УДК 531.38

©2009. **Г.В. Горр, А.В. Зыза**

О РЕДУКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДВУХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

На основе подхода П.В.Харламова [1, 2] выполнена редукция дифференциальных уравнений движения гиростата в двух задачах динамики твердого тела. Первая задача – задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (потенциальные силы обусловлены силой тяжести и действием магнитного поля на намагниченный гиростат, гироскопические силы характеризуются силой Лоренца, которая возникает в результате действия магнитного поля на движущийся заряженный гиростат). Уравнениями движения гиростата в данной задаче являются уравнения класса Кирхгофа [3].

Вторая задача – задача о движении тяжелого гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, который состоит в том, что первоначально ненамагниченные и сверхпроводящие твердые тела при движении в магнитном поле намагничиваются вдоль оси вращения. Механический момент тела, возникающий при вращении, линейно зависит от его угловой скорости [4–6].

Введение. Особенностями многих задач динамики твердого тела и гиростата являются нелинейность правых частей дифференциальных уравнений движения и наличие в них большого числа параметров. Например, уравнения класса Кирхгофа [3], которые являются обобщением уравнений Эйлера, содержат 21 параметр и нелинейны относительно основных переменных. В ряде случаев можно найти дополнительный к классическим интеграл и применить теорию последнего интегрирующего множителя Якоби [2].

Применение других методов интегрирования уравнений движения в динамике твердого тела (метода малого параметра, построение решений в виде рядов, численного интегрирования и др.) не дает возможности получить конструктивного решения для всего множества параметров задачи. В связи с этим в динамике твердого тела большое значение имеет построение частных решений уравнений движения [2, 7–9].

Как показано в работах [2, 8–12] эффективным подходом в построении решений уравнений динамики является новая форма уравнений движения. Так, благодаря новым формам уравнений движения гиростата с неподвижной точкой, П.В.Харламов, Е.И.Харламова, Г.В.Мозалевская и другие получили новые частные решения уравнений движения гиростата.

В данной работе с помощью метода, используемого П.В.Харламовым [2] в задаче о движении гиростата с неподвижной точкой, выполнена редукция уравнений движения тяжелого гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и уравнений движения тяжелого гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

1. Понижение порядка дифференциальных уравнений движения тяжелого гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Рассмотрим задачу о движении тяжелого гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями Кирхгофа-Пуассона [3]:

$$A \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = (A \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B \cdot \boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс; A – тензор инерции гиростата, вычисленный в неподвижной точке; B – симметричная матрица третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную.

Уравнения (1), (2) имеют первые интегралы

$$A \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \tag{3}$$

Здесь E и k – произвольные постоянные.

Предположим, что в главной системе координат $A = diag(A_1, A_2, A_3)$, а матрица B такова: $B = diag(B_1, B_2, B_3)$. Тогда уравнения (1), (2) и интегралы (3) примут вид

$$\left.\begin{array}{l} A_1\dot{p} = (A_2 - A_3)qr + B_3\nu_3 q - B_2\nu_2 r + \lambda_2 r - \lambda_3 q + \nu_3 s_2 - \nu_2 s_3, \\ A_2\dot{q} = (A_3 - A_1)rp + B_1\nu_1 r - B_3\nu_3 p + \lambda_3 p - \lambda_1 r + \nu_1 s_3 - \nu_3 s_1, \\ A_3\dot{r} = (A_1 - A_2)pq - B_1\nu_1 q + B_2\nu_2 p + \lambda_1 q - \lambda_2 p + \nu_2 s_1 - \nu_1 s_2, \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2, \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{c} A_1p^2 + A_2q^2 + A_3r^2 - 2(s_1\nu_1 + s_2\nu_2 + s_3\nu_3) = 2E, \\ 2(A_1p + \lambda_1)\nu_1 + 2(A_2q + \lambda_2)\nu_2 + \\ +2(A_3r + \lambda_3)\nu_3 - B_1\nu_1^2 - B_2\nu_2^2 - B_3\nu_3^2 = 2k, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Для применения метода П.В.Харламова [2] из системы (4) определим компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$:

