w_m и $w^*_m\in F_m=fD_m$, близкие к w_0 и w^*, соответственно, для которых $|w_0-w_m|<r_0$ и $|w_0-w^*_m|>r_0$. Точки w_m и w^*_m можно соединить непрерывными кривыми C_m в областях F_m. По построению ${}_m\cap\partial B(w_0,r_0)\neq\emptyset$ ввиду связности C_m. Поскольку $\partial\mathbb{D}$ является сильно достижимой, найдется компакт $C\subset\mathbb{D}$ и число $\delta>0$ такие, что $M(\Delta(C,C_m,\mathbb{D}))\geq\delta$ для больших m, поскольку $\operatorname{dist}(w_0,C_m)\to 0$ при $m\to\infty$. Заметим, что $K=f^{-1}(C)$ является компактом как непрерывный образ компакта. Таким образом, $\varepsilon_0=\operatorname{dist}(z_0,K)>0$. Пусть Γ_ε – семейство всех непрерывных путей в $\mathbb{D}$, соединяющих круг $B_\varepsilon=D(z_0,\varepsilon)=\{z\in\mathbb{D}:|z-z_0|<\varepsilon\}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, с компактом K. Тогда функция

$$\eta_\varepsilon(t)\;=\;\begin{cases}\psi_{z_0,\varepsilon}(t)/I_{z_0}(\varepsilon), & t\in(\varepsilon,\varepsilon_0),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\backslash(\varepsilon,\varepsilon_0)\end{cases}$$

удовлетворяет условию $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\eta_\varepsilon(t)\,dt=1$. Следовательно, по леммам 1, 2 и 4, $M\ (\Gamma^*_\varepsilon)\ \leq\int\limits_{A\cap\mathbb{D}}Q(x)\cdot\eta^2_\varepsilon(|z-z_0|)\ dm(z)$, где $\Delta\left(fC^*_\varepsilon,fC^*_{\varepsilon_0},fA\right)$, $A=A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)=\{z\in\mathbb{C}:\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0\}$, $C^*_1=S(z_0,\varepsilon)\cap\mathbb{D}$ и $C^*_2=S(z_0,\varepsilon_0)\cap\mathbb{D}$. Таким образом, ввиду минорирования $\Gamma^*_\varepsilon<\Gamma_\varepsilon$, эквивалентно $f\Gamma^*_\varepsilon<f\Gamma_\varepsilon$, мы имеем, что $M(\Gamma_\varepsilon)\leq M(\Gamma^*_\varepsilon)$ и поэтому $M\left(\Gamma_\varepsilon\right)\ \to 0$ при $\varepsilon\to 0$ по условию (15). С другой стороны, для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ при больших m имеет место включение $D_m\subset B_\varepsilon$ и потому $C_m\subset fB_\varepsilon$. Следовательно, $M(f\Gamma_\varepsilon)\geq M(\Delta(C,{}_m;\mathbb{D}))\geq\delta>0$. Полученное противоречие опровергает предположение, что предельное множество E является невырожденным.

Лемма 6. *Пусть $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ – регулярный гомеоморфизм с $K_\mu\in L^1(\mathbb{D})$, где $\mu=\mu_f$. Тогда $C(z_1,f)\cap C(z_2,f)=\emptyset\quad\forall\ z_1,z_2\in\partial\mathbb{D},\ z_1\neq z_2$.*

Доказательство. Пусть ${}_i = C(z_i, f)$, $i = 1, 2$, и $\delta = |z_1 - z_2|$. Предположим, что $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. Пусть $W_1 = \mathbb{D} \cap D_1$ и $W_2 = \mathbb{D} \setminus \overline{D}_2$, где $D_1 = D(z_1, \frac{\delta}{3})$ и $D_2 = D(z_1, \frac{2\delta}{3})$. Для функции

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{3}{\delta}, & t \in \left(\frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3}\right), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3}\right) \end{cases}$$

