

УДК 539.3:534.1

©2016. И.А. Моисеенко

СПЕКТРЫ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НОРМАЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРАХ

Волновое движение описывается на основе полной системы уравнений линейной динамической теории упругости. Модули упругости и плотность материала цилиндра задаются экспоненциально-степенной функцией от радиальной координаты. Общее решение системы дифференциальных уравнений модели построено для произвольного окружного волнового числа в матричной форме в виде разложений радиальных составляющих решения в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды по обобщенной кольцевой координате. Получены также дисперсионные соотношения, описывающие спектры гармоник неосесимметричных нормальных волн для случаев одновременно свободных или жестко закрепленных граничных поверхностей. Изучены эффекты влияния параметров радиальной неоднородности на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей распространяющихся нормальных волн.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы; трансверсально-изотропный полый цилиндр; распространение волн; дисперсионные кривые.

Введение. Главной сложностью при рассмотрении моделей волноводов с радиальной неоднородностью физико-механических свойств является существенная ограниченность примеров задач, допускающих построение аналитических решений уравнений теории упругости. Поэтому учет радиальной неоднородности, в доминирующем числе исследований, проводится с привлечением численных или численно-аналитических методов, таких, как методы численного трехмерного моделирования волновых полей, методы теории возмущений, а также методы, основанные на применении матричного уравнения Риккати. Отмеченная сложность актуализирует каждое новое аналитическое решение в рассматриваемом классе задач, с одной стороны, позволяющее провести новые численные исследования влияния неоднородности на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей распространяющихся нормальных волн, с другой стороны, обеспечивающее возможность верификации результатов, полученных с привлечением численных или численно-аналитических методов.

Как известно, при исследовании задачи о распространении нормальных упругих волн вдоль трансверсально-изотропного полого цилиндра вопрос сводится к построению общего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В классическом случае эти уравнения разрешимы через цилиндрические функции [1], что становится невозможным при переходе к рассмотрению нового поколения функционально-градиентных материалов. Одним из подходов, обеспечивающих возможность построения общих аналитических решений указанной системы дифференциальных уравнений, является задание специального вида

функционального закона радиального изменения физико-механических характеристик материала волновода и привлечение аппарата рядов по обобщенной радиальной координате. Указанный подход в осесимметричном случае использован для построения в аналитическом виде общих решений модели и исследования эффектов влияния фактора радиальной неоднородности трансверсально-изотропных материалов на характеристики дисперсионных спектров и фазовых скоростей распространяющихся нормальных волн в полых цилиндрах применительно к волнам крутильного [2] и продольно-сдвигового [3] типов.

В данной работе методика построения общих решений математической модели, описывающей распространение нормальных упругих волн вдоль протяженных цилиндров кольцевого сечения, изготовленных из радиально неоднородных трансверсально-изотропных материалов, распространена на случай неосесимметричных волн с произвольными окружными волновыми числами.

1. Постановка задачи. Рассматривается протяженный трансверсально-изотропный цилиндр концентрического кольцевого сечения с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 . Область волновода занимает в отнесенных к нормирующему параметру $R_* = (R_1 + R_2)/2$ безразмерных цилиндрических координатах $Or\theta z$ область

$$V = \{r \in [1 - h, 1 + h]; 0 \leq \theta \leq 2\pi; z \in (-\infty, \infty)\},$$

где $2h = (R_2 - R_1)/R_*$ – нормированная толщина стенок волновода. Ниже приведенные соотношения формулируются для проекций безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений на оси цилиндрической системы координат, а также для безразмерных характеристик напряженно-деформированного состояния на основных площадках цилиндрической координатной системы, отнесенных к нормирующему параметру c_* .