$$\nu_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,3}, \tag{7}$$

где

$$\begin{array}{l} \Delta = [pq(B_2 - B_1)s_3B_3 + pr(B_1 - B_3)s_2B_2 + qr(B_3 - B_2)s_1B_1] + \\ \quad + [ps_2s_3(B_2 - B_3) + qs_1s_3(B_3 - B_1) + rs_1s_2(B_1 - B_2)]; \end{array} \tag{8}$$

$$\begin{array}{l} \Delta_1 = (A_1\dot{p} - (A_2 - A_3)qr + \lambda_3 q - \lambda_2 r)(pB_2 + s_1)(pB_3 + s_1) + \\ \quad + (A_2\dot{q} - (A_3 - A_1)rp + \lambda_1 r - \lambda_3 p)(pB_2 + s_1)(qB_3 + s_2) + \\ \quad + (A_3\dot{r} - (A_1 - A_2)pq + \lambda_2 p - \lambda_1 q)(rB_2 + s_3)(pB_3 + s_1), \end{array}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 = {} & (A_1\dot p - (A_2 - A_3)qr + \lambda_3 q - \lambda_2 r)(pB_3 + s_1)(qB_1 + s_2) + \\ & + (A_2\dot q - (A_3 - A_1)rp + \lambda_1 r - \lambda_3 p)(qB_3 + s_2)(qB_1 + s_2) + \\ & + (A_3\dot r - (A_1 - A_2)pq + \lambda_2 p - \lambda_1 q)(qB_3 + s_2)(rB_1 + s_3), \\ \Delta_3 = {} & (A_1\dot p - (A_2 - A_3)qr + \lambda_3 q - \lambda_2 r)(rB_1 + s_3)(pB_2 + s_1) + \\ & + (A_2\dot q - (A_3 - A_1)rp + \lambda_1 r - \lambda_3 p)(rB_2 + s_3)(qB_1 + s_2) + \\ & + (A_3\dot r - (A_1 - A_2)pq + \lambda_2 p - \lambda_1 q)(rB_1 + s_3)(rB_2 + s_3).\end{aligned} \tag{9}$$

Для получения первой формы уравнений по методу П.В.Харламова подставим выражения (7) в первые интегралы (6). Тогда получим систему

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{3}\Delta_i^2 - \Delta^2 = 0, \quad \Delta(A_1p^2 + A_2q^2 + A_3r^2 - 2E) - 2\sum_{i=1}^{3} s_i\Delta_i = 0, \\ 2[(A_1p + \lambda_1)\Delta_1 + (A_2q + \lambda_2)\Delta_2 + (A_2r + \lambda_3)\Delta_3 - k\Delta]\Delta - \sum_{i=1}^{3} B_i\Delta_1^2 = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

С учетом (8), (9) уравнения (10) представляют систему трех нелинейных дифференциальных уравнений относительно переменных p, q, r, то есть они имеют вид $F_i(\dot p, \dot q, \dot r, p, q, r) = 0$, $i = \overline{1,3}$.

Если внести выражения (7) в уравнения (5), то получим следующую систему

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\cdot} = \frac{r\Delta_2 - q\Delta_3}{\Delta}, \quad \left(\frac{\Delta_2}{\Delta}\right)^{\cdot} = \frac{p\Delta_3 - r\Delta_1}{\Delta}, \quad \left(\frac{\Delta_3}{\Delta}\right)^{\cdot} = \frac{q\Delta_1 - p\Delta_2}{\Delta}. \tag{11}$$

Если в данной системе воспользоваться выражениями (8), (9), то получим систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменных p, q, r. Система (11) является аналогом второй формы уравнений П.В.Харламова [2].

Наибольшее применение уравнений П.В.Харламова получено в случае, когда гиростатический момент и вектор, указывающий направление центра масс гиростата, направлены по главной оси эллипсоида инерции. При этом компоненты вектора угловой скорости связаны условиями, что квадраты второй и третьей компонент – полиномы относительно первой компоненты.

В данной работе полагаем, что $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $s_2 = s_3 = 0$, а для переменных p, q, r выполняются инвариантные соотношения

$$p = p(\sigma), \quad q^2 = Q(\sigma), \quad r^2 = R(\sigma), \tag{12}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)}, \tag{13}$$

где σ – новая вспомогательная переменная.

