

УДК 531.3

©2009. Н.С. Бондаренко

**ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ  $\{1,0\}$ -АППРОКСИМАЦИИ  
ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН**

Найдено фундаментальное решение плоской задачи термоупругости и задачи термоупругого изгиба для трансверсально-изотропной пластины, находящейся под воздействием сосредоточенного температурного нагружения. При этом использовались уравнения термоупругости  $\{1,0\}$ -аппроксимации. Исследовано влияние теплофизических параметров трансверсально-изотропного материала на компоненты термоупругого состояния пластины.

**Введение.** В данной статье рассматривается задача о действии сосредоточенного источника тепла в трансверсально-изотропной пластине. Такой вид температурного нагружения моделируется  $\delta$ -функцией Дирака в правых частях разрешающих уравнений. Поэтому решение задачи сводится к нахождению фундаментального решения уравнений термоупругости.

В настоящее время для построения различных вариантов уточненных теорий эффективно используется метод разложения искомых функций трехмерных уравнений термоупругости в ряды по полиномам Лежандра. Методом разложения перемещений, напряжений и деформаций в ряды по полиномам Лежандра от нормальной координаты трехмерные уравнения термоупругости трансверсально-изотропных пластин сводятся к двумерным. При этом точность полученных решений зависит от числа удерживаемых слагаемых в разложениях заданных и искомых функций.

В данной работе приведены уравнения термоупругости  $\{1,0\}$ -аппроксимации для трансверсально-изотропных пластин. В дальнейшем решение уравнений термоупругости будет уточняться за счет увеличения порядка аппроксимации.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину толщины  $2h$ , находящуюся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой нулевой температуры по закону Ньютона. Пластина находится под воздействием источников тепла объемной плотности  $w_0(x, y, z)$ .

Модель сосредоточенных воздействий для пластин была предложена Я.С.Подстригачом и Ю.М.Коляно [1, 2]. Эта модель представляет собой интегральный источник тепла, который суммирует объемные источники тепла, распределенные по одной координатной линии  $z$ , перпендикулярной к срединной плоскости пластины. Если распределение описывается четной функцией, то источник тепла называется «плоским», если нечетной – то «изгибным».

Предположим, что искомые функции разложимы в равномерно сходящиеся ряды по полиномам Лежандра от нормальной координаты  $z$ . В рамках  $\{1,0\}$ -аппроксимации компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, принимающие ненулевые значения с учетом граничных условий на лицевых поверхностях пластины,

имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} u_x &= uP_0 + \gamma_x h P_1, & u_y &= vP_0 + \gamma_y h P_1, & u_z &= wP_0; \\ \sigma_x &= \frac{N_x}{2h} P_0 + \frac{3M_x}{2h^2} P_1 & (x \rightarrow y), & \tau_{xy} &= \frac{S}{2h} P_0 + \frac{3H}{2h^2} P_1, \\ \tau_{xz} &= \frac{Q_x}{2h} (P_0 - P_2) & (x \rightarrow y), & \sigma_z &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $P_i$  ( $i = \overline{0, 2}$ ) – полиномы Лежандра [4];  $N_1, N_2, S$  – мембранные усилия;  $M_1, M_2$  – изгибающие моменты,  $H$  – крутящий момент;  $Q_1, Q_2$  – перерезывающие силы;  $u, v, w$  – перемещения точек срединной поверхности пластины;  $\gamma_1, \gamma_2$  – углы поворота нормали.

В качестве исходной взята система уравнений теплопроводности трансверсально-изотропных пластин 1-го приближения. Температура в этом случае представляется в виде [4]

$$T = T_0 P_0 + T_1 P_1,$$

где  $T_0, T_1$  – интегральные характеристики температуры (средняя температура и температурный момент):