Основные соотношения модели задачи анализа спектров и свойств нормальных упругих волн вдоль рассматриваемого волновода, с учетом соотношений пространственной линейной математической модели динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел с усложненными физико-механическими свойствами, включают:

– систему дифференциальных уравнений движения в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_{rr} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_r &= 0, \\ \partial_r \sigma_{r\theta} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} + 2r^{-1} \sigma_{r\theta} - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_\theta &= 0, \\ \partial_r \sigma_{rz} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta z} + \partial_z \sigma_{zz} + r^{-1} \sigma_{rz} - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_z &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где (u_r, u_θ, u_z) – компоненты безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений, отнесенных к нормирующему параметру R_* ;

$(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta})$ – отнесенные к нормирующему параметру c_* компоненты тензора динамических напряжений; ρ – плотность материала волновода; t – время; $\partial_j = \partial/\partial j$ ($j = r, \theta, z, t$);

– определяющие соотношения обобщенного линейного закона Гука для случая трансверсально-изотропного материала:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta z} &= c_{44}\varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = c_{44}\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{r\theta} = c_{66}\varepsilon_{r\theta},\end{aligned}\tag{2}$$

где $(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta})$ – компоненты тензора малых упругих деформаций; $\{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}, c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2\}$ – отнесенные к нормирующему параметру c_* модули упругости трансверсально-изотропного материала волновода;

– уравнения связи между компонентами тензора малых упругих деформаций и компонентами вектора динамических упругих волновых перемещений

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \partial_r u_r, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = r^{-1}u_r + r^{-1}\partial_\theta u_\theta, \quad \varepsilon_{zz} = \partial_z u_z, \\ \varepsilon_{\theta z} &= \partial_z u_\theta + r^{-1}\partial_\theta u_z, \quad \varepsilon_{rz} = \partial_z u_r + \partial_r u_z, \\ \varepsilon_{r\theta} &= r^{-1}\partial_\theta u_r + (\partial_r - r^{-1})u_\theta;\end{aligned}\tag{3}$$

– граничные условия на внутренней и внешней поверхностях цилиндра, которые в случае одновременно жестко закрепленных или свободных поверхностей, соответственно, имеют вид

$$u_r|_{r=1\pm h} = u_\theta|_{r=1\pm h} = u_z|_{r=1\pm h} = 0;\tag{4}$$

$$\sigma_{rr}|_{r=1\pm h} = \sigma_{r\theta}|_{r=1\pm h} = \sigma_{rz}|_{r=1\pm h} = 0.\tag{5}$$

Полагается, что материал цилиндра является функционально-неоднородным в радиальных направлениях по всем своим физико-механическим свойствам, а его плотность и нормированные модули упругости, соответственно, описываются представлениями

$$\begin{aligned}\rho &= \tilde{\rho} \exp(f_{\lambda,q}(r)), \quad c_j = \tilde{c}_j \exp(f_{\lambda,q}(r)) \quad (j \in \{11, 12, 13, 33, 44, 66\}), \\ f_{\lambda,q}(r) &= \lambda((r-1)/h)^q,\end{aligned}\tag{6}$$

в которых λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) и q ($q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) – параметры функциональной неоднородности.

2. Интегрирование уравнений волнового деформирования и получение дисперсионных уравнений. В исследуемых нормальных волнах с круговой частотой ω , окружным волновым числом n и нормированным параметром R_* , продольным волновым числом k , следуя методу разделения переменных, вводятся комплексные представления

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= \tilde{u}_r^{(n)}(r) \exp(-f_{\lambda,q}(r)/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + ikz), \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= i\tilde{u}_\theta^{(n)}(r) \exp(-f_{\lambda,q}(r)/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + ikz), \\ u_z(r, \theta, z, t) &= i\tilde{u}_z^{(n)}(r) \exp(-f_{\lambda,q}(r)/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + ikz). \end{aligned} \quad (7)$$

Последовательная подстановка представлений (6), (7) в соотношения модели (1)–(3) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно амплитудных составляющих компонент безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений $(\tilde{u}_r^{(n)}, \tilde{u}_\theta^{(n)}, \tilde{u}_z^{(n)})$

