ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2009. Том 18

УДК 531.38

©2009. **Н.В. Дергачева**

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ УСИЛИЙ И МОМЕНТОВ ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОМ ТЕПЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

С помощью найденных ранее фундаментальных решений уравнений термоупругости построена фундаментальная матрица усилий и моментов для пологих ортотропных оболочек произвольной гауссовой кривизны. Описана методика поиска этих матриц и исследована зависимость усилий и моментов от геометрических параметров оболочек.

Введение. В связи с необходимостью расчета элементов тонкостенных конструкций при тепловых нагревах во время сварки [1] в последние годы интенсивно развиваются методы исследования термоупругого состояния таких элементов.

В данной работе проводится исследование решения для усилий и моментов при сосредоточенном тепловом воздействии. Температурная задача для пологих изотропных оболочек решена как для оболочек частного вида (сферических, цилиндрических) [2, 3], так и для оболочек положительной гауссовой кривизны [4]. В работе [5] построено фундаментальное решение уравнений термоупругого равновесия пологих ортотропных оболочек в перемещениях. Сосредоточенное температурное воздействие предполагает отличное от нуля значение интегральных характеристик температуры лишь в одной точке срединной поверхности, и необходимость в решении задачи теплопроводности отпадает.

В данной статье для нахождения фундаментальной матрицы усилий и моментов использован подход, основанный на двумерном интегральном преобразовании Фурье и теории функций комплексных переменных [6]. Рассмотренный метод позволил найти решение для интегралов комплексных переменных и получить фундаментальное решение для усилий и моментов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую пологую оболочку толщиной $2h$ произвольной гауссовой кривизны. Определение термоупругого состояния заданной оболочки сводится к решению системы уравнений [5, 6]

$$\sum_{j=1}^{3} L_{ij} u_j = -X_i (i = \overline{1,3}), \tag{1}$$

в которой $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ – компоненты вектора перемещений; L_{ij} – известные дифференциальные операторы [5]. При этом, если распределение температуры по толщине является четной функцией, то

$$X_1 = -\frac{\alpha_t^{(1)}\kappa^2 + \nu\alpha_t^{(2)}}{\kappa^2}\frac{\partial}{\partial x}t_1;$$

$$X_2 = -\frac{\alpha_t^{(2)} + \nu\kappa^2\alpha_t^{(1)}}{\kappa^2}\frac{\partial}{\partial y}t_1;$$

$$X_3 = \frac{1}{hR_2\kappa^2}\left[\alpha_t^{(1)}\kappa^2(\nu + \lambda\kappa^2) + \alpha_t^{(2)}(1 + \lambda\kappa^2\nu)\right]t_1, \tag{2}$$

а в случае температуры, заданной нечетной функцией,

$$X_1 = 0;$$

$$X_2 = 0;$$

$$X_3 = -\frac{1}{6\kappa^2}\left[\frac{\alpha_t^{(1)}\kappa^2 + \nu\alpha_t^{(2)}}{\kappa^3}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\alpha_t^{(2)} + \nu\kappa^2\alpha_t^{(1)}}{\kappa}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]t_2, \tag{3}$$

здесь $\nu = \sqrt{\nu_1\nu_2}$, $\nu_1\nu_2$ – коэффициенты Пуассона вдоль главных осей ортотропии; $\lambda = R_2/R_1$, R_1, R_2 – кривизна и радиусы кривизны оболочки вдоль главных осей ортотропии; $\alpha_t^{(1)}$, $\alpha_t^{(2)}$ – температурные коэффициенты линейного расширения; t_1, t_2 – интегральные характеристики температуры. Поскольку рассматривается случай сосредоточенного теплового воздействия, дельта-функция Дирака записывается вместо средней температуры и температурного момента в правых частях системы дифференциальных уравнений термоупругости ортотропных оболочек (1). Действие средней температуры в этой точке моделирует "плоское" температурное воздействие, а действие температурного момента – "изгибное" температурное воздействие. Интегральные характеристики температуры, стоящие в правой части уравнения термоупругого равновесия (1), определяются по формулам:

$$t_1 = \mu_0\delta(\kappa x, y)\,, \;\; t_2 = \mu_1\delta(\kappa x, y)\,; \tag{4}$$

где δ – двумерная дельта-функция Дирака; μ_0, μ_1 – интенсивность "плоского" и "изгибного" сосредоточенного воздействия. Их размерность есть [градусы x площадь].