$$T_i = \frac{2i+1}{2h} \int_{-h}^h T P_i dz \quad (i = \overline{0, 1}).$$

Введем безразмерную систему ортогональных координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , определенных с точностью до полутолщины пластины  $h$ . Система уравнений теплопроводности 1-го приближения имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} \lambda^* \Delta T_0 - \gamma_1 T_0 - \frac{5}{24} \gamma_0 T_1 &= -w_{00}, \\ \lambda^* \Delta T_1 - \frac{5}{2} (6 - 5\delta) T_1 - \frac{5}{8} \gamma_0 T_0 &= -3w_{01}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, & \lambda^* &= \frac{\lambda}{\lambda'}; & w_{0i} &= \frac{1}{2\lambda'} \int_{-1}^1 w_0 P_i dx_3 \quad (i = \overline{0, 1}); \\ \gamma_0 &= \frac{2}{\Delta'} (Bi^+ - Bi^-), & \gamma_1 &= \frac{1}{6\Delta'} (3Bi^+ + 3Bi^- + Bi^+ Bi^-), \\ \delta &= \frac{1}{6\Delta'} (6 + Bi^+ + Bi^-), & \Delta' &= \frac{1}{36} (36 + 9Bi^+ + 9Bi^- + 2Bi^+ Bi^-); \end{aligned}$$

$\lambda, \lambda'$  – коэффициенты теплопроводности в плоскости изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней;  $Bi^+, Bi^-$  – критерии Био на лицевых поверхностях пластины  $x_3 = \pm 1$ ;  $w_{00}, w_{01}$  – приведенные плотности распределения «плоских» и «изгибных» источников тепла, источников средней температуры и температурного момента.

Система уравнений термоупругости {1,0}-аппроксимации трансверсально-изотропных пластин имеет вид [3, 4]:

1. Уравнения закона Гука

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} - \alpha(1 + \nu)T_0 \right\}, & N_2 &= B_0 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha(1 + \nu)T_0 \right\}, \\ S &= \frac{1 - \nu}{2} B_0 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\}; \\ M_1 &= D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} - \alpha(1 + \nu)T_1 \right\}, & M_2 &= D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} - \alpha(1 + \nu)T_1 \right\}, \\ H &= \frac{1 - \nu}{2} D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right\}, & Q_1 &= \Lambda_0 \left( \gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) & Q_2 &= \Lambda_0 \left( \gamma_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$B_0 = \frac{2}{1 - \nu^2}, \quad D_0 = \frac{2}{3(1 - \nu^2)}, \quad \Lambda_0 = \frac{5}{3} \frac{1}{E/G'};$$

$\alpha$ ,  $E$ ,  $\nu$  – температурный коэффициент линейного расширения, модуль Юнга и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии, соответственно;  $G'$  – модуль сдвига в направлении, перпендикулярном к плоскости изотропии.

Мембранные усилия и перерезывающие силы в (2) определены в отношении к величине  $Eh$ , а моменты – в отношении к величине  $Eh^2$ .

2. Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} &= 0; \\ \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 &= 0, & \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 &= 0, & \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя уравнения закона Гука (2) в уравнения равновесия (3), получаем разрешающие системы, описывающие:

– плоское термоупругое состояние

$$\begin{aligned} \Delta u + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) &= \alpha(1 + \nu) \frac{\partial T_0}{\partial x_1}, \\ \Delta v + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) &= \alpha(1 + \nu) \frac{\partial T_0}{\partial x_2}; \end{aligned} \quad (4)$$

– состояние термоупругого изгиба

$$\begin{aligned} \Delta w + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} &= 0, \\ \Delta \gamma_1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) &= \alpha(1 + \nu) \frac{\partial T_1}{\partial x_1}, \\ \Delta \gamma_2 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \gamma_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) &= \alpha(1 + \nu) \frac{\partial T_1}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где введен параметр сдвиговой податливости  $\varepsilon_0 = D_0/\Lambda_0$ .

Следует отметить, что разрешающая система (5) совпадает с системой термоупругого равновесия по теории типа Тимошенко [5].

Также заметим, что в случае симметричного теплообмена, когда величины параметров теплообмена на лицевых поверхностях пластины одинаковы ( $Bi^+ = Bi^-$ ), система уравнений теплопроводности (1) распадается на два независимых дифференциальных уравнения для определения  $T_0$  и  $T_1$ . Следовательно, и системы уравнений термоупругости, одна из которых включает в себя первое уравнение (1) и уравнения (4), а вторая – второе уравнение (1) и уравнения (5), в случае симметричного теплообмена будут независимыми.