$$\begin{aligned} &(\tilde{c}_{11}(r^2 d_r^2 + r d_r - 1) - n^2 \tilde{c}_{66} + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) r^2 + \\ &+ \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} ((1 - qr - \lambda q h^{-q} r (r-1)^q / 2) \tilde{c}_{11} / 2 + (r-1) \tilde{c}_{12})) \tilde{u}_r^{(n)} + \\ &+ (n/2) (\lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (\tilde{c}_{13} - 3\tilde{c}_{12}) / 2 + 3\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12} - (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}) r d_r) \tilde{u}_\theta^{(n)} - \\ &- k r ((\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44}) / 2) \tilde{u}_z^{(n)} = 0, \\ \\ &(n/2) ((\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}) r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (\tilde{c}_{13} - 3\tilde{c}_{12}) / 2 + 3\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12}) \tilde{u}_r^{(n)} + \\ &+ (\tilde{c}_{66}(r^2 d_r^2 + r d_r - 1) - n^2 \tilde{c}_{11} + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) r^2 + \\ &+ \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} (3 - (q+2)r - \lambda q h^{-q} r (r-1)^q / 2) \tilde{c}_{66} / 2) \tilde{u}_\theta^{(n)} - \\ &- k n (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) r \tilde{u}_z^{(n)} = 0, \\ \\ &k r ((\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) (r d_r + 1) - \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44}) / 2) \tilde{u}_r^{(n)} - \\ &- k n (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) r \tilde{u}_\theta^{(n)} + (\tilde{c}_{44}(r^2 d_r^2 + r d_r) - n^2 \tilde{c}_{44} + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33}) r^2 + \\ &+ \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} (1 - qr - \lambda q h^{-q} r (r-1)^q / 2) \tilde{c}_{44} / 2) \tilde{u}_z^{(n)} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\Omega^2 = \tilde{\rho} R_*^2 \omega^2 / c_*$, $d_r = d/dr$. В качестве метода построения общего решения уравнений (8) используем подход, основанный на представлениях искомого решения в виде рядов по обобщенной кольцевой координате [4]. Вводится замена переменных $r = hx + 1$ ($x \in [-1, 1]$). С учетом физической модели рас-

сматриваемой задачи для искомым решений вводятся представления

$$\begin{aligned}\tilde{u}_r^{(n)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+\delta}, & \tilde{u}_\theta^{(n)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{m+\delta}, \\ \tilde{u}_z^{(n)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^{m+\delta} \quad (|a_0| + |b_0| + |d_0| \neq 0)\end{aligned}\quad (9)$$

с допустимыми значениями параметра δ : $\delta \in \{0, 1\}$ либо $\text{Re}(\delta) > 1$. Подстановка разложений (9) в уравнения (8) порождает систему рекуррентных уравнений относительно коэффициентов разложений (9). Для каждого окружного волнового числа n указанная система рекуррентных уравнений имеет шесть независимых базисных решений, которые в матричной форме представляются в виде двух матричных базисных решений

$$\mathbf{U}^{(n,\delta)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^{m+\delta} \mathbf{X}_m^{(n,\delta)} \quad (\delta = 0, 1), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_0^{(n,0)} &= \mathbf{X}_0^{(n,1)} = \mathbf{E}, & \mathbf{X}_1^{(n,0)} &= \mathbf{O}, \\ \mathbf{X}_1^{(n,1)} &= \begin{bmatrix} -h/2 & nh(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12})/(4\tilde{c}_{11}) & kh(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44})/(2\tilde{c}_{11}) \\ -nh(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12})/(4\tilde{c}_{66}) & -h/2 & 0 \\ -kh(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44})/(2\tilde{c}_{44}) & 0 & -h/2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X}_m^{(n,\delta)} &= \sum_{j=1}^4 \mathbf{A}_{m,j}^{(n,\delta)} \mathbf{X}_{m-j}^{(n,\delta)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{A}_{m,5+j}^{(n,\delta)} \mathbf{X}_{m-q-j}^{(n,\delta)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{A}_{m,9+j}^{(n,\delta)} \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(n,\delta)} \\ &\quad (m = 2, 3, \dots).\end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнений (8) с использованием базисных решений (10) записывается в виде

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_r^{(n)}(x) \\ \tilde{u}_\theta^{(n)}(x) \\ \tilde{u}_z^{(n)}(x) \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{(n,0)}(x) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + \mathbf{U}^{(n,1)}(x) \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где p_j ($j = \overline{1, 6}$) – произвольные постоянные. Выше использованы обозначения для квадратных матричных объектов размерности 3: \mathbf{E} – единичная матрица; \mathbf{O} – нулевая матрица; $\mathbf{X}_j^{(n,\delta)} = \mathbf{O}$ ($j = \overline{-\max(2, 2q), -1}$); $\mathbf{A}_{m,j}^{(n,\delta)}$ ($m = \overline{2, \infty}$; $j = \overline{1, 11}$) – матрицы, ненулевые элементы которых имеют следующий вид:

$$\left[\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} = \left[\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = -h(2m + 2\delta - 3)/(m + \delta),$$