имеем, что $\int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2\delta}{3}} \eta(t)\, dt = 1$, и по следствию 1, $M\left(\Delta\left(fC_1, fC_2, \mathbb{D}\right)\right) \leq \int\limits_{A \cap \mathbb{D}} K_\mu(x) \cdot \eta^2(|z - z_0|)\, dm(z) \leq \frac{9}{\delta^2} \int\limits_{\mathbb{D}} K_\mu(z)\, dm(z) < \infty$, поскольку $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$, для произвольных континуумов C_1 и C_2 в $\mathbb{D}$, которые принадлежат различным компонентам дополнения кольца $A = A\left(z_1, \frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3}\right)$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Последняя оценка противоречит, однако, условию слабой плоскости границы единичного круга $\mathbb{D}$, если найдется $w_0 \in E_1 \cap E_2$. Действительно, тогда $w_0 \in \overline{fW_1} \cap \overline{fW_2}$ и в областях $W_1^* = fW_1$ и $W_2^* = fW_2$ найдется по непрерывной кривой, пересекающей любые наперед заданные сферы $\partial B(w_0, r_0)$ и $\partial B(w_0, r_*)$ с достаточно малыми радиусами r_0 и r_*. Поэтому предположение, что $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ было неверным.

Следствие 2. *Для любого регулярного гомеоморфизма* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *с* $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$, *обратный гомеоморфизм* f^{-1} *продолжим по непрерывности на границу* $\partial\mathbb{D}$.

Таким образом, комбинируя леммы 5 и 6, получаем следующее заключение.

Лемма 7. *Любой регулярный гомеоморфизм* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *продолжим до гомеоморфизма* $\overline{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$, *если* $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$ *и* $K_\mu^T(z, z_0)$ *удовлетворяет условию (15) в каждой точке* $z_0 \in \partial\mathbb{D}$, *где* $\mu(z) = \mu_f(z)$.

5. Теоремы существования решений задачи Дирихле. Любая аналитическая функция f в области D удовлетворяет простейшему уравнению Бельтрами $f_{\overline{z}} = 0$, когда $\mu(z) \equiv 0$. Если аналитическая функция f задана в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и непрерывна в его замыкании, то по формуле Шварца, см., напр., § 8, Гл. III часть 3 в [2], с. 346, $f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} f(\zeta) \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta}$ и, таким образом, аналитическая функция f в единичном круге $\mathbb{D}$ определяется с точностью до чисто мнимого числа ic, $c = \operatorname{Im} f(0)$, её реальной частью $\varphi(\zeta) = \operatorname{Re} f(\zeta)$ на границе единичного круга. Поэтому под задачей Дирихле для уравнения Бельтрами (1) в области $D \subset \mathbb{C}$ мы будем понимать проблему нахождения непрерывной функции $f : D \to \mathbb{C}$, имеющей частные производные первого порядка п.в., удовлетворяющей (1) п.в. и такой, что

$$\lim_{z \to \zeta} \operatorname{Re} f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall \quad \zeta \in \partial D \tag{16}$$

для предписанной непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$. Очевидно, что если f – решение такой задачи, то и функция $F(z) = f(z) + ic$, для любой постоянной $c \in \mathbb{R}$, также является её решением. Под **регулярным решением** задачи Дирихле (2) с $\varphi(\zeta) \equiv c$, $\zeta \in \partial D$, для уравнения Бельтрами (1) будем понимать функцию $f(z) \equiv c$, $z \in D$. Если же $\varphi(\zeta) \not\equiv const$, то под регулярным решением такой задачи будем понимать непрерывное дискретное и открытое отображение $f : D \to \mathbb{C}$ класса

Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ п.в., удовлетворяющее условию (16) и п.в. (1). Если $D = \mathbb{D}$, то мы дополнительно будем предполагать, что $\operatorname{Im} f(0) = 0$.

Лемма 8. *Пусть $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – измеримая функция. Если $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$ и $K_\mu^T(z, z_0)$ удовлетворяет условию (15) в каждой точке $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$, то уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение f задачи Дирихле (16) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. По теореме Стоилова о факторизации, любое непрерывное открытое дискретное отображение $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ может быть представлено в виде

$$f \;=\; h \circ g\,, \tag{17}$$

где g – гомеоморфизм $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$, а h – аналитическая функция в $\mathbb{D}$. Поэтому регулярное решение задачи Дирихле (16) ищем в виде (17). По лемме 5.1 в [9] и теореме Римана следует существование регулярного гомеоморфизма $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $g(0) = 0$, который продолжим по лемме 7 до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{\mathbb{D}}$. По формулам Шварца и Пуассона, см., напр., § 8 и 10, Гл. III часть 3 в [2], искомая аналитическая функция h из (3) с $\operatorname{Im} h(0) = 0$ восстанавливается в $\mathbb{D}$ по её действительной части на границе, $h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} f \circ g^{-1}(\zeta) \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}$.

