

УДК 531.38; 533.6

©2015. С.Н. Судаков

## УСТАНОВИВШИЙСЯ СПУСК АВТОРОТИРУЮЩИХ АНАЛОГОВ КРЫЛАТОК

Исследована авторотация свободно падающих в воздухе пластинок, имеющих специальную форму и специальное распределение масс, подобные форме и распределению масс семян клена. Получены уравнения, описывающие установившуюся авторотацию пластинки. С их помощью рассмотрены две задачи. Первая состоит в выяснении вопроса о возможности совершения авторотации пластинкой с заданными массово-геометрическими параметрами. Вторая заключается в нахождении распределения масс, при котором пластинка заданной формы и размеров может совершать установившуюся авторотацию.

**Ключевые слова:** авторотация, семена клена, крылатка, монокоптер.

Хорошо известно, что крылатки (семена клена и некоторых других растений) при падении легко приходят в состояние авторотации и сохраняют этот режим до конца своего падения. Это явление изучалось многими учеными [1–5]. Однако ряд вопросов остался неисследованным. В то же время возник и успешно развивается новый класс летательных аппаратов – монокоптеры, использующие принцип полета крылаток [6–8]. Поэтому представляется интересным проведение дальнейших исследований по этой проблеме.

В настоящей работе для исследования авторотации крылаток и их искусственных аналогов используются подходы, предложенные Н.Е. Жуковским при исследовании самовращения круговых секторов в потоке воздуха [9].

Отметим, что приводимые ниже результаты являются расширенным изложением доклада [4].

**1. Уравнения установившихся движений.** Будем изучать установившиеся авторотационные вращения плоской пластинки, изображенной на рис. 1. Пластины такой формы при правильно подобранных моментах инерции и весе легко входят в авторотационный режим вращения. К пластинке прикреплены два грузика, обозначенные на рис. 1 штриховкой. Грузик, прикрепленный к узкому краю пластинки, имеет значительную массу, так что центр масс всей системы (точка  $O$ ) располагается недалеко от него. Вторым грузиком, расположенным на передней кромке пластинки, имеет относительно небольшую массу. При падении пластинка совершает авторотационные вращения против часовой стрелки. В центре масс  $O$  может располагаться дополнительный грузик, обладающий незначительными моментами инерции. Добавление дополнительного грузика приводит к возрастанию скоростей вращения и снижению пластинки.

Обозначим через  $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$  неподвижную систему координат, ось  $O_1\zeta_1$  которой направлена вертикально вверх. Будем считать, что центр масс  $O$  пластинки при снижении в режиме авторотации движется вдоль оси  $O_1\zeta_1$ .

**Замечание.** Сделав предположение о движении центра масс вдоль оси  $O_1\zeta_1$ , мы заменяем исходную задачу с шестью степенями свободы задачей с четырьмя степенями свободы, которую можно для наглядности интерпретировать так. В центре масс пластинки имеется маленькое отверстие, через которое пройдет тонкий абсолютно твердый стержень, закрепленный вертикально. При спуске авторотирующая пластинка скользит вдоль этого стержня без трения.

Такая замена исходной задачи другой, более простой, целесообразна на начальном этапе исследования. В дальнейшем будет необходимо вернуться к исходной задаче.

Через  $O\xi\eta\zeta$  обозначим систему координат, начало  $O$  которой расположено в центре масс, а ось  $O\zeta$  лежит на оси  $O_1\zeta_1$ . Вся система координат  $O\xi\eta\zeta$  вращается вместе с пластинкой вокруг оси  $O_1\zeta_1$  так, что линия пересечения плоскости  $O\eta\zeta$  с плоскостью пластинки всегда будет параллельна ее передней кромке. Через  $Oxyz$  обозначим оси, жестко связанные с пластинкой. Начало осей  $O$  совпадает с центром масс системы, ось  $Oz$  направлена ортогонально плоскости пластинки, а ось  $Oy$  лежит в плоскости пластинки и направлена в сторону ее широкого края параллельно передней кромке. Положение осей  $Oxyz$  относительно  $O\xi\eta\zeta$  определим углами Крылова  $\alpha, \beta$  (рис. 2). Если оси  $Oxyz$  совпадают с осями  $O\xi\eta\zeta$ , то перевод их в новое положение осуществляется поворотом вокруг оси  $Ox$  на угол  $\alpha$ , потом поворотом вокруг оси  $Oy$  на угол  $\beta$ . В теории вертолета принято называть:  $\alpha$  – угол взмаха лопасти и  $\beta$  – угол установки лопасти. Положение осей  $O\xi\eta\zeta$  относительно  $O\xi_1\eta_1\zeta_1$  определяется координатой  $\zeta_1$  точки  $O$  на оси  $O_1\zeta_1$  и углом поворота осей  $O\xi\eta\zeta$  вокруг оси  $O_1\zeta_1$ .