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{1,2} &= nh (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}) / (2(m + \delta) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{2,1} &= -nh (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}) / (2(m + \delta) \tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= kh (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= -kh (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta) \tilde{c}_{44}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= -h^2 ((m + \delta - 3)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{11} + \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44} - n^2 \tilde{c}_{66}) / \\
 &\quad / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= -h^2 ((m + \delta - 3)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{66} + \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44} - n^2 \tilde{c}_{11}) / \\
 &\quad / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= -h^2 ((m + \delta - 2)^2 \tilde{c}_{44} + \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33} - n^2 \tilde{c}_{44}) / \\
 &\quad / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{44}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{1,2} &= nh^2 ((m + \delta - 3)(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}) - 4\tilde{c}_{66}) / \\
 &\quad / (2(m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{2,1} &= -nh^2 ((m + \delta - 1)(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}) + 4\tilde{c}_{66}) / \\
 &\quad / (2(m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= 2kh^2 (m + \delta - 2)(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= -kh^2 (2m + 2\delta - 3)(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{44}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{2,3} &= knh^2 (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{3,2} &= knh^2 (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{44}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= -2h^3 (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= -2h^3 (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= -2h^3 (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{44}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= kh^3 (m + \delta - 3)(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= -kh^3 (m + \delta - 2) (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{44}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{2,3} &= knh^3 (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{3,2} &= knh^3 (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{44}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,4}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= -h^4 (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,4}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= -h^4 (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,4}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= -h^4 (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33}) / ((m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{44}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,5}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[\mathbf{A}_{m,5}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[\mathbf{A}_{m,5}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = \\
 &= -\lambda q (q - 1) / (2 (m + \delta) (m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \lambda q h ((2q - 1) \tilde{c}_{11} - 2\tilde{c}_{12}) / (2 (m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= \lambda q h (2q + 1) / (2 (m + \delta) (m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= \lambda q h (2q - 1) / (2 (m + \delta) (m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{1,2} &= -\lambda q k h (\tilde{c}_{11} - 3\tilde{c}_{12}) / (4 (m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{2,1} &= -\lambda q k h (\tilde{c}_{11} - 3\tilde{c}_{12}) / (4 (m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= \lambda q k h (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44}) / (2 (m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= \lambda q k h (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44}) / (2 (m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{44}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \lambda q h^2 (q \tilde{c}_{11} - 2\tilde{c}_{12}) / (2 (m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= \lambda q h^2 (q + 2) / (2 (m + \delta) (m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= \lambda q^2 h^2 / (2 (m + \delta) (m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{1,2} &= -\lambda q n h^2 (\tilde{c}_{11} - 3\tilde{c}_{12}) / (4 (m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{2,1} &= -\lambda q n h^2 (\tilde{c}_{11} - 3\tilde{c}_{12}) / (4 (m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{66}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= \lambda q k h^2 (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= \lambda q k h^2 (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{44}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,8}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= \lambda q k h^3 (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44}) / (2 (m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,8}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= \lambda q k h^3 (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44}) / (2 (m + \delta) (m + \delta - 1) \tilde{c}_{44}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,9}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[\mathbf{A}_{m,9}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[\mathbf{A}_{m,9}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = \lambda^2 q^2 / (4 (m + \delta) (m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,10}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[\mathbf{A}_{m,10}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[\mathbf{A}_{m,10}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = \lambda^2 q^2 h / (2 (m + \delta) (m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,11}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[\mathbf{A}_{m,11}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[\mathbf{A}_{m,11}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = \lambda^2 q^2 h^2 / (4 (m + \delta) (m + \delta - 1)).
 \end{aligned}$$

По аналогии с (7) вводятся представления

$$\begin{aligned}
 \sigma_j(r, \theta, z, t) &= \tilde{\sigma}_j^{(n)}(r) \exp(f_{\lambda,q}(r)/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + ikz) \\
 &\quad (j = rr, \theta\theta, zz, \theta z), \\
 \sigma_j(r, \theta, z, t) &= i\tilde{\sigma}_j^{(n)}(r) \exp(f_{\lambda,q}(r)/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + ikz) \\
 &\quad (j = r\theta, rz),
 \end{aligned} \tag{12}$$