В силу (12), (13) соотношения (7) принимают вид

$$\begin{aligned}\nu_1 = {} & \frac{1}{2s_1B_1(B_3 - B_2)}\{2A_1(pB_2 + s_1)(pB_3 + s_1)p'(\sigma) + A_2B_3(pB_2 + s_1)Q'(\sigma) + \\ & + A_3B_2(pB_3 + s_1)R'(\sigma) + 2ps_1[B_2(A_3 - A_1) + B_3(A_1 - A_2)] + \\ & + 2\lambda_1 s_1(B_3 - B_2) - 2s_1^2(A_2 - A_3)\},\end{aligned}$$

$$\nu_2 = \frac{\sqrt{Q(\sigma)}}{2s_1(B_3 - B_2)}[2A_1(pB_3 + s_1)p'(\sigma) + B_3(A_2Q'(\sigma) + A_3R'(\sigma)) + 2s_1(A_3 - A_2)], \quad (14)$$

$$\nu_3 = \frac{\sqrt{R(\sigma)}}{2s_1(B_3 - B_2)}[2A_1(pB_2 + s_1)p'(\sigma) + B_2(A_2Q'(\sigma) + A_3R'(\sigma)) + 2s_1(A_3 - A_2)].$$

Из интеграла энергии, входящего в систему (6), на основании (12) найдем

$$\nu_1 = \frac{1}{2s_1}(A_1p^2(\sigma) + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma) - 2E). \quad (15)$$

Приравнивая выражения для ν_1 из (14), (15), получим

$$\begin{aligned} &2A_1(pB_2 + s_1)(pB_3 + s_1)p'(\sigma) + A_2B_3(pB_2 + s_1)Q'(\sigma) + A_3B_2(pB_3 + s_1)R'(\sigma) + \\ &+ 2ps_1[B_2(A_3 - A_1) + B_3(A_1 - A_2)] + 2[\lambda_1 s_1(B_3 - B_2) - s_1^2(A_2 - A_3) + \\ &+ EB_1(B_3 - B_2)] - B_1(B_3 - B_2)(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Исключим в выражениях для ν_2, ν_3 из (14) величину $p'(\sigma)$ с помощью (16)

$$\begin{aligned} \nu_2 = &\frac{\sqrt{Q(\sigma)}}{2s_1(pB_2 + s_1)}[A_3s_1R'(\sigma) - 2ps_1(A_1 - A_2) + \\ &+ B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - 2(\lambda_1 s_1 + EB_1)]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \nu_3 = &\frac{\sqrt{R(\sigma)}}{2s_1(pB_3 + s_1)}[-A_2s_1Q'(\sigma) - 2ps_1(A_1 - A_3) + \\ &+ B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - 2(\lambda_1 s_1 + EB_1)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Геометрический интеграл и интеграл площадей из системы (6), с учетом (15), (17), (18) запишем так

$$(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma) - 2E)^2 + \frac{Q(\sigma)}{(pB_2 + s_1)^2}[A_3s_1R'(\sigma) - 2ps_1(A_1 - A_2) +$$

$$+B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - 2(\lambda_1 s_1 + EB_1)]^2 + \frac{R(\sigma)}{(pB_3 + s_1)^2}[-A_2s_1Q'(\sigma) -$$

$$-ps_1(A_1 - A_3) + B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - 2(\lambda_1 s_1 + EB_1)]^2 = 4s_1^2, \quad (19)$$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2s_1}(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma) - 2E)\cdot \\
\cdot\left\{A_1p + \lambda_1 - \frac{B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma) - 2E)}{4s_1}\right\} + \frac{Q(\sigma)}{2s_1(pB_2 + s_1)}\cdot \\
\cdot\big[A_3s_1R'(\sigma) - 2ps_1(A_1 - A_2) + B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - \\
- 2(\lambda_1s_1 + EB_1)\big]\cdot\Big\{A_2 - \frac{B_2}{4s_1(pB_2 + s_1)}[A_3s_1R'(\sigma) - 2ps_1(A_1 - A_2) + \\
+ B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - 2(\lambda_1s_1 + EB_1)]\Big\} + \frac{R(\sigma)}{2s_1(pB_3 + s_1)}\cdot \\
\cdot[-A_2s_1Q'(\sigma) - 2ps_1(A_1 - A_3) + B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - \\
- 2(\lambda_1s_1 + EB_1)]\cdot\Big\{A_3 - \frac{B_3}{4s_1(pB_3 + s_1)}\cdot[-A_2s_1Q'(\sigma) - 2ps_1(A_1 - A_3) + \\
+ B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - 2(\lambda_1s_1 + EB_1)]\Big\} = k.
\end{gathered} \tag{20}
$$