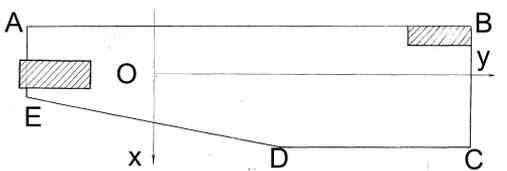


Рис. 1

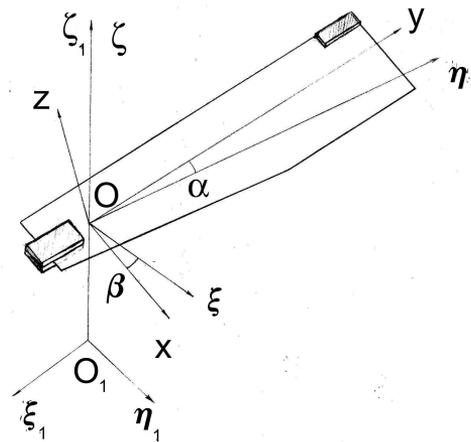


Рис. 2

Уравнения движения пластинки вокруг точки  $O$  в связанных осях  $Oxyz$

имеют вид

$$\dot{G}_x + \omega_y G_z - \omega_z G_y = M_x \quad (xyz), \quad (1)$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции угловой скорости пластинки на оси  $Oxyz$ ;  $M_x, M_y, M_z$  – проекции момента аэродинамических сил относительно точки  $O$  на оси  $Oxyz$ ;  $G_x, G_y, G_z$  – проекции кинетического момента пластинки относительно точки  $O$  на оси  $Oxyz$ , которые определяются формулами

$$G_x = J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z \quad (xyz). \quad (2)$$

Здесь  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, J_{xy} = J_{yx}, J_{yz} = J_{zy}, J_{zx} = J_{xz}$  – моменты инерции пластинки в осях  $Oxyz$ . Символ  $(xyz)$  означает, что остальные соотношения получаются из записанного круговой перестановкой индексов  $x, y, z$ .

Поскольку нас интересуют установившиеся режимы движения, при которых пластинка равномерно вращается вокруг оси  $O_1\zeta_1$ , то в уравнениях (1) надо положить

$$\dot{G}_x = 0 \quad (xyz). \quad (3)$$

Обозначая проекцию угловой скорости пластинки на ось  $O\zeta$  через  $\omega$ , находим

$$\omega_x = -\omega \cos \alpha \sin \beta, \quad \omega_y = \omega \sin \alpha, \quad \omega_z = \omega \cos \alpha \cos \beta. \quad (4)$$

Используя выражения (2)–(4), представим уравнения (1) в виде

$$\begin{aligned} & \omega^2[(J_{zx} \cos \alpha \sin \beta - J_{zy} \sin \alpha + J_{zz} \cos \alpha \cos \beta) \sin \alpha - \\ & - (J_{yx} \cos \alpha \sin \beta + J_{yy} \sin \alpha - J_{yz} \cos \alpha \cos \beta) \cos \alpha \cos \beta] = M_x, \\ & \omega^2[(-J_{xx} \cos \alpha \sin \beta - J_{xy} \sin \alpha - J_{xz} \cos \alpha \cos \beta) \cos \alpha \cos \beta + \\ & + (J_{zx} \cos \alpha \sin \beta - J_{zy} \sin \alpha + J_{zz} \cos \alpha \cos \beta) \cos \alpha \sin \beta] = M_y, \quad (5) \\ & \omega^2[-(J_{yx} \cos \alpha \sin \beta + J_{yy} \sin \alpha - J_{yz} \cos \alpha \cos \beta) \cos \alpha \sin \beta + \\ & + (J_{xx} \cos \alpha \sin \beta + J_{xy} \sin \alpha + J_{xz} \cos \alpha \cos \beta) \sin \alpha] = M_z. \end{aligned}$$

Как было отмечено выше, мы будем полагать, что центр масс  $O$  движется по оси  $O_1\zeta_1$ . Уравнение движения центра масс имеет вид  $m\dot{v} = F_\zeta - mg$ , где  $v$  – скорость движения центра масс вдоль оси  $O_1\zeta_1$ ,  $m$  – масса пластинки с грузиками;  $g$  – ускорение свободного падения,  $F_\zeta$  – проекция главного вектора аэродинамических сил на ось  $O_1\zeta_1$ . Учитывая, что мы рассматриваем установившееся движение, имеем  $\dot{v} = 0$ , и из уравнения движения центра масс следует

$$F_\zeta = mg. \quad (6)$$

**2. Аэродинамические силы и моменты.** Теперь необходимо определить силу  $F_\zeta$  и момент  $(M_x, M_y, M_z)$ . Для этого воспользуемся теорией элемента лопасти [10]. Для упрощения расчетов будем учитывать влияние свободных вихрей по импульсной теории [10]. Такой подход вносит определенную погрешность, однако его целесообразно использовать для качественного изучения проблемы на первоначальном этапе исследования.

Проекция на оси  $O\xi\eta\zeta$  скорости набегающего на лопасть потока определяются формулами  $v_\xi = \omega\eta$ ,  $v_\eta = -\omega\xi$ ,  $v_\zeta = v$ , где  $(v_\xi, v_\eta, v_\zeta)$  – проекции скорости потока. Поскольку на оси  $Oy$  выполняется равенство  $\xi = 0$ , то на этой оси будем иметь

$$v_\xi = \omega\eta, \quad v_\eta = 0, \quad v_\zeta = v. \quad (7)$$

Используя матрицу косинусов углов между осями  $O\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$  и учитывая, что вдоль оси  $Oy$  выполняется соотношение  $\eta = y \cos \alpha$ , перепроектируем скорость (7) на оси  $Oxyz$ :

$$v_x = (\omega y \cos \beta - v \sin \beta) \cos \alpha, \quad v_y = v \sin \alpha, \quad v_z = (\omega y \sin \beta + v \cos \beta) \cos \alpha.$$