и на основании (2), (3), (7), (10), (11) с учетом замены переменных $r = hx + 1$ определяются два базисных матричных решения:

$$\mathbf{S}^{(n,\delta)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^{m+\delta} \mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \mathbf{X}_m^{(n,\delta)} \quad (\delta = 0, 1) \tag{13}$$

для представления амплитудных составляющих компонент безразмерного тензора напряжений

$$\begin{aligned}
 &\left[\tilde{\sigma}_{rr}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(n)}(x) \right]^T = \\
 &= \mathbf{S}^{(n,0)}(x) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + \mathbf{S}^{(n,1)}(x) \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

В (13) $\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x)$ – матричные функции размерности 6×3 , элементы которых имеют вид

$$\left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{1,1} = ((m + \delta)/x - \lambda q x^{q-1}/2) \tilde{c}_{11}/h + \tilde{c}_{12}/(hx + 1),$$

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{1,2} &= -n\tilde{c}_{12}/(hx+1), & \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{1,3} &= -k\tilde{c}_{13}, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{2,1} &= ((m+\delta)/x - \lambda qx^{q-1}/2) \tilde{c}_{12}/h + \tilde{c}_{11}/(hx+1), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{2,2} &= -n\tilde{c}_{11}/(hx+1), & \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{2,3} &= -k\tilde{c}_{13}, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{3,1} &= ((m+\delta)/x - \lambda qx^{q-1}/2) \tilde{c}_{13}/h + \tilde{c}_{13}/(hx+1), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{3,2} &= -n\tilde{c}_{13}/(hx+1), & \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{3,3} &= -k\tilde{c}_{33}, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{4,1} &= 0, & \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{4,2} &= -k\tilde{c}_{44}, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{4,3} &= -n\tilde{c}_{44}/(hx+1), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{5,1} &= k\tilde{c}_{44}, & \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{5,2} &= 0, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{5,3} &= ((m+\delta)/x - \lambda qx^{q-1}/2) \tilde{c}_{44}/h, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{6,1} &= n\tilde{c}_{66}/(hx+1), & \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{6,3} &= 0, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{6,2} &= ((m+\delta)/x - \lambda qx^{q-1}/2) \tilde{c}_{66}/h - \tilde{c}_{66}/(hx+1).
 \end{aligned}$$

Специальный вид комплексных представлений для функций нормированных упругих перемещений в форме (7) обуславливает при $m \rightarrow \infty$ справедливость оценок

$$\left\| \mathbf{A}_{m,j}^{(n,\delta)} \right\| \leq \kappa_j \quad (j = \overline{1,2}), \quad \left\| \mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right\| \leq \kappa_3/m, \quad \left\| \mathbf{A}_{m,j}^{(n,\delta)} \right\| \leq \kappa_j/m^2 \quad (j = \overline{4,11}),$$

непосредственным следствием которых является заключение об абсолютной и равномерной сходимости разложений (10), (13) на отрезке $x \in [-1, 1]$.

Для амплитудных составляющих компонент безразмерного тензора напряжений на площадках цилиндрических граничных поверхностей волновода вводится представление

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{rr}^{(n)}(x) \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(n)}(x) \\ \tilde{\sigma}_{rz}^{(n)}(x) \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,0)}(x) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + \mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,1)}(x) \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где $\mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,\delta)}(x)$ – квадратные матричные функции размерности 3, составленные из соответствующих строк базисных матричных решений $\mathbf{S}^{(n,\delta)}(x)$. Подстановка представлений (11) или (15) в граничные условия соответственно (4)

или (5) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений шестого порядка относительно произвольных постоянных p_j ($j = \overline{1, 6}$), порождающей искомые дисперсионные уравнения, соответственно, для жестко закрепленных

$$F_U(\Omega, k) = \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(n,0)}(-1) & \mathbf{U}^{(n,1)}(-1) \\ \mathbf{U}^{(n,0)}(1) & \mathbf{U}^{(n,1)}(1) \end{bmatrix} \right) = 0$$

и свободных

$$F_S(\Omega, k) = \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,0)}(-1) & \mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,1)}(-1) \\ \mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,0)}(1) & \mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,1)}(1) \end{bmatrix} \right) = 0$$

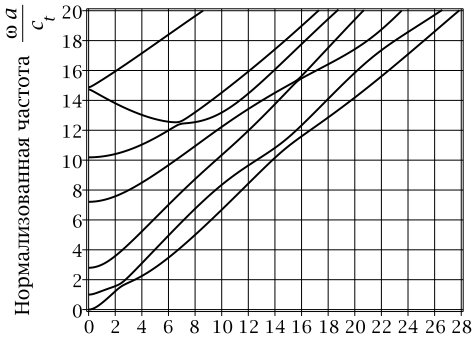
граничных поверхностей цилиндра.