2. Метод решения. Для исследования напряженно-деформированного состояния оболочки будем использовать научные расчеты фундаментальных решений [5]. Подставим фундаментальне решения для перемещений в физические уравнения [6]. После упрощений получим фундаментальные выражения для усилий и моментов в пространстве трансформант. Для нахождения усилий $T_{x,y}$ в случае "плоского" теплового воздействия и моментов $M_{x,y}$ в случае "изгибного" теплового воздействия была использована теория вычетов [9]. Остальные результаты в статье получены с помощью двумерного преобразования Фурье [10]. Формулы для трансформант усилий $T_{x,y}$ в случае "плоского" теплового воздействия и моментов $M_{x,y}$ в случае "изгибного" теплового воздействия состоят из двух слагаемых: плоской и оболочечной части.

Для "плоского" сосредоточенного теплового воздействия:

$$\bar{T}_x^{(0)} = \frac{Ehk^4\mu_0(1-\mu)^2}{2\pi\kappa a^3}\frac{\eta^2(\alpha_t^{(2)}\xi^2 + \alpha_t^{(1)}\kappa^2\eta^2)(\xi^2 + \lambda\kappa^2\eta^2)^2}{\Delta_1\Delta_2} -$$

$$-\frac{Eh\mu_0(1-\mu)}{2\pi\kappa a}\frac{\eta^2\left(\alpha_t^{(1)}\kappa^2\eta^2+\alpha_t^{(2)}\xi^2\right)}{\Delta_1}$$

$$\bar{T}_y^{(0)}=\frac{Ehk^4\mu_0\,(1-\mu)^2}{2\pi\kappa^3a^3}\frac{(\alpha_t^{(2)}\xi^2+\alpha_t^{(1)}\kappa^2\eta^2)(\xi^2+\lambda\kappa^2\eta^2)^2\xi^2}{\Delta_1\Delta_2}- \tag{5}$$

$$-\frac{Eh\mu_0\,(1-\mu)}{2\pi\kappa^3a}\frac{\xi^2\left(\alpha_t^{(1)}\kappa^2\eta^2+\alpha_t^{(2)}\xi^2\right)}{\Delta_1}.$$

В случае "изгибного" сосредоточенного теплового воздействия компоненты имеют вид:

$$\bar{M}_x^{(1)}=\frac{D\mu_1\Delta_1}{\pi\kappa ha\Delta_2}\left[\left(\xi^2+\nu\eta^2\right)\left[(\,\alpha_t^{(1)}\,\kappa^2+\alpha_t^{(2)}\nu\,)\,\xi^2\;+(\alpha_t^{(1)}\nu\kappa^2+\alpha_t^{(2)})\eta^2\right]\right]-$$

$$-\frac{D\mu_1}{\pi\kappa h}(\alpha_t^{(1)}\kappa^2+\alpha_t^{(2)}\nu);$$

$$\bar{M}_y^{(1)}=\frac{D\mu_1\Delta_1}{\pi\kappa^3ha\Delta_2}\left[\left(\eta^2+\nu\xi^2\right)\left[(\,\alpha_t^{(1)}\,\kappa^2+\alpha_t^{(2)}\nu\,\,)\,\xi^2\;+(\alpha_t^{(1)}\nu\kappa^2+\alpha_t^{(2)})\eta^2\right]\right]- \tag{6}$$

$$-\frac{D\mu_1}{\pi\kappa^3h}(\alpha_t^{(1)}\kappa^2\nu+\alpha_t^{(2)}),$$

где

$$\Delta_1=(\xi^2+\eta^2)^2-\tilde{\mu}(1+\nu)(\xi^2-\eta^2)^2$$

$$\Delta_2=\left[(\xi^2+\eta^2)^2+\tilde{\mu}(1-\nu)(\xi^2-\eta^2)^2\right]\Delta_1+\frac{(1-\mu)}{a^2}\frac{12(1-\nu^2)}{R_y^2h^2}(\xi^2+\lambda\kappa^2\eta^2)^2,$$

$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $2a=2-\mu+\mu\nu$, $\kappa^4=\nu_x/\nu_y=E_x/E_y$, E_x,E_y – модули Юнга вдоль главных осей ортотропии, $\mu=\frac{E-2G_{xy}(1+\nu)}{E}$, $E=\sqrt{E_xE_y}$, где G_{xy} – модуль сдвига в срединной плоскости.

