УДК 531.38

©2015. **Г.В. Горр, А.В. Мазнев**

ПРЕЦЕССИОННЫЕ И ИЗОКОНИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Установлены условия существования прецессионных и изоконических движений твердого тела, описывающихся уравнениями Д. Гриоли.

Ключевые слова: *прецессии, изоконические движения, уравнения Д. Гриоли.*

Введение. В динамике твердого тела и гиростата найдены многочисленные классы движений этих систем [1–3], среди которых важное место занимают прецессионные и изоконические движения. Прецессионные движения характеризуются постоянством угла между двумя векторами, один из которых фиксирован в подвижной системе координат, а другой неподвижен в пространстве. Эти движения находят широкое применение в прикладных задачах теоретической механики. Изоконические движения твердого тела с неподвижной точкой определяются свойством симметричности подвижного и неподвижного аксоидов вектора угловой скорости относительно касательной к ним плоскости. Нахождение таких движений осуществляется с помощью кинематических уравнений П.В. Харламова [4].

Данная работа посвящена исследованию условий существования прецессионных и изоконических движений в задаче, которая описывается дифференциальными уравнениями Д. Гриоли [5]. Использование этих уравнений связано с тем, что они являются наиболее общими уравнениями движения тела с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, которые допускают три первых интеграла (геометрический, момента количества движения и энергии). Полученные в статье условия можно применить для уравнений Эйлера–Пуассона и для уравнений Кирхгофа–Пуассона.

1. Постановка задачи. Запишем уравнения Д. Гриоли [5] в обозначениях монографии [3]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \big[\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\boldsymbol{\nu} + \frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\big] \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times \boldsymbol{\nu}, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) допускают первые интегралы

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - 2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 2E, \qquad A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} + L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = k, \qquad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad (3)$$

где E и k – произвольные постоянные.

В (1)–(3) приняты обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $A = A_{ij}$ – тензор инерции в неподвижной точке O; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную; $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – заданные дифференцируемые функции; $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – дифференцируемая функция, которая либо задана, либо подлежит определению в процессе решения задачи; через $\dfrac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}}$, $\dfrac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ обозначены градиенты функций $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$:

$$\frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \Big(\frac{\partial U}{\partial \nu_1}, \frac{\partial U}{\partial \nu_2}, \frac{\partial U}{\partial \nu_3}\Big), \quad \frac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \Big(\frac{\partial L}{\partial \nu_1}, \frac{\partial L}{\partial \nu_2}, \frac{\partial L}{\partial \nu_3}\Big). \tag{4}$$

Если в уравнениях (1), (2) положить $\mu = 0$ и

$$U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \frac{1}{2}(C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – постоянные векторы, $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка, то получим уравнения Кирхгофа–Пуассона.

При $B = 0$, $C = 0$ функции (5) таковы: $U = (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu})$, $L = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu})$. Тогда, полагая $\mu = 0$, из (1), (2) получим уравнения движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой.

Уравнения (1), (2) в скалярном виде представляют собой систему шести дифференциальных уравнений, допускающую три первых интеграла (3). Поэтому при рассмотрении (1)–(3) часто уравнения (2) заменяют первыми интегралами [1–3]. В статье [6] показано, что даже в частном случае движения тяжелого твердого тела в результате такой замены могут появиться посторонние решения, т. е. решения, не удовлетворяющие уравнению (2). Поэтому рассмотрим вопрос об интегрировании уравнения (1) на первых интегралах (3) .

Будем полагать, что уравнение (2) выполняется, т. е. в процессе редукции (1), (2) указанное уравнение и интегралы (3) включаем в состав приведенной системы. Спроектируем левую и правую части (1) на векторы $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}$ (случай равномерных вращений тела исключаем):

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\big(A\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}}\big) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}), \quad A\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}), \tag{6}$$

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}) = \mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega})^2 + \big[A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\nu} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}}\big] \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}). \tag{7}$$

Поскольку уравнение (2) выполняется, то интегралы (3) можно продифференцировать только в силу уравнения (2). Выполняя эту операцию, получим уравнения (6). Таким образом, исследование решений уравнений (1), (2) будем вести, принимая во внимание уравнение (2), интегралы (3) и уравнение (7).

2. Условия существования прецессионных движений тела. Рассмотрим прецессионные движения тела, которые описываются уравнениями (1), (2). Как было отмечено в п. 1, в качестве эквивалентной системы будем вместо (1), (2) брать интегралы (3), уравнения (2) и (7).

Пусть $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$ – вектор, направленный по третьей координатной оси подвижной системы координат ($\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}$). Тогда прецессионные движения тела можно характеризовать инвариантным соотношением

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 