Теперь можно ввести для каждого сечения пластинки плоскостью  $y = \text{const}$  скорость потока в бесконечности по формулам

$$v_x = (\omega y \cos \beta - v \sin \beta) \cos \alpha, \quad v_z = (\omega y \sin \beta + v \cos \beta) \cos \alpha. \quad (8)$$

Как известно [11], центр давления аэродинамических сил для каждого поперечного сечения пластинки расположен на расстоянии одной четверти ширины пластинки от передней кромки, а проекции результирующей аэродинамической силы, отнесенной к единице длины, на оси  $Oxyz$  определяются формулами  $R_x = -2\pi\rho cv_z^2$ ,  $R_y = 0$ ,  $R_z = 2\pi\rho cv_x v_z$ , где  $\rho$  – плотность воздуха,  $c$  – половина ширины пластинки. Используя выражения (8), представим последние формулы в виде

$$\begin{aligned} R_x(y) &= -2\pi\rho c(y)(\omega y \sin \beta + v \cos \beta)^2 \cos^2 \alpha, \quad R_y = 0, \\ R_z(y) &= 2\pi\rho c(y)(\omega y \cos \beta - v \sin \beta)(\omega y \sin \beta + v \cos \beta) \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение для момента аэродинамических сил записывается в виде

$$\mathbf{M}^* = \int_{y_1}^{y_k} \mathbf{r}(y) \times \mathbf{R}(y) dy,$$

где  $\mathbf{R}(y)$  – вектор с компонентами (9),  $\mathbf{r}(y)$  – вектор, проведенный из центра масс  $O$  в точку приложения вектора  $\mathbf{R}(y)$ ,  $y_k$  – значение  $y$ , соответствующее широкому концу пластинки,  $y_1 > 0$  – значение координаты  $y$  на некотором расстоянии от центра масс  $O$ . Задавая нижний предел интегрирования положительным, мы тем самым исключаем из рассмотрения часть пластинки,

окружающую центр масс  $O$ . Учитывая, что центр давления для пластинки расположен на одной четверти ее хорды от передней кромки, запишем выражение для проекций  $\mathbf{r}(y)$  на оси  $Oxyz$ :  $r_x = 0,5c(y) - c_1$ ,  $r_y = y$ ,  $r_z = 0$ , где  $-c_1$  – координата  $x$  точек передней кромки пластинки. Тогда проекции вектора  $\mathbf{M}^*$  на оси  $Oxyz$  будут иметь вид

$$M_x^* = \int_{y_1}^{y_k} y R_z(y) dy, \quad M_y^* = -0,5 \int_{y_1}^{y_k} [c(y) - 2c_1] R_z(y) dy, \quad M_z^* = - \int_{y_1}^{y_k} y R_x(y) dy.$$

Используя (9), представим эти выражения в виде

$$\begin{aligned} M_x^* &= (a_3 \omega^2 \sin \beta \cos \beta + a_2 \omega v \cos 2\beta - a_1 v^2 \cos \beta \sin \beta) \cos^2 \alpha, \\ M_y^* &= -(b_2 \omega^2 \sin \beta \cos \beta - b_1 \omega v \cos 2\beta + b_0 v^2 \cos \beta \sin \beta) \cos^2 \alpha, \\ M_z^* &= (a_3 \omega^2 \sin^2 \beta + a_2 \omega v \sin^2 \beta + a_1 v^2 \cos^2 \beta) \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= 2\pi\rho \int_{y_1}^{y_k} c(y) y^n dy, \quad n = 1, \dots, 3, \\ b_n &= \pi\rho \int_{y_1}^{y_k} [c(y) - 2c_1] c(y) y^n dy, \quad n = 0, \dots, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь запишем выражение для момента сил, создаваемых профильным сопротивлением. Будем считать, что сечения пластинки обтекаются потоком, имеющим в бесконечности скорость с компонентами (8), а течением вдоль оси  $Oy$  пренебрегаем. Тогда на каждый элемент пластинки будет действовать направленная по потоку сила профильного сопротивления  $Qdy = C_D(\theta)c(y)\rho V^2 dy$ , где  $V = \sqrt{\omega^2 y^2 + v^2} \cos \alpha$  [10]. Будем считать, что эта сила приложена к оси  $Oy$ . Тогда выражение для момента будет иметь вид

$$\mathbf{M}^D = \int_{y_1}^{y_k} \mathbf{r} \times \mathbf{Q} dy,$$

где  $\mathbf{r} = (0, y, 0)$ ,  $|\mathbf{Q}| = Q$  и направление вектора  $\mathbf{Q}$  совпадает с направлением скорости (8). Проекция вектора  $\mathbf{M}^D$  на оси  $Oxyz$  будут

$$M_x^D = \rho \cos^2 \alpha \int_{y_1}^{y_k} C_D(\theta) c(y) y (\omega y \sin \beta + v \cos \beta) \sqrt{\omega^2 y^2 + v^2} dy, \quad M_y^D = 0, \quad (12)$$

$$M_z^D = -\rho \cos^2 \alpha \int_{y_1}^{y_k} C_D(\theta) c(y) y (\omega y \cos \beta - v \sin \beta) \sqrt{\omega^2 y^2 + v^2} dy,$$

где

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y \sin \beta + (v/\omega) \cos \beta}{y \cos \beta - (v/\omega) \sin \beta}.$$