Рассмотрим более подробно методику нахождения решения на примере усилия $T_x^{(0)}$ при "плоском" сосредоточенном воздействии. Перейдем в пространство оригиналов с помощью двумерного преобразования Фурье:

$$T_x^{(0)}=\frac{Ehk^4\mu_0(1-\mu)^2}{4\pi^2\kappa a^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta^2(\alpha_t^{(2)}\xi^2+\alpha_t^{(1)}\kappa^2\eta^2)(\xi^2+\lambda\kappa^2\eta^2)^2}{\Delta_1\Delta_2}e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta-$$

$$-\frac{Eh(1-\mu)\mu_0}{4\pi^2\kappa a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta^2\left[\alpha_t^{(1)}\kappa^2\eta^2+\alpha_t^{(2)}\xi^2\right]}{\Delta_1}e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta. \tag{7}$$

Для первого слагаемого мы перейдем к полярной системе координат и воспользуемся методикой получения оригиналов, описанной в [5–7]. Для второго воспользуемся теорией вычетов [9]. В результате аналитических преобразований для второго слагаемого были получены комплексные интегралы вида:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos\xi x d\xi}{[(\xi^2+\eta^2)^2-b(\xi^2-\eta^2)^2]} = \pi i \sum_{\operatorname{Im} z\geqslant 0} Res\left[F\left(z\right)e^{ixz}\right];$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\xi^2\cos\xi x d\xi}{[(\xi^2+\eta^2)^2-b(\xi^2-\eta^2)^2]} = \pi i z^2 \sum_{\operatorname{Im} z\geqslant 0} Res\left[F\left(z\right)e^{ixz}\right], \tag{8}$$

где

$$F(z)=\frac{1}{[(z^2+\eta^2)^2-b(z^2-\eta^2)^2]},$$

$b=\tilde{\mu}(1+\nu)$, $\tilde{\mu}=\frac{\mu}{2a}$.

Были рассмотрены два случая, в зависимости от коэффициента ортотропии μ. Случай, когда $\mu>0$, $\mu=0$ – случай так называемой приведенной ортотропии и изотропии. В качестве примера приведем полученные в результате применения теории вычетов значения интегралов (8) для случая, когда $\mu>0$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos(\xi x)\,d\xi}{[(\xi^2+\eta^2)^2-b(\xi^2-\eta^2)^2]} = -\frac{\sqrt{1-b}}{\eta^3 8\sqrt{b}}\left(\left(1-\sqrt{b}\right)e^{-x\eta\frac{1+\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}}}-\left(1+\sqrt{b}\right)e^{-x\eta\frac{1-\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}}}\right);$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\xi^2\cos(\xi x)\,d\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2-b\left(\xi^2-\eta^2\right)^2} = \frac{\sqrt{1-b}}{\eta 8\sqrt{b}}\left(\left(1+\sqrt{b}\right)e^{-x\eta\frac{1+\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}}}-\left(1-\sqrt{b}\right)e^{-x\eta\frac{1-\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}}}\right). \tag{9}$$

Подставим полученные интегралы (9) в (7), тогда получим после упрощений окончательные выражения

$$T_{x,y}^{(0)}(r,\varphi) = -\frac{Ehk^2\mu_0(1-\mu)}{4\pi^2\begin{pmatrix}\kappa\\ \kappa^3\end{pmatrix}a}\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\cos(2n\varphi)\times \tag{10}$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t_{mn}}{m!}G_{n,n+m}(\zeta\sqrt{i})+I_{x,y}$$

$$I_{x,y}=\mp\frac{Eh(1-\mu)\left(1-b^2\right)\sqrt{1-b^2}\mu_0}{8b\pi^2\kappa a}\left[\left(\frac{\alpha_t^{(1)}\kappa^2\left(1+b\right)-\alpha_t^{(2)}\left(1-b\right)}{(1-b)}\right)\times\right.$$

$$\times \frac{\cos 2\varphi \mp b}{r^2 (1 \mp b \cos 2\varphi)^2} \mp \left(\frac{\alpha_t^{(2)} \ (1+b) - \alpha_t^{(1)} \kappa^2 (1-b)}{(1+b)} \right) \frac{\cos 2\varphi \pm b}{r^2 (1 \pm b \cos 2\varphi)^2} \right].$$