Теорема 3. *Пусть $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – измеримая функция такая, что K_μ имеет BMO мажоранту. Тогда при любой непрерывной функции $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (16).*

Эта теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 4. *Пусть $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – измеримая функция такая, что*

$$K_\mu(z) \;=\; \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \quad \leq \quad Q(z) \in FMO\left(\overline{\mathbb{D}}\right)\,. \tag{18}$$

Тогда уравнение (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (16) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$.

Замечание 2. Поскольку $W^{1,2}(\mathbb{D}) \subset VMO(\mathbb{D})$, см., напр., [1], имеем следующее. Если вместо (18) потребовать, чтобы $K_\mu(z) \leq Q(z) \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{D})$, то заключение предыдущей теоремы остается в силе. Более того, в этом случае $f \in W_{loc}^{1,2}$. Определения и свойства BMO, VMO, FMO см., напр., в [3] и [9].

Следствие 3. *Пусть $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – измеримая функция такая, что $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}} \;⨍_{\mathbb{D}(z_0,\varepsilon)} K_\mu(z)\, dxdy < \infty \quad \forall\, z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$. Тогда уравнение (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (16) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$.*

Следствие 4. *Пусть $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – измеримая функция такая, что $k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \forall z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ при $\varepsilon \to 0$, где $k_{z_0}(\varepsilon)$ – среднее интегральное значение функции K_μ на $\mathbb{D} \bigcap S(z_0, \varepsilon)$. Тогда (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (16) для любой непрерывной функции $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$.*

Замечание 3. *В частности, это так, если при* $z \to z_0$ $K_\mu(z) = O\left(\log \frac{1}{|z-z_0|}\right)$ $\forall$ $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$.

Теорема 5. *Пусть* $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *– измеримая функция с* $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$ *такая, что* $\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{\|K_\mu\|_1(r)} = \infty$ $\forall$ $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$, *где* $\|K_\mu\|_1(z_0, r) = \int\limits_{\gamma_r} K_\mu(z)|dz|$ *– норма в* L_1 *функции* K_μ *над дугами окружностей* $\gamma_r = \mathbb{D} \cap S(z_0, r)$, $0 < \delta(z_0) < 1$. *Тогда уравнение (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (16) для любой непрерывной функции* $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$.

6. Примеры в задаче Дирихле для уравнения Бельтрами. Пусть $\mu(z) = k(|z|)\frac{z}{\bar{z}}$, где $k(\tau) : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ – измеримая функция такая, что $\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1+k(\tau)}{1-k(\tau)} \frac{d\tau}{\tau} < \infty$ $\forall\, \varepsilon \in (0, 1)$ и $\int\limits_0^1 \frac{1+k(\tau)}{1-k(\tau)} \frac{d\tau}{\tau} = \infty$. Тогда регулярное решение задачи Дирихле (16) для уравнения Бельтрами (1) имеет явный вид:

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \mathrm{Re}\, \varphi(\zeta) \cdot \frac{\zeta + \omega(z)}{\zeta - \omega(z)} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}\,, \tag{19}$$

где $\omega(z) = \frac{z}{|z|} \exp\left(- \int\limits_{|z|}^1 \frac{1+k(\tau)}{1-k(\tau)} \frac{d\tau}{\tau} \right)$.

1. *Brezis H., Nirenberg L.* Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries // Selecta Math. (N.S.). – **1,** no 2. – 1995. – P.197-263.
2. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций, Москва: Наука, 1968.
3. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. матем. вестник. – **2**, №3. – 2005. – P.395–417.
4. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane, New York etc.: Springer, 1973.
5. *Maz'ya V.* Sobolev classes, Berlin-New York: Springer, 1985.
6. *Ransford Th.* Potential Theory in the Complex Plane, Cambridge: C. Univ. Press, 1995.
7. *Ryazanov V., Salimov R.* Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory // Ukrainian Math. Bull. – **4**, no 2. – 2007. – P.199-234.
8. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. d'Anal. Math. – **96**. – 2005. – P.117-150.
9. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Ukrainian Math. Bull. – **4**, no 1. – 2007. – P.79-115.
10. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On convergence theory for Beltrami equations // Ukr. Math. Bull. – **5,** no 4. – 2008. – P.524-535.
11. *Ziemer W.P.* Extremal length and p–capasity // Michigan Math. J. – **16.** – 1969. – P.43-51.

С.-Петербургский государственный технический ун-т
dybov2009@rambler.ru, dip57@inbox.ru,
yury@pro-face.ru, yury@pro-face.dk

Получено 27.02.09