После интегрирования систем дифференциальных уравнений (1), (4), (5) мембранные усилия, изгибающие, крутящий моменты и перерезывающие силы определяются по формулам (2).

Математической моделью сосредоточенных воздействий в механике является дельта-функция Дирака. Она стоит на месте функций нагрузки в правых частях разрешающих уравнений. Поэтому функцию плотности источников тепла берем в виде

$$w_{0i}(x_1, x_2) = w_{0i}^* \delta(x_1, x_2) \quad (i = \overline{0, 1}), \quad (6)$$

где  $w_{00}^*$ ,  $w_{01}^*$  – интенсивности сосредоточенного «плоского» и «изгибного» источника тепла, соответственно;  $\delta(x_1, x_2)$  – двумерная дельта-функция Дирака.

Таким образом, в математическом плане решение данной задачи сводится к нахождению фундаментального решения системы дифференциальных уравнений (1), (4), (5).

При решении задач о действии сосредоточенных температурных воздействий рассматриваем локальное термоупругое состояние. Это означает, что искомое решение стремится к нулю на бесконечности. Предполагаем, что рассматриваемое термоупругое состояние близко к нулю на линии внешней границы пластины. Справедливость данного предположения проверяется после решения задачи. В связи с этим пластину можно считать бесконечной и не учитывать граничные условия.

**2. Методика решения.** Решение системы уравнений термоупругости с правыми частями (6) получено с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье. Решение уравнений теплопроводности (1) с правыми частями (6) в пространстве трансформант  $(\xi_1, \xi_2)$  имеет вид:

$$\tilde{T}_0 = \frac{m_0}{p^2 + \rho_1^2} + \frac{n_0}{p^2 + \rho_2^2}, \quad \tilde{T}_1 = \frac{m_1}{p^2 + \rho_1^2} + \frac{n_1}{p^2 + \rho_2^2}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
 p^2 &= \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad m_i = \frac{1}{\rho_3^2}(l_i - k_i \rho_1^2), \quad n_i = -\frac{1}{\rho_3^2}(l_i - k_i \rho_2^2) \quad (i = \overline{0,1}), \\
 \rho_{1,2}^2 &= \frac{m}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 - n}, \quad \rho_3^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2; \\
 m &= \frac{1}{\lambda^*} \left[ \frac{5}{2}(6 - 5\delta) + \gamma_1 \right], \quad n = \frac{1}{(\lambda^*)^2} \left[ \frac{5}{2}(6 - 5\delta)\gamma_1 - \frac{25}{192}\gamma_0^2 \right]; \\
 k_0 &= \frac{w_{00}^*}{2\pi\lambda^*}, \quad l_0 = \frac{1}{2\pi(\lambda^*)^2} \left[ \frac{5}{2}(6 - 5\delta)w_{00}^* - \frac{5}{8}\gamma_0 w_{01}^* \right], \\
 k_1 &= \frac{3w_{01}^*}{2\pi\lambda^*}, \quad l_1 = \frac{1}{2\pi(\lambda^*)^2} \left[ 3\gamma_1 w_{01}^* - \frac{5}{8}\gamma_0 w_{00}^* \right].
 \end{aligned}$$

Применим двумерное интегральное преобразование Фурье к системам уравнений термоупругого равновесия (4), (5):