Коэффициент  $C_D(\theta)$  определяется экспериментально и имеет достаточно сложную зависимость от угла  $\theta$ . Учитывая, что нами внесена в задачу погрешность, обусловленная способом учета влияния свободных вихрей, целесообразно на первоначальном этапе исследования упростить и выражения (12) так, чтобы упростить решение задачи. С этой целью положим  $C_D(\theta) = \text{const}$  и будем вычислять  $M_x^D, M_y^D, M_z^D$  при  $v = 0$ . Получаем

$$M_x^D = \kappa \omega^2 \cos^2 \alpha \sin \beta, \quad M_y^D = 0, \quad M_z^D = -\kappa \omega^2 \cos^2 \alpha \cos \beta, \quad (13)$$

где  $\kappa = C_D a_3 / 2\pi$ . Для  $M_x, M_y, M_z$  будем иметь

$$M_x = M_x^* + M_x^D, \quad M_y = M_y^*, \quad M_z = M_z^* + M_z^D. \quad (14)$$

Теперь вычислим вертикальную составляющую  $F_\zeta$  аэродинамических сил. Проекции результирующей аэродинамических давлений на оси  $Oxyz$  будут следующие

$$F_x = \int_{y_1}^{y_k} R_x(y) dy, \quad F_y = 0, \quad F_z = \int_{y_1}^{y_k} R_z(y) dy.$$

Учитывая (9) и (11), перепишем эти выражения в виде

$$F_x = -(a_2 \omega^2 \sin^2 \beta + a_1 \omega v \sin 2\beta + a_0 v^2 \cos^2 \beta) \cos^2 \alpha, \quad F_y = 0,$$

$$F_z = (a_2 \omega^2 \cos \beta \sin \beta + a_1 \omega v \cos 2\beta - a_0 v^2 \cos \beta \sin \beta) \cos^2 \alpha.$$

Проектируя результирующую на ось  $O\zeta$ , находим

$$F_\zeta = (a_2 \omega^2 \sin \beta + a_1 \omega v \cos^3 \beta) \cos^3 \alpha. \quad (15)$$

Уравнения (5), (6) вместе с выражениями для моментов сил (10), (13), (14) и силы (15) описывают равномерные авторотационные вращения пластинки. Перепишем эти уравнения, подставив в них выражения для сил и моментов

$$\begin{aligned} & (J_{zx} \sin \beta - J_{zy} \operatorname{tg} \alpha + J_{zz} \cos \beta) \operatorname{tg} \alpha - (J_{yx} \sin \beta + J_{yy} \operatorname{tg} \alpha - J_{yz} \cos \beta) \cos \beta = \\ & = \kappa \sin \beta + a_3 \sin \beta \cos \beta + a_2 \frac{v}{\omega} \cos 2\beta - a_1 \left( \frac{v}{\omega} \right)^2 \cos \beta \sin \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(J_{xx} \sin \beta + J_{xy} \operatorname{tg} \alpha + J_{xz} \cos \beta) \cos \beta + (J_{zx} \sin \beta - J_{zy} \operatorname{tg} \alpha + J_{zz} \cos \beta) \sin \beta = \\
 & = -b_2 \sin \beta \cos \beta - b_1 \frac{v}{\omega} \cos 2\beta + b_0 \left( \frac{v}{\omega} \right)^2 \cos \beta \sin \beta, \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(J_{yx} \sin \beta + J_{yy} \operatorname{tg} \alpha - J_{yz} \cos \beta) \sin \beta + (J_{xx} \sin \beta + J_{xy} \operatorname{tg} \alpha + J_{xz} \cos \beta) \operatorname{tg} \alpha = \\
 & = -\varkappa \cos \beta + a_3 \sin^2 \beta + 2a_2 \frac{v}{\omega} \sin \beta \cos \beta + a_1 \left( \frac{v}{\omega} \right)^2 \cos^2 \beta, \\
 & \omega^2 (a_2 \sin \beta + a_1 \frac{v}{\omega} \cos^3 \beta) \cos^3 \alpha = mg.
 \end{aligned}$$

Используя уравнения (16), рассмотрим две задачи.

**3. Формулировка и решение задачи 1.** Прежде всего нас будет интересовать решение следующей проблемы.

**Задача 1.** Выяснить вопрос о существовании равномерных авторотационных вращений пластинки заданной формы с известной массой, центром масс и тензором инерции. В случае существования таких движений, вычислить для них  $v, \omega, \alpha, \beta$ .

**Решение.** Введя обозначения

$$\tilde{x} = v/\omega, \quad \tilde{y} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (17)$$

представим первые три уравнения (16) в виде

$$\begin{aligned}
 & \tilde{x}^2 a_1 \sin \beta \cos \beta - \tilde{y}^2 J_{zy} - \tilde{x} a_2 \cos 2\beta + \tilde{y} [J_{zx} \sin \beta + (J_{zz} - J_{yy}) \cos \beta] - \\
 & - (J_{yx} \sin \beta - J_{yz} \cos \beta) \cos \beta - \varkappa \sin \beta - a_3 \sin \beta \cos \beta = 0, \\
 & \tilde{x}^2 b_0 \sin \beta \cos \beta - \tilde{x} b_1 \cos 2\beta - b_2 \sin \beta \cos \beta + \tilde{y} (J_{xy} \cos \beta + J_{zy} \sin \beta) + \\
 & + (J_{xx} \sin \beta + J_{xz} \cos \beta) \cos \beta - (J_{zx} \sin \beta + J_{zz} \cos \beta) \sin \beta = 0, \quad (18) \\
 & \tilde{x}^2 a_1 \cos^2 \beta - \tilde{y}^2 J_{xy} + 2\tilde{x} a_2 \sin \beta \cos \beta + \tilde{y} [(J_{yy} - J_{xx}) \sin \beta - J_{xz} \cos \beta] + \\
 & + (J_{yx} \sin \beta - J_{yz} \cos \beta) \sin \beta - \varkappa \cos \beta + a_3 \sin^2 \beta = 0.
 \end{aligned}$$