3. Анализ результатов численного эксперимента. При численном исследовании факторов влияния параметров радиальной неоднородности (λ, q) и значений окружного волнового числа n на топологическую картину спектра бегущих нормальных волн в качестве базового радиально однородного $(\lambda, q) = (0, 0)$ был выбран конкретный трансверсально-изотропный материал цилиндра Zn ($c_* = 10^{10}$ Н/м²)

$$\{\tilde{c}_{11} = 16, 35; \tilde{c}_{12} = 2, 64; \tilde{c}_{13} = 5, 17; \tilde{c}_{33} = 5, 31; \tilde{c}_{44} = 3, 78; \tilde{\rho} = 7134 \text{ кг/м}^3\}.$$

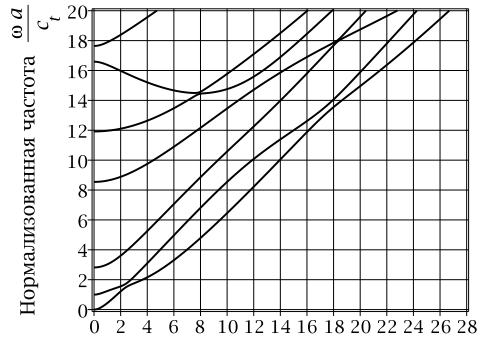
Расчет фрагментов спектров бегущих нормальных волн в полном свободном цилиндре проводился для окружного волнового числа $n = 1$ в диапазонах изменения нормализованной частоты $\omega a/c_t \in [0; 20]$ и нормализованного продольного волнового числа $ka \in [0; 30]$ ($a = R_*$) для случаев однородного и неоднородного $(\lambda, q) \in \{(\ln(2), 6), (-\ln(2), 6), (\ln(2), 7)\}$ материала цилиндра нормированной толщины $2h = 0, 4$ со свободными граничными поверхностями. На рис. 1 и рис. 2 представлены спектры распространяющихся нормальных волн для неоднородных волноводов с параметрами, соответственно, $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$ и $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$.

Нормирующий параметр c_t с размерностью скорости для всех рисунков представленного исследования имеет фиксированное значение, определяемое из условия равенства единице низшей ненулевой нормализованной критической частоты (мода с порядковым номером в спектре 2) в случае однородного волновода $(\Omega_{0,0}^{(2)}(0) \approx 1.956596)$. Сравнительный анализ спектров для рассмотренных параметров неоднородности материала показывает относительную стабильность общей качественной топологической картины мод распространяющихся волн, при этом отмечается локальное количественное влияние на характер поведения отдельных мод. Для анализа указанных количественных различий используется функция сравнения парных по номеру в



Нормализованное волновое число ka

Рис. 1. Дисперсионный спектр для неоднородного свободного цилиндра $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$ при $n = 1, h = 0.2$.



Нормализованное волновое число ka

Рис. 2. Дисперсионный спектр для неоднородного свободного цилиндра $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$ при $n = 1, h = 0.2$.

соответствующих спектрах мод $\Delta\Omega(k) = (\omega_{\lambda,q}(k) - \omega_{0,0}(k))a/c_t$. Результаты для участвующих в сравнении пар волноводов однородный – неоднородный цилиндр представлены для пяти низших мод, порядковый номер сопоставляемых мод визуализировался своим типом линии. Ниже приведены результаты сравнений для пар волноводов, когда неоднородный материал в соответствующей паре задавался параметрами $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$ (рис. 3) и $(\lambda, q) = (\ln(2), 7)$ (рис. 4).