$$\begin{aligned}
 \left( p^2 - \frac{1+\nu}{2}\xi_2^2 \right) \tilde{u} + \frac{1+\nu}{2}\xi_1\xi_2\tilde{v} &= \alpha(1+\nu)i\xi_1\tilde{T}_0, \\
 \frac{1+\nu}{2}\xi_1\xi_2\tilde{u} + \left( p^2 - \frac{1+\nu}{2}\xi_1^2 \right) \tilde{v} &= \alpha(1+\nu)i\xi_2\tilde{T}_0;
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 p^2\tilde{w} + i\xi_1\tilde{\gamma}_1 + i\xi_2\tilde{\gamma}_2 &= 0, \\
 -\frac{1}{\varepsilon_0}i\xi_1\tilde{w} + \left( p^2 - \frac{1+\nu}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{\varepsilon_0} \right) \tilde{\gamma}_1 + \frac{1+\nu}{2}\xi_1\xi_2\tilde{\gamma}_2 &= \alpha(1+\nu)i\xi_1\tilde{T}_1, \\
 -\frac{1}{\varepsilon_0}i\xi_2\tilde{w} + \frac{1+\nu}{2}\xi_1\xi_2\tilde{\gamma}_1 + \left( p^2 - \frac{1+\nu}{2}\xi_1^2 + \frac{1}{\varepsilon_0} \right) \tilde{\gamma}_2 &= \alpha(1+\nu)i\xi_2\tilde{T}_1.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Решая полученные системы линейных алгебраических уравнений (8)–(9) относительно искомых величин  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  и  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{\gamma}_1$ ,  $\tilde{\gamma}_2$  и подставляя вместо  $\tilde{T}_0$  и  $\tilde{T}_1$  их выражения из (7), получим

$$\begin{aligned}
 \tilde{u} &= \alpha(1+\nu) \left[ m_0 \frac{i\xi_1}{f_1(p^2)} + n_0 \frac{i\xi_1}{f_2(p^2)} \right], \quad \tilde{v} = \alpha(1+\nu) \left[ m_0 \frac{i\xi_2}{f_1(p^2)} + n_0 \frac{i\xi_2}{f_2(p^2)} \right], \\
 \tilde{\gamma}_1 &= \alpha(1+\nu) \left[ m_1 \frac{i\xi_1}{f_1(p^2)} + n_1 \frac{i\xi_1}{f_2(p^2)} \right], \quad \tilde{\gamma}_2 = \alpha(1+\nu) \left[ m_1 \frac{i\xi_2}{f_1(p^2)} + n_1 \frac{i\xi_2}{f_2(p^2)} \right], \\
 \tilde{w} &= \alpha(1+\nu) \left[ \frac{m_1}{f_1(p^2)} + \frac{n_1}{f_2(p^2)} \right],
 \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$f_1(p^2) = p^2(p^2 + \rho_1^2), \quad f_2(p^2) = p^2(p^2 + \rho_2^2).$$

Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье к уравнениям закона Гука (2) и подставляя при этом вместо компонент вектора перемещений и углов

поворота нормали их выражения (10), а вместо интегральных характеристик температуры – их выражения (7), найдем

$$\begin{aligned}\tilde{N}_1 &= -2\alpha \left[ m_0 \frac{\xi_2^2}{f_1(p^2)} + n_0 \frac{\xi_2^2}{f_2(p^2)} \right], & \tilde{N}_2 &= -2\alpha \left[ m_0 \frac{\xi_1^2}{f_1(p^2)} + n_0 \frac{\xi_1^2}{f_2(p^2)} \right], \\ \tilde{S} &= 2\alpha \left[ m_0 \frac{\xi_1 \xi_2}{f_1(p^2)} + n_0 \frac{\xi_1 \xi_2}{f_2(p^2)} \right]; \\ \tilde{M}_1 &= -\frac{2}{3}\alpha \left[ m_1 \frac{\xi_2^2}{f_1(p^2)} + n_1 \frac{\xi_2^2}{f_2(p^2)} \right], & \tilde{M}_2 &= -\frac{2}{3}\alpha \left[ m_1 \frac{\xi_1^2}{f_1(p^2)} + n_1 \frac{\xi_1^2}{f_2(p^2)} \right], \\ \tilde{H} &= \frac{2}{3}\alpha \left[ m_1 \frac{\xi_1 \xi_2}{f_1(p^2)} + n_1 \frac{\xi_1 \xi_2}{f_2(p^2)} \right]; & \tilde{Q}_1 &= \tilde{Q}_2 = 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Из соотношений (10)–(11) следует, что параметр сдвиговой податливости трансверсально-изотропных пластин  $\varepsilon_0$  не входит в полученное решение, а трансформанты перерезывающих сил равны нулю, что является особенностью рассматриваемой температурной нагрузки.