Уравнения (19), (20) должны рассматриваться совместно с уравнениями (13), (16). То есть мы приходим к системе четырех дифференциальных уравнений, в которой независимой переменной является σ, а неизвестными функциями служат $p(\sigma)$, $Q(\sigma)$, $R(\sigma)$. Таким образом, в отличие от уравнений П.В.Харламова классической задачи, мы имеем не три дифференциальных уравнения, а четыре дифференциальных уравнения.

Рассмотрение кинематических уравнений (5) с учетом (15), (17), (18) приводит к двум уравнениям

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2(pB_2 + s_1)^2}\big\{Q'(\sigma)(pB_2 + s_1)[A_3s_1R'(\sigma) - 2ps_1(A_1 - A_2) + \\
+ B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - 2(\lambda_1s_1 + EB_1)] - 2Q(\sigma)p'(\sigma)B_2\cdot \\
\cdot[A_3s_1R'(\sigma) - 2ps_1(A_1 - A_2) + B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - \\
- 2(\lambda_1s_1 + EB_1)] + 2Q(\sigma)[A_3s_1R''(\sigma) - 2s_1(A_1 - A_2)p'(\sigma) + \\
+ B_1(2A_1pp'(\sigma) + A_2Q'(\sigma) + A_3R'(\sigma))](pB_2 + s_1)\big\} = \\
= \frac{p}{pB_3 + s_1}[-A_2s_1Q'(\sigma) - 2ps_1(A_1 - A_3) + B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - \\
- 2(\lambda_1s_1 + EB_1)] - (A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma) - 2E),
\end{gathered} \tag{21}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2(pB_3 + s_1)^2}\big\{R'(\sigma)(pB_3 + s_1)[-A_2s_1Q'(\sigma) - 2ps_1(A_1 - A_3) + \\
+ B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - 2(\lambda_1s_1 + EB_1)] - 2R(\sigma)p'(\sigma)B_3\cdot \\
\cdot[-A_2s_1Q'(\sigma) - 2ps_1(A_1 - A_3) + B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - \\
- 2(\lambda_1s_1 + EB_1)] + 2R(\sigma)[-A_2s_1Q''(\sigma) - 2s_1(A_1 - A_3)p'(\sigma) +
\end{gathered}
$$

$$+ B_1(2A_1pp'(\sigma) + A_2Q'(\sigma) + A_3R'(\sigma))](pB_3 + s_1)\big\} =$$
$$= A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma) - 2E - \frac{p}{pB_2 + s_1}[A_3s_1R'(\sigma) - \tag{22}$$
$$- 2ps_1(A_1 - A_2) + B_1(A_1p^2 + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma)) - 2(\lambda_1 s_1 + EB_1)].$$

Поскольку в уравнения (21), (22) входит переменная p, то для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений необходимо к уравнениям (21), (22) присоединить уравнение (16).