Задача сводится к нахождению действительных корней  $\tilde{x}, \tilde{y}, \beta$  системы (18), удовлетворяющих условиям

$$\tilde{x} > 0, \quad \tilde{y} \geq 0, \quad \beta_1 < \beta < \beta_2, \quad (19)$$

где  $\beta_1 > -\pi/2$ ,  $\beta_2 < \pi/2$  – некоторые числа, выбираемые из тех соображений, что при авторотации вертикаль пересекает плоскость пластинки. Первое условие (19) следует из того, что пластинка, имея вид, изображенный на рис. 1, при падении должна вращаться против часовой стрелки (при виде сверху), то есть  $\omega > 0$ . Второе условие принято потому, что в экспериментах

у пластинок, совершающих равномерные авторотационные вращения, тяжелый конец никогда не располагается выше легкого.

Для решения системы (18) заметим, что каждое входящее в нее уравнение при фиксированном  $\beta$  определяет в плоскости  $O\tilde{x}\tilde{y}$  кривую второго порядка. Решению системы (18) соответствует значение  $\beta$ , при котором все три кривые пересекутся в одной точке. Это значение  $\beta$  можно найти, разбив отрезок  $[\beta_1, \beta_2]$  на  $n$  равных частей и построив для каждой точки деления упомянутые кривые. Для этого удобно использовать компьютер.

Когда значения  $\tilde{x}, \tilde{y}, \beta$  будут найдены, можно вычислить  $\omega, v, \alpha$ . Из второго равенства (17) находим  $\alpha = \arctg y$ . Учитывая первое равенство (17), из последнего равенства (16) получаем

$$\omega = \sqrt{mg(a_2 \sin \beta + a_1 \tilde{x} \cos^3 \beta)^{-1} \cos^{-3} \alpha}.$$

Далее, из первого уравнения (17) находим  $v = \tilde{x}\omega$ . Найденные величины  $\alpha, \beta, \omega, v$  полностью описывают авторотационные вращения пластинки. Скорость снижения пластинки  $v_*$  относительно оси  $O_1\zeta_1$  определяется равенством

$$v_* = -v. \quad (20)$$

Равенство (20) получилось вследствие того, что мы пренебрегли влиянием свободных вихрей. Это внесло определенную погрешность. Используя импульсную теорию винта, можно уточнить значение  $v_*$ . Для этого заметим, что при решении задачи скорость снижения пластинки  $v_*$  нигде не использовалась. Поэтому можно попытаться найти  $v_*$ , используя найденное значение  $v$  и импульсную теорию.

Согласно импульсной теории, для струи воздуха, протекающей через ометаемую вращающейся пластинкой поверхность, должны выполняться соотношения [12]

$$v_1 + v_0 = 2v, \quad \rho Av(v_1 - v_0) = -mg, \quad (21)$$

где  $A = \pi(y_k \cos \alpha)^2$  – площадь проекции ометаемой пластинкой поверхности на плоскость  $O\xi\eta$ ,  $v_0$  и  $v_1$  – вертикальные составляющие скорости струи относительно пластинки соответственно ниже и выше ее, причем

$$v_* = -v_0. \quad (22)$$

Из системы (21) находим

$$v_0 = v + \frac{mg}{2\rho Av}, \quad v_1 = v - \frac{mg}{2\rho Av}. \quad (23)$$

При  $v_1 > 0$  соотношение (22) и первое равенство (23) определяют скорость снижения пластинки. При  $v_1 < 0$  будет реализовываться режим турбулентного следа [10]. В этом случае для уточнения необходимо использовать вихревую теорию.

Изложенный подход может быть полезен при обработке результатов экспериментов с авторотирующей пластинкой, когда известны ее массово-геометрические параметры и известно, что она может авторотировать при свободном падении. В этом случае, используя решение задачи 1, можно вычислять скорость снижения, скорость вращения и углы, определяющие положение пластинки при авторотации.

**4. Формулировка и решение задачи 2.** Рассмотрим теперь следующую задачу.

**Задача 2.** Для пластинки заданной формы указать массу, положение центра масс и тензор инерции, при которых падающая пластинка может совершать равномерные авторотационные вращения.

**Решение.** Сначала разберем несколько частных случаев.

1) Случай  $\alpha = \beta = 0$ . В этом случае уравнения (16) принимают вид

$$v = \frac{J_{yz}}{a_2}\omega, \quad v = \frac{J_{xz}}{b_1}\omega, \quad v = \sqrt{\frac{\varkappa}{a_1}}\omega, \quad v\omega = \frac{mg}{a_1}. \quad (24)$$

Перед корнем стоит знак плюс потому, что  $v > 0$  и мы условились считать  $\omega > 0$ . Эта система может быть разрешена относительно  $v$  и  $\omega$  тогда и только тогда, если ее первые три уравнения будут описывать в плоскости  $v, \omega$  одну и ту же прямую линию. Для этого необходимо и достаточно выполнения условий

$$J_{yz} = a_2\sqrt{\frac{\varkappa}{a_1}}, \quad J_{xz} = b_1\sqrt{\frac{\varkappa}{a_1}}. \quad (25)$$

Остальные компоненты тензора инерции произвольны. Из двух последних уравнений (24) находим

$$v = \sqrt{\frac{mg}{a_1}\sqrt{\frac{\varkappa}{a_1}}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{mg}{\varkappa a_1}}.$$

Далее скорость снижения определяется по формулам (22) и (23).