Для моментов при "изгибном" тепловом нагреве использована та же методика

$$M_{x,y}^{(1)} = -\frac{E\mu_1 (1+v)^2 (\alpha_t^{(1)} \ \kappa^2 + \alpha_t^{(2)} \ )}{4\pi^2 R_2^2 \begin{pmatrix} \kappa \\ \kappa^3 \end{pmatrix} k^2} \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \times \quad (11)$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m'_{mn}(\lambda)}{m!} G_{n,n+m}(\zeta\sqrt{i}) + J_{x,y}$$

$$J_x = \frac{D(1-\nu)\mu_1}{4\pi ch\kappa a} \left(\left(\alpha_t^{(2)} \left(2\nu\mu + (1-\nu)\right) - 2\alpha_t^{(1)} \kappa^2 (1-\mu) \right) - \frac{\alpha_t^{(1)} \kappa^2 (1+\nu)}{(c^2+d^2)} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{c^2 \cos^2\varphi - (\sin\varphi - \cos\varphi d)^2}{\mathrm{r}^2 \left((\sin\varphi - \cos\varphi d)^2 +^2 \cos^2\varphi \right)^2} + \frac{c^2 \cos^2\varphi - (\sin\varphi + \cos\varphi d)^2}{\mathrm{r}^2 \left((\sin\varphi + \cos\varphi d)^2 + c^2 \cos^2\varphi \right)^2} \right) -$$

$$-\frac{D(1-\nu)\mu_1}{4\pi dha\kappa} \left(\left(\alpha_t^{(2)} \left(2\nu\mu + (1-\nu)\right) - 2\alpha_t^{(1)} \kappa^2 (1-\mu) \right) + \frac{\alpha_t^{(1)} \kappa^2 (1+\nu)}{(c^2+d^2)} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{c\cos\varphi(\cos\varphi d - \sin\varphi)}{\mathrm{r}^2 \left((\sin\varphi - \cos\varphi d)^2 + c^2 \cos^2\varphi \right)^2} + \frac{c\cos\varphi\,(\sin\varphi + \cos\varphi d)}{\mathrm{r}^2 \left((\sin\varphi + \cos\varphi d)^2 + c^2 \cos^2\varphi \right)^2} \right),$$

где

$$t_{mn}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \left(\frac{1+\lambda x^2}{2} \frac{(1+2\gamma\cos 2\theta)}{\sqrt{\Delta_5}} \right)^{l+n+1} \left(\sqrt{\frac{1-\mu}{a^2}} \right)^{l+n+1} \times$$

$$\times \frac{(1 \mp \cos 2\theta) \left(\left(\alpha_t^{(1)} \kappa^2 + \alpha_t^{(2)} \right) - \left(\alpha_t^{(1)} \kappa^2 - \alpha_t^{(2)} \right) \cos 2\theta \right) \cos(2n\theta)}{[1 - 4\tilde{\mu}(1+\nu)\cos^2 2\theta]} d\theta;$$

$$m'_{mn}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \left(\frac{1+\lambda\kappa^2}{2} \frac{(1+2\gamma\cos 2\theta)}{\sqrt{\Delta_5}} \right)^{l+n+1} \left(\sqrt{\frac{1-\mu}{a^2}} \right)^{l+n+1} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \frac{(\alpha_t^{(1)} \kappa^2 - \alpha_t^{(2)})}{(\alpha_t^{(1)} \kappa^2 + \alpha_t^{(2)})} \cos 2\theta \right] \frac{\left(1 \pm \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \cos 2\theta \right)}{[1 + \tilde{\mu}(1-\nu)\cos^2 2\theta]} \cos 2n\theta d\theta$$

где

$$c = \sqrt{a}, \zeta = kr, d = \sqrt{\frac{\mu(1-\nu)}{2}},$$

$$\Delta_5 = \left[1 + \tilde{\mu}(1-\nu)\cos^2 2\theta\right]\left[1 - \tilde{\mu}(1+\nu)\cos^2 2\theta\right].$$

Таким образом, в статье получена фундаментальная матрица температурных усилий и моментов при сосредоточенном тепловом нагреве. Полученное решение можно использовать для исследования усилий и моментов при распределенном тепловом воздействии, применяя формулу сверток. На основе полученных формул (10), (11) для усилий и моментов $T^{(0)}_{x,y}$, $M^{(1)}_{x,y}$ были проведены расчеты и исследовано влияние геометрических параметров оболочки на поведение усилий и моментов по мере удаления от точки приложения сосредоточенного теплового воздействия (рис.1). На рисунке представлены результаты численных расчетов в виде графиков зависимости усилий от r/h при $\varphi = \pi/2$.