Для дифференциальных уравнений (21), (22) уравнения (19), (20) являются первыми интегралами. На основании соотношений (15), (17), (18), вводя вспомогательные функции $\psi(\sigma)$ и $\kappa(\sigma)$, имеем

$$\nu_1 = \nu_1(\sigma), \quad \nu_2 = \sqrt{Q(\sigma)}\psi(\sigma), \quad \nu_3 = \sqrt{R(\sigma)}\kappa(\sigma). \tag{23}$$

Предлагаемый далее подход обладает преимуществом по сравнению с использованием общих уравнений (19)–(22) в задаче исследования полиномиальных решений. Для его реализации запишем уравнения (4), (5) в следующем виде

$$A_1p'(\sigma) = A_2 - A_3 + B_3\kappa(\sigma) - B_2\psi(\sigma), \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\kappa(\sigma) = \frac{1}{p(\sigma)B_3 + s_1}\Big[&-\frac{1}{2}A_2Q'(\sigma) + (A_3 - A_1)p(\sigma) - \\ &- \lambda_1 + \frac{B_1(A_1p^2(\sigma) + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma) - 2E}{2s_1}\Big],\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\psi(\sigma) = \frac{1}{p(\sigma)B_2 + s_1}\Big[&\frac{1}{2}A_3R'(\sigma) + (A_2 - A_1)p(\sigma) - \\ &- \lambda_1 + \frac{B_1(A_1p^2(\sigma) + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma) - 2E}{2s_1}\Big],\end{aligned} \tag{26}$$

$$Q(\sigma)\psi'(\sigma) = p(\sigma)\kappa(\sigma) - \frac{1}{2}\psi(\sigma)Q'(\sigma) - \frac{A_1p^2(\sigma) + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma) - 2E}{2s_1}, \tag{27}$$

$$\nu_1'(\sigma) = (\psi(\sigma) - \kappa(\sigma)), \tag{28}$$

$$R(\sigma)\kappa'(\sigma) = -p(\sigma)\kappa(\sigma) - \frac{1}{2}\kappa(\sigma)R'(\sigma) + \frac{A_1p^2(\sigma) + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma) - 2E}{2s_1}. \tag{29}$$

Интегралы исходных уравнений движения (6) на основе (23) принимают вид

$$\nu_1 = \frac{1}{2s_1}(A_1p^2(\sigma) + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma) - 2E), \tag{30}$$

$$\frac{(A_1p^2(\sigma) + A_2Q(\sigma) + A_3R(\sigma) - 2E)^2}{4s_1} + Q(\sigma)\psi^(\sigma) + R(\sigma)\kappa^2(\sigma) - 1 = 0, \tag{31}$$

$$\frac{(A_1p(\sigma)+\lambda_1)(A_1p^2(\sigma)+A_2Q(\sigma)+A_3R(\sigma)-2E)}{2s_1}+A_2Q(\sigma)\psi(\sigma)+$$
$$+A_3R(\sigma)\kappa(\sigma)-\frac{1}{8s_1^2}B_1(A_1p^2(\sigma)+A_2Q(\sigma)+A_3R(\sigma)-2E)^2- \qquad (32)$$
$$-\frac{1}{2}B_2Q(\sigma)\psi^2(\sigma)-\frac{1}{2}B_3R(\sigma)\kappa^2(\sigma)=k.$$

После интегрирования системы (24)–(29), которое удобно проводить с помощью интегралов (30)–(32), зависимость переменной $\sigma=\sigma(t)$ находим из уравнения (13).

Если решение ищется в виде многочленов по σ, то задав многочлен $p=p(\sigma)$, из уравнения (24) можно установить максимальные значения степеней многочленов $\psi(\sigma),\kappa(\sigma)$. Тогда из уравнений (25), (26) можно найти максимальные значения степеней полиномов $Q(\sigma),R(\sigma)$.

Уравнения (27)–(29) служат уравнениями, которые определяют условия существования многочленов $p(\sigma),\psi(\sigma),\kappa(\sigma),Q(\sigma),R(\sigma),\nu_1(\sigma)$.

2. Понижение порядка дифференциальных уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Рассмотрим уравнения движения тяжелого гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона

$$A\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})=(\mathbf{s}+B\cdot\boldsymbol{\omega})\times\boldsymbol{\nu}, \qquad (33)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \qquad (34)$$

которые допускают два первых интеграла

$$(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu}=k, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1. \qquad (35)$$

В уравнениях (33)–(35) обозначено: $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент; $\mathbf{s}$ – вектор обобщенного центра масс; A – тензор инерции гиростата, вычисленный в неподвижной точке; B – симметричная матрица третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную; k – произвольная постоянная.