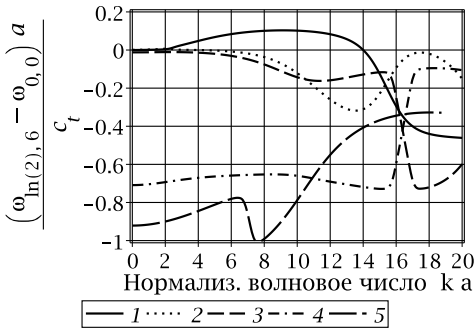


Рис. 3. Сравнительный анализ дисперсионных спектров для однородного и неоднородного $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$ цилиндров.



Рис. 4. Сравнительный анализ дисперсионных спектров для однородного и неоднородного $(\lambda, q) = (\ln(2), 7)$ цилиндров.

В качестве основных результатов отмечается, что неоднородность вида $(\lambda, q) = (\pm \ln(2), 6)$ практически не сказывается на поведении трех низших мод в длинноволновом диапазоне $ka \in [0; 2]$, в то время, как на старшие моды влияние существенным образом сказывается на всем исследованном диапазоне волнового числа. При этом отмеченное влияние проявляется, в первую

очередь, в системном смещении указанных мод в область меньших частот $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$ и, соответственно, больших частот $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$. Влияние неоднородности вида $(\lambda, q) = (\ln(2), 7)$ выявлено в гораздо меньшей степени, преимущественно для двух низших мод и только, начиная с $ka > 14$. На рис. 5 и рис. 6 представлены графики нормализованных фазовых скоростей бегущих нормальных волн в цилиндрах, материал которых имеет параметры неоднородности, соответственно, $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$ и $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$.

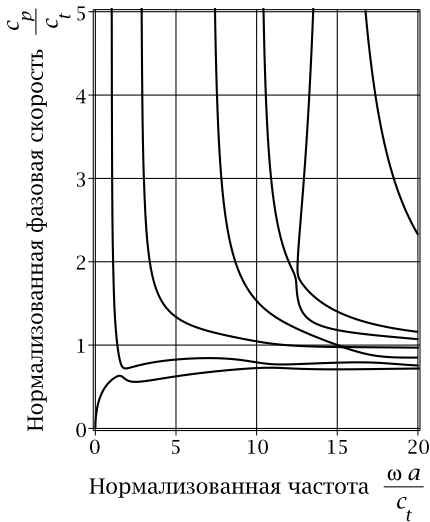


Рис. 5. Расчет фазовых скоростей для неоднородного свободного цилиндра $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$ при $n = 1, h = 0.2$.

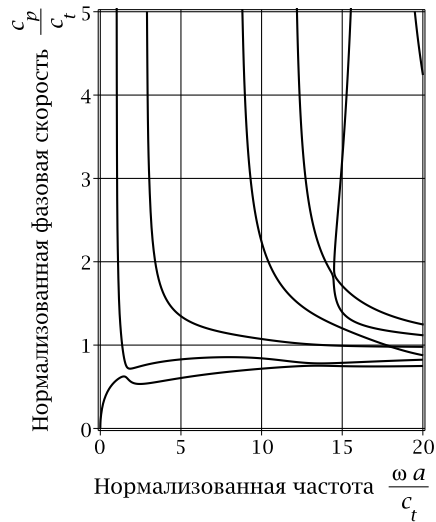


Рис. 6. Расчет фазовых скоростей для неоднородного свободного цилиндра $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$ при $n = 1, h = 0.2$.

Наибольшее влияние радиальной неоднородности на картину распределения фазовых скоростей выявлено в случаях $(\lambda, q) = (\pm \ln(2), 6)$ для мод, начиная с четвертой, в то время, как для случая неоднородности $(\lambda, q) = (\ln(2), 7)$ в исследованной области частот визуальных различий с картиной распределения фазовых скоростей для однородного цилиндра не наблюдалось. На рис. 7 и рис. 8 представлены графики нормализованных групповых скоростей бегущих нормальных волн в цилиндрах, материал которых имеет параметры $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$ и $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$ соответственно.