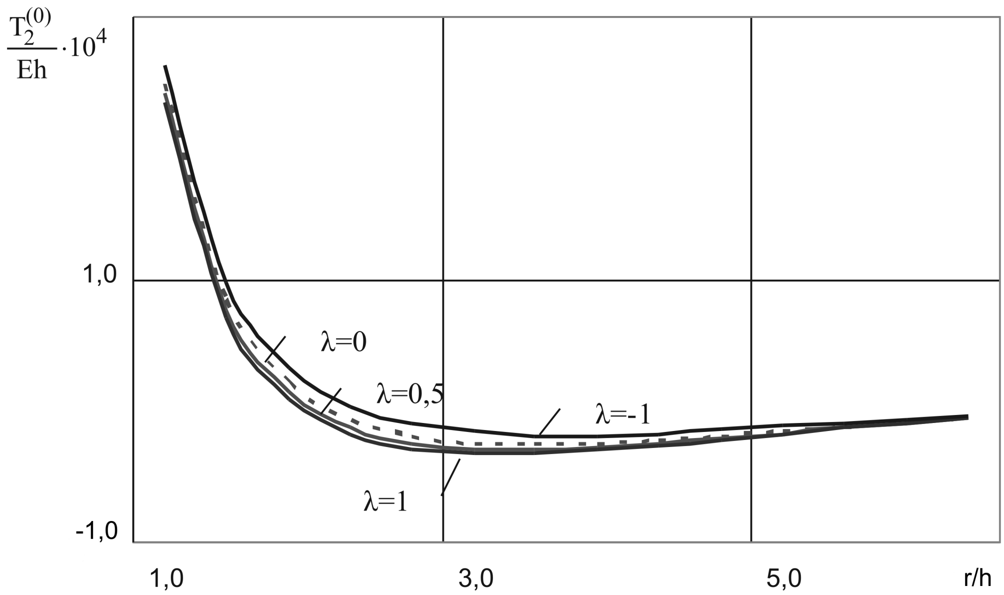

Рис. 1. Усилие при "плоском" тепловом воздействии

Обобщая полученные результаты, можно сделать вывод о том, что при расчете термоупругого состояния тонкостенных элементов конструкций, применив интегральные преобразования Фурье, теорию расчета комплексных интегралов, можно найти решение в аналитическом виде. На основе полученного решения можно не только проводить численное исследование, но и использовать результаты для решений задач о распределенном тепловом воздействии.

1. *Рыкалин Н.Н.* Расчеты тепловых процессов при сварке. – М.: Машгиз., 1951. – 296с.
2. *Лукасевич С.* Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. – М.: Мир, 1982. – 544с.
3. *Ярема С.Я.* Решение температурной задачи для пологой сферической оболочки в случае сосредоточенного воздействия// Инст. машиновед. и автом. Научные записки. – 1964. – Вып.9. – С.80-89.

4. *Шевченко В.П.* К температурной задаче пологих оболочек // Тр. VII всесоюзн. конферен. по теории оболочек и пластин. – 1970. – С.610-613.
5. *Шевченко В.П., Дергачева Н.В.* Фундаментальные решения уравнений термоупругого равновесия пологих ортотропных оболочек // Механика твердого тела. – 2005. – Вып.35. – С.160-166.
6. *Шевченко В.П.* Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998 – С.205-207. (Механика композитов: В 12т.; т.7).
7. *Шевченко В.П.*Фундаментальное решение температурной задачи для ортотропных оболочек // Прикл. механика. – 1977. – Вып.10. – С.59-66.
8. *Подстригач Я.С., Ярема С.Я.* Температурные напряжения в оболочках – Киев: Изд АН УРСР, 1961. – 212с.
9. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. – М.: Мир – 1967. – 304с.
10. *Шевченко В.П.* Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек: Учебное пособие. – Донецк: ДонГУ, 1977. – 116с.

Донецкий национальный ун-т
nadegda.dergacheva@gmail.com

Получено 19.05.08