Умножим уравнение (33) векторно на $A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}$ и учтем в полученном выражении интеграл момента количества движения из (35). Тогда получим выражение для $\boldsymbol{\nu}$

$$\boldsymbol{\nu}=\frac{1}{[(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot(\mathbf{s}+B\cdot\boldsymbol{\omega})]}\cdot\{k(\mathbf{s}+B\cdot\boldsymbol{\omega})+A\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}\times(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})-$$
$$-\boldsymbol{\omega}(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})^2+(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})(A\cdot\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\omega})\}. \qquad (36)$$

Умножим теперь скалярно динамическое уравнение (33) на вектор $\mathbf{s}+B\cdot\boldsymbol{\omega}$

$$A\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\mathbf{s}+B\cdot\boldsymbol{\omega})+(\mathbf{s}+B\cdot\boldsymbol{\omega})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}))=0. \qquad (37)$$

Подставим выражение для $\boldsymbol{\nu}$ из (36) в кинематическое соотношение из (35) и уравнение Пуассона (34):

$$
\begin{gathered}
[k(\mathbf{s}+B\cdot\boldsymbol{\omega})+A\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}\times(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\omega}(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})^2+\\
+(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})(A\cdot\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\omega})]^2-[(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot(\mathbf{s}+B\cdot\boldsymbol{\omega})]^2=0,
\end{gathered}
\tag{38}
$$

$$
\begin{gathered}
\{(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot(\mathbf{s}+B\cdot\boldsymbol{\omega})\}\cdot\{kB\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}+A\cdot\ddot{\boldsymbol{\omega}}\times(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})-\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})^2-\\
-2\boldsymbol{\omega}\cdot(A\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}))+A\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(A\cdot\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\omega})+(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\\
\cdot(2(A\cdot\boldsymbol{\omega}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}})+(\boldsymbol{\lambda}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}))+k\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{s}+B\cdot\boldsymbol{\omega})+\boldsymbol{\omega}\times(A\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}\times(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}))+\\
+(\boldsymbol{\omega}\times(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}))(A\cdot\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\omega})\}-\{k(\mathbf{s}+B\cdot\boldsymbol{\omega})+\\
+A\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}\times(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\omega}\cdot(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})^2+(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})(A\cdot\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}+\\
+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\omega})\}\cdot(A\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\mathbf{s}+B\cdot\boldsymbol{\omega})+(A\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot B\dot{\boldsymbol{\omega}})=0.
\end{gathered}
\tag{39}
$$

Уравнения (37), (38) представляют собой дифференциальные уравнения первого порядка на компоненты вектора угловой скорости. Уравнение (39) при записи его в скалярном виде приводит к трем дифференциальным уравнениям второго порядка. Таким образом, вместо исходной системы (33), (34) можно рассматривать два уравнения первого порядка (37), (38) и одно из уравнений второго порядка, которое вытекает из векторного уравнения (39) на компоненты вектора угловой скорости и соотношение (36). В этом и состоит результат редукции уравнений (33), (34) на основе подхода П.В.Харламова.

1. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т.27, вып.4. – С.703-707.
2. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. – 221с.
3. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып.31. – С.3-17.
4. *Егармин И.Е.* О магнитном поле вращающегося сверхпроводящего тела // Аэрофизика и космические исследования. – М.: Физ.-техн. ин-т, 1983. – С.95-96.
5. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. – М.: Физмат-гиз, 1963. – 696с.
6. *Урман Ю.Н.* Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе // Докл. АН СССР. – 1984. – Т.276, №6. – С.1402-1404.
7. *Klein F., A. Sommerfeld.* Über die Theorie des Kreisels. – New York e.a. Johnson reprint corp. – 1965. – 966p.
8. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – К.: Наук. думка, 1978. – 296с.
9. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – К.: – Наук. думка, 1986. – 295с.
10. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösing des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – B.37, H.2. – S.153-181.
11. *Kowalewski N.* Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1908. – B.65. – S.528-537.
12. *Гашененко И.Н., Мозалевская Г.В., Харламова Е.И.* О редукции уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. – 2008. – Вып.38. – С.3-19.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Донецкий национальный ун-т
gorr@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 07.05.09