Интересно отметить, что при симметричном распределении масс относительно плоскости  $Oxy$  имеем  $J_{yz} = J_{xz} = 0$ , и равенства (25) выполняться не будут. В этом случае реализовать рассматриваемое движение нельзя.

2) Случай  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $\beta = 0$ . В этом случае уравнения (16) принимают вид

$$\begin{aligned} J_{zy}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + (J_{zz} - J_{yy}) \operatorname{tg} \alpha &= a_2 v / \omega, & J_{xy} \operatorname{tg} \alpha + J_{xz} &= b_1 v / \omega, \\ (J_{xy} \operatorname{tg} \alpha + J_{xz}) \operatorname{tg} \alpha &= a_1 (v / \omega)^2 - \varkappa, \\ v\omega &= mg / (a_1 \cos^3 \alpha). \end{aligned} \quad (26)$$

Условие разрешимости второго и третьего уравнений (26) относительно  $J_{xy}$  и  $J_{xz}$  имеют вид  $a_1 (v / \omega)^2 - \varkappa = b_1 (v / \omega) \operatorname{tg} \alpha$ . Это условие вместе с последним

уравнением (26) образуют систему уравнений, определяющую  $v$  и  $\omega$ , которую мы запишем в виде

$$v\omega = k_1, \quad a_1 v^2 - \varkappa \omega^2 = k_2, \quad (27)$$

где

$$k_1 = \frac{mg}{a_1 \cos^3 \alpha}, \quad k_2 = mg \frac{b_1 \operatorname{tg} \alpha}{a_1 \cos^3 \alpha}.$$

Система (27) сводится к двум биквадратным уравнениям

$$a_1 v^4 - k_2 v^2 - \varkappa k_1^2 = 0, \quad k \omega^4 + k_2 \omega^2 - a_1 k_1^2 = 0,$$

из которых находим

$$v^2 = \frac{k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4\varkappa a_1 k_1^2}}{2a_1}, \quad \omega^2 = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4\varkappa a_1 k_1^2}}{2\varkappa}.$$

Вычислив  $v/\omega$ , можно из первых двух уравнений (26) определить значения компонент тензора инерции, при которых реализуется рассматриваемое движение. Эти уравнения могут быть удовлетворены и в случае симметричного распределения масс относительно плоскости  $Oxy$ , когда  $J_{xy} = J_{xz} = 0$  (в отличие от случая  $\alpha = \beta = 0$ ).

3) Случай  $\alpha > 0$ ,  $0 < |\beta| < \beta_0$ , где  $\beta_0 < \pi/2$ . Будем считать распределение масс симметричным относительно плоскости  $Oxy$ . В этом случае  $J_{xz} = J_{yz} = 0$ . Попробуем, используя уравнения (18), найти значения  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, J_{xy}$ , при которых возможны установившиеся авторотационные вращения пластинки с заданными значениями углов  $\alpha, \beta$ . Для этого запишем уравнения (18) в виде

$$J_{yy} - J_{zz} = A_x, \quad J_{zz} - J_{xx} = A_y, \quad J_{xx} - J_{yy} = A_z, \quad (28)$$

где

$$A_x = \frac{1}{\tilde{y} \cos \beta} (\tilde{x}^2 a_1 \sin \beta \cos \beta - \tilde{x} a_2 \cos 2\beta - J_{xy} \sin \beta \cos \beta - \varkappa \sin \beta - a_3 \sin \beta \cos \beta),$$

$$A_y = \frac{1}{\sin \beta \cos \beta} (\tilde{x}^2 b_0 \sin \beta \cos \beta - \tilde{x} b_1 \cos 2\beta + J_{xy} \tilde{y} \cos \beta - b_2 \sin \beta \cos \beta), \quad (29)$$

$$A_z = \frac{1}{\tilde{y} \sin \beta} (\tilde{x}^2 a_1 \cos^2 \beta - \tilde{y}^2 J_{xy} + \tilde{x} a_2 \sin 2\beta + J_{xy} \sin^2 \beta - \varkappa \cos \beta + a_3 \sin^2 \beta).$$

При этом исключается из рассмотрения случай  $\tilde{y} = 0, \beta = 0$ , который рассмотрен выше. Условие разрешимости уравнений (28) относительно  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$  имеет вид  $A_x + A_y + A_z = 0$  и, с учетом выражений (29), записывается так:

$$\tilde{x}^2 a_1 \cos \beta + \tilde{x}^2 \tilde{y} b_0 \sin \beta \cos \beta + \tilde{x} a_2 \sin \beta - \tilde{x} \tilde{y} b_1 \cos 2\beta - \tilde{y} b_2 \sin \beta \cos \beta = 0. \quad (30)$$

В это уравнение входят всего две группы параметров:  $a_1, a_2, b_0, b_1, \varkappa$  – параметры, характеризующие форму и профильное сопротивление пластинки,

$\tilde{x}, \tilde{y}, \beta$  – параметры, характеризующие движение пластинки. Таким образом, два из трех параметров  $\tilde{x}, \tilde{y}, \beta$  могут быть заданы произвольно, а третий определяется уравнением (30). Могут представиться следующие случаи:

а) Параметры  $\tilde{x}, \tilde{y}$  заданы, а  $\beta$  определяется из уравнения (30).