Обратим трансформанты (10)–(11) с помощью методики, основанной на использовании специальной G-функции [6]. При этом все искомые величины переведем в полярную систему координат  $(r, \varphi)$  по известным формулам перехода [7]:

$$\begin{aligned}u_r &= -\frac{\alpha}{2}(1 + \nu)r f_{1,0}^{(0)}(r), & u_\varphi &= 0; \\ N_{r,\varphi} &= -\alpha \left\{ f_{0,0}^{(0)}(r) \mp f_{1,1}^{(0)}(r) \right\}, & S_{r\varphi} &= 0; \\ w &= -\alpha(1 + \nu) \left\{ \left( \frac{m_1}{\rho_1^2} + \frac{n_1}{\rho_2^2} \right) \ln \frac{\gamma r}{2} + \frac{m_1}{\rho_1^2} G_{0,0}(\rho_1 r) + \frac{n_1}{\rho_2^2} G_{0,0}(\rho_2 r) \right\}; \\ \gamma_r &= -\frac{\alpha}{2}(1 + \nu)r f_{1,0}^{(1)}(r), & \gamma_\varphi &= 0; \\ M_{r,\varphi} &= -\frac{\alpha}{3} \left\{ f_{0,0}^{(1)}(r) \mp f_{1,1}^{(1)}(r) \right\}, & H_{r\varphi} &= 0,\end{aligned}\quad (12)$$

где

$$f_{i,j}^{(k)}(r) = m_k G_{i,j}(\rho_1 r) + n_k G_{i,j}(\rho_2 r) \quad (k = \overline{0,1});$$

$\ln \gamma = C = 0,5772\dots$  – постоянная Эйлера;  $G_{n,\nu}(z)$  – специальная функция, введенная в [6].

Таким образом, формулы (12) дают решение рассматриваемой задачи для случая произвольного теплообмена. Из этих формул видно, что под действием сосредоточенного источника тепла в трансверсально-изотропной пластине возникает осесимметричное термоупругое состояние. Из соотношений (12) можно сделать вывод, что компоненты рассматриваемого термоупругого состояния зависят от параметров теплообмена  $Bi^\pm$ , от величины относительной теплопроводности в плоскости изотропии  $\lambda^*$ , но не зависят от параметра податливости  $E/G'$ .

Учитывая свойства специальной G-функции при  $|z| \rightarrow 0$  [6], получим формулы асимптотического поведения решения:

– при действии сосредоточенного «плоского» источника тепла

$$N_{r,\varphi} \approx \frac{\alpha w_{00}^*}{2\pi\lambda^*} \ln r; \quad M_{r,\varphi} \approx C_1; \quad (13)$$

– при действии сосредоточенного «изгибного» источника тепла

$$N_{r,\varphi} \approx C_2; \quad M_{r,\varphi} \approx \frac{\alpha w_{01}^*}{2\pi\lambda^*} \ln r, \quad (14)$$

где  $C_1, C_2$  – константы, зависящие от теплофизических параметров.

Из формул (13), (14) следует, что асимптотическое поведение усилий и моментов по рассматриваемой теории такое же, как и по классической теории для изотропных пластин [8], т.е. асимптотическое поведение описывается функцией  $\ln r$ .