Наибольшее влияние неоднородности материала волновода проявилось на распределении групповых скоростей мод на участках существования обратной волны именно для представленных типов неоднородности. Так, для шестой моды область отрицательных значений групповой скорости при локализованном увеличении физико-механических параметров материала цилиндра к его граничным поверхностям (рис. 7) сместилась в сторону уменьшения частоты с одновременным увеличением абсолютных значений групповой скорости, в то время, как локализованное уменьшение физико-механических

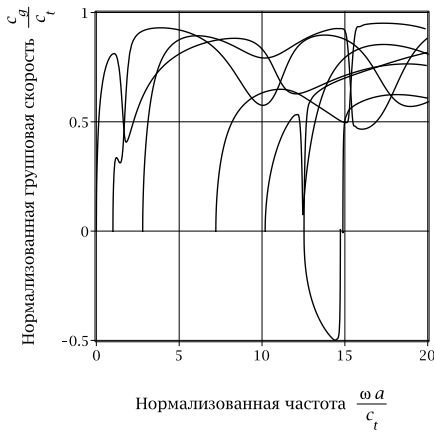


Рис. 7. Расчет групповых скоростей для неоднородного свободного цилиндра $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$ при $n = 1, h = 0.2$.

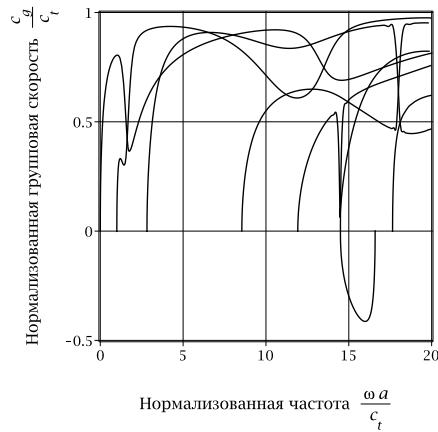


Рис. 8. Расчет групповых скоростей для неоднородного свободного цилиндра $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$ при $n = 1, h = 0.2$.

параметров материала цилиндра к его граничным поверхностям (рис. 8) привело к обратному эффекту. Асимметричный относительно серединной поверхности цилиндра характер радиальной неоднородности $(\lambda, q) = (\ln(2), 7)$ практически не сказался на топологической картине распределения групповых скоростей в исследованном диапазоне частот.

Выводы. В форме абсолютно и равномерно сходящихся степенных рядов с определяемыми из явных рекуррентных соотношений матричными коэффициентами построено общее решение системы дифференциальных уравнений математической модели, описывающей неосесимметричные нормальные волны в протяженных полых цилиндрах концентрического кольцевого сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью физико-механических параметров трансверсально-изотропного материала. Получены дисперсионные уравнения, определяющие спектры указанных волн для случаев одновременно жестко закрепленных и свободных граничных поверхностей. Изучены эффекты влияния параметров радиальной неоднородности на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей распространяющихся нормальных волн. Области использования результатов представленного исследования являются прочностные расчеты деталей машин, технологии ультразвуковой диагностики, акустоэлектроника.

1. *Mirsky I.* Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders. Part I: Theory. Part II: Numerical Results // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1965. – **37**. – P. 1016–1026.
2. *Моисеенко И.А.* Волны кручения вдоль полого экспоненциально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра с закрепленными границами // *Механика твердого тела.* – 2014. – Вып. 44. – С. 132–139.

3. Моисеенко И.А., Моисеенко В.А. Спектры продольных волн в функционально-градиентных трансверсально-изотропных цилиндрах с жидкостным заполнением // Вестн. Донецк. национального ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – № 2. – С. 17–28.
4. Шульга Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре // Прикл. механика. – 1974. – 10, № 9. – С. 14–18.

I.A. Moiseyenko

The spectra of non-axisymmetric normal elastic waves in functionally graded transversely isotropic hollow cylinders

The wave motion is described on the basis of a complete system of linear dynamical equations of elasticity theory. The elastic modules and density of the cylinder material are taken as a exponentially-power function of the radial coordinate. The general solution of a system of differential equations of the model is constructed for an arbitrary wavenumber circular in the form of expansions of radial components of the solution in a uniformly and absolutely convergent matrix series on generalized ring coordinate. Dispersion relations describing the harmonic spectra of non-axisymmetric normal waves for both cases of free or rigidly fixed boundary surfaces are obtained. The effect of radial non-homogeneity ratios on the topology of the dispersion spectrums, distribution of the phase and group velocities of normal propagating waves studied.

Keywords: *FGMs; transversely isotropic; hollow cylinder; wave propagation; dispersion curves.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный ун-т”
mian@i.ua

Получено 17.06.16