б) Заданы параметры  $\tilde{y}, \beta$ . Выражение для  $\tilde{x}$  находится из квадратного уравнения (30) и имеет вид

$$\tilde{x}_{1,2} = \frac{-a_2 \sin \beta + \tilde{y} b_1 \cos 2\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2(a_1 + \tilde{y} b_0 \sin \beta) \cos \beta}, \quad (31)$$

где  $\Delta = (a_2 \sin \beta - \tilde{y} b_1 \cos 2\beta)^2 + 4(\kappa + b_2 \tilde{y} \sin \beta \cos \beta)(a_1 + \tilde{y} b_0 \sin \beta) \cos \beta$ . Из двух значений  $\tilde{x}_{1,2}$  нам подходят только положительные.

в) Заданы параметры  $\tilde{x}, \beta$ . Параметр  $\tilde{y}$  находится из уравнения (30) по формуле

$$\tilde{y} = \frac{2f_1(\tilde{x}, \beta)}{f_2(\tilde{x}, \beta)},$$

где

$$f_1(\tilde{x}, \beta) = \tilde{x}^2 a_1 \cos \beta + \tilde{x} a_2 \sin \beta - \kappa,$$

$$f_2(\tilde{x}, \beta) = -\tilde{x}^2 b_0 \sin 2\beta + 2\tilde{x} b_1 \cos 2\beta + b_2 \sin 2\beta.$$

Остановимся на этом случае более подробно. Напомним, что кроме уравнения (30) параметры  $\tilde{x}, \tilde{y}$  должны удовлетворять условиям

$$\tilde{x} > 0, \quad \tilde{y} > 0. \quad (32)$$

Условия (32) накладывают ограничения на параметры  $\tilde{x}, \beta$ . Поэтому целесообразно построить в плоскости  $O\tilde{x}\beta$  области выполнения условий (32) и построить линии уровня для параметра  $\tilde{y}$ . В этих областях функции  $f_1(\tilde{x}, \beta)$  и  $f_2(\tilde{x}, \beta)$  должны быть одного знака. Разрешая уравнения  $f_1(\tilde{x}, \beta) = 0$  и  $f_2(\tilde{x}, \beta) = 0$  относительно  $\tilde{x}$ , получаем уравнения границы искомых областей в следующей удобной форме

$$\tilde{x} = -\frac{a_2 \sin \beta}{2a_1 \cos \beta} + \sqrt{\left(\frac{a_2 \sin \beta}{2a_1 \cos \beta}\right)^2 + \frac{\kappa}{a_1 \cos \beta}},$$

$$\tilde{x} = \frac{b_1 \cos 2\beta}{b_0 \sin 2\beta} + \sqrt{\left(\frac{b_1 \cos 2\beta}{b_0 \sin 2\beta}\right)^2 + \frac{b_2}{b_0}}.$$

Качественно картина областей показана на рис. 3. Линии уровня параметра  $\tilde{y}$  строятся по формуле (31).

Определив параметры  $\tilde{x}, \tilde{y}, \beta$  так, чтобы удовлетворялись условия (30) и (32), приступаем к определению моментов инерции  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, J_{xy}$ . Момент  $J_{xy}$  может быть задан без всяких ограничений. Согласно (29), этим будут определены величины  $A_x, A_y, A_z$ . Задав далее момент  $J_{zz}$ , из первых двух уравнений (28) находим

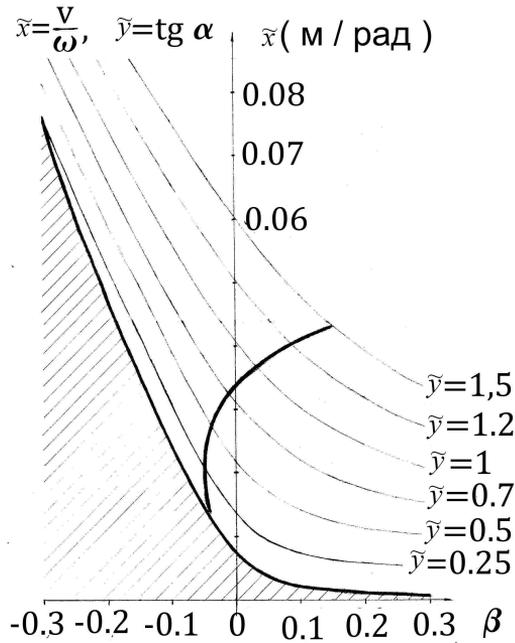


Рис. 3

$$J_{yy} = J_{zz} + A_x, \quad J_{xx} = J_{zz} - A_y. \quad (33)$$

Момент  $J_{zz}$  должен выбираться так, чтобы  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$  были положительны и выполнялись неравенства  $J_{xx} + J_{yy} \geq J_{zz}$  ( $xyz$ ),  $J_{zz} \geq |2J_{xy}|$ , вытекающие из определения моментов инерции [13]. Используя выражения (33), представим эти неравенства в виде

$$J_{zz} \geq A_y - A_x, \quad J_{zz} \geq -A_x - A_y, \quad J_{zz} \geq A_x + A_y, \quad J_{zz} \geq |2J_{xy}|. \quad (34)$$

Условие положительной определенности кинетической энергии сводится к неравенству  $J_{xx}J_{yy} - J_{xy}^2 > 0$  и с учетом выражений (33) принимает вид  $J_{zz}^2 + J_{zz}(A_x - A_y) - A_xA_y > 0$ . Это условие выполняется в силу соотношений (33).