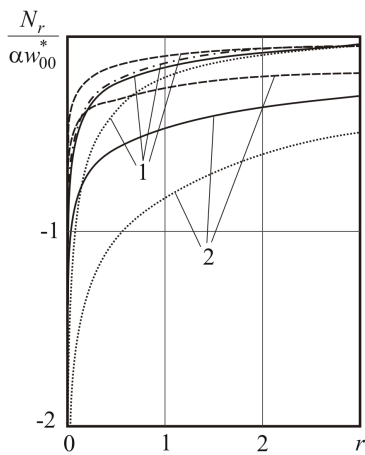


Рис. 1. Радиальное усилие

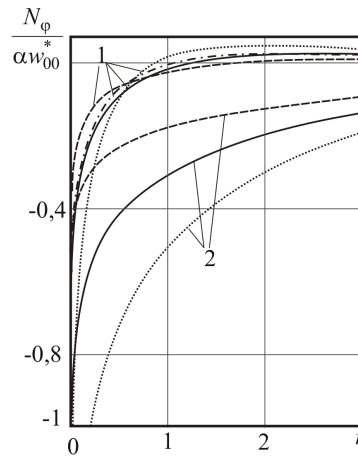


Рис. 2. Окружное усилие

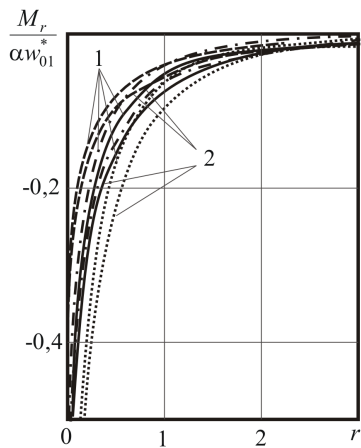


Рис. 3. Радиальный момент

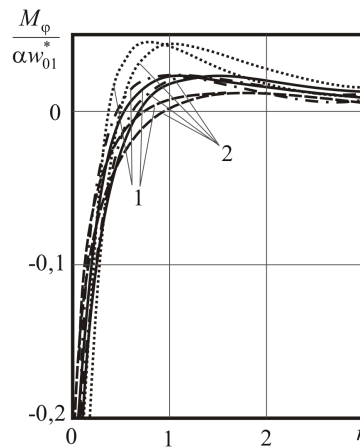


Рис. 4. Окружной момент

**3. Анализ результатов численных исследований.** Численные расчёты посвящены исследованию влияния параметра относительной теплопроводности в плоскости изотропии  $\lambda^*$  и величины теплообмена  $Bi^\pm$  в трансверсально-изотропной пластине ( $\nu = 0, 3$ ), содержащей «плоский» или «изгибный» сосредоточенный источник тепла. Рассмотрен случай симметричного теплообмена ( $Bi^+ = Bi^- = Bi$ ). Результаты исследований представлены на рис. 1–4 в виде графиков изменения усилий при действии «плоского» источника тепла (рис. 1–2) и моментов при действии «изгибного» источника тепла (рис. 3–4) от радиальной координаты  $r$ .

Кривые 1, 2 на рис. 1–4 отвечают значениям параметра теплообмена  $Bi = 1$ ,  $Bi = 0,01$  соответственно. Значения параметра относительной теплопроводности в плоскости изотропии  $\lambda^*$  брались следующие: 1)  $\lambda^* = 1/2$  – пунктирная линия; 2)  $\lambda^* = 1$  – сплошная линия (материал, изотропный по тепловым свойствам); 3)  $\lambda^* = 2$  – штриховая линия. Штрихпунктирной линией показаны результаты расчетов по классической теории.

#### Выводы.

- 1) Все компоненты термоупругого состояния трансверсально-изотропных пластин зависят от относительной теплопроводности в плоскости изотропии  $\lambda^*$ . С увеличением этого параметра в случае симметричного теплообмена радиальные и окружные усилия и моменты уменьшаются по абсолютной величине.
- 2) С увеличением величины теплообмена значения радиальных и окружных усилий и моментов убывают по абсолютной величине.
- 3) Как следует из рис. 1–4, при отсутствии анизотропных тепловых свойств в нормальном направлении, решения рассматриваемой задачи с помощью уравнений  $\{1,0\}$ -аппроксимации и уравнений классической теории различаются, но это отличие является незначительным.

1. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 308с.
2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – К.: Наук. думка, 1976. – 311с.
3. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наук. думка, 1982. – 296с.
4. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – К.: Наук. думка, 1980. – 216с.
5. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. – К.: Наук. думка, 1977. – 183с.
6. Хижняк В.К., Шевченко В.П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128с.
7. Шевченко В.П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С.159-196. (Механика композитов: В 12т. Т.7).
8. Гольцев А.С., Шевченко В.П. Температурные сингулярности для тонких пологих оболочек и пластин // Теоретическая и прикладная механика. – 1998. – Вып.28. – С.81-87.