Таким образом, для нахождения  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, J_{xy}$  нужно:

- 1) произвольно задать  $J_{xy}$ ;
- 2) по формулам (29) найти  $A_x, A_y, A_z$ ;
- 3) задать  $J_{zz}$  так, чтобы выполнялись условия (34);
- 4) по формулам (33) найти  $J_{yy}$  и  $J_{xx}$ .

**5. Численный пример.** В качестве примера приведем расчет моментов инерции и параметров полета пластинки, изображенной на рис. 1. Будем пользоваться системой СИ. Зададим размеры пластинки:  $AB = 0,35 \text{ м}$ ,

$BC = 0,095$  м,  $CD = 0,15$  м,  $AE = 0,05$  м. Будем считать, что центр масс расположен в точке  $O$ , лежащей на расстоянии  $0,03$  м от передней кромки  $AB$  и на расстоянии  $0,324$  м от боковой кромки  $BC$ . Связанные с пластинкой оси  $Oxyz$  расположим так, чтобы ось  $Oy$  была параллельна  $AB$ . Положим  $y_1 = 0,06$  м. При этом  $2c(y_1) = 0,072$  м. Коэффициент профильного сопротивления  $C_D$  зададим так, чтобы  $\varkappa = 0,2 \cdot 10^{-6}$ . Результаты трех вариантов расчета приведены в таблице.

№	1	2	3
$\alpha$	0,4568	0,1696	0,0481
$\beta$	-0,0380	-0,08	-0,01
$\omega$	21,1549	30,7550	45,3555
$v$	0,5818	0,7689	0,4431
$J_{xx}$	0,019469	0,002813	0,00021302
$J_{yy}$	0,010185	0,004992	0,0019870
$J_{zz}$	0,01	0,0026	0,0021
$J_{xy}$	0,00079985	0,00023985	-0,0001362
$m$	0,022	0,022	0,0555
$v_0$	1,1634	1,1337	1,9982
$v_1$	$1,6297 \cdot 10^{-4}$	0,4040	-1,1119
$\tilde{x}$	0,0275	0,025	0,0098
$\tilde{y}$	0,4914	0,1712	0,0481

**Закключение.** Полученные в работе результаты позволяют для пластинки с известными массово-геометрическими параметрами, способной авторотировать при падении, рассчитать скорость снижения, скорость вращения и углы, определяющие ее положение при авторотации (задача 1).

Для пластинки заданной формы полученные результаты позволяют вычислять массу, положение центра масс и тензор инерции, при которых она будет способна авторотировать при падении (задача 2).

1. *Norberg R. Ake* Autorotation, self-stability and structure of single-winged fruits and seeds (samaras) with comparative remarks on animal flight // *Biol. Rev.* – 1973. – **48**. – P. 561–596.
2. *Crimi P.* Analysis of samara-wing deselerator steady-state characteristics // *J. Aircraft.* – 1988. – **25**. – № 1. – P. 41–47.
3. *Seter, D., Rosen A.* Study of the Vertical Autorotation of a Singl-Winged Samara // *Biol. rev.* – 1992. – **67**. – P. 195–197.
4. *Судаков С.Н.* Авторотационные вращения свободно падающих в воздухе пластинок специальной формы / Тр. междунар. конф. “Математика в индустрии”, Таганрог, 1998. – С. 296–299.
5. *Овчинников М.Ю.* Стационарные движения твердого тела с жесткой лопастью в однородной атмосфере // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 2003. – № 4. – С. 3–23.
6. *Kellas A.* The guidet samara: Design and development of a controllable single-bladed autorotating vehicle // *B.S. Mechanical Engineering, Drexel University, 2005.* Submitted to the Department of Aeronautics in partial fulfillments for the degree of Master of Science in Aeronautics and Astronautics at the Massachusetts Institute of Technology, September 2007. – 110 p.

7. Ulrich E.R., Pines D.J., Gerardi S. Auotonomous flight of samara MAV // American helicopter sosiety 65th annual forum, May 27–29, 2009. – 10 p.
8. Ulrich E.R., Humbert J.S., Pines D.J. Pitch and heave control of robotic samara micro air vehicles // J. Aircraft. – 2010. – 47.– № 4. – P. 1290–1299.
9. Жуковский Н.Е. Вихревая теория гребного винта (статья вторая) / Собрание сочинений. – В 7 т. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – Т. 4. – С. 445–493.
10. Джонсон У. Теория вертолета. – В 2 т. – М.: Мир, 1983. – Т. 1. – 504 с.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
12. Глауэрт Г. Теория воздушного винта / Аэродинамика: под общей ред. проф. Дюренд И.Ф. – В 6 т. – М.: Оборонгиз, 1940. – Т. 4. – С. 188–390.
13. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. – М.: Мир, 1983. – 528 с.

**S.N. Sudakov**

### **The stationary falling of autorotational analog of samaras**

Autorotations of plates, free falling in air, are investigated in this article. Shape and mass distributions of plates are like ones for seeds of maple. The equations for stationary autorotation revolutions of the plate are obtained. By means of this equations two problems are solved. The first problem is the following. For a plate, the form and distributions of mass of which are given, it is necessary to ascertain the existens of stationary autorotation revolutions. And the second problem is the following. For a plate of given form, it is necessary to find out the conditions for distributions of mass, which make possible the existens of stationary autorotation revolutions.

**Keywords:** *autorotation, seeds of maple, samara, monocopter.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк  
sudakov@iamm.su

Получено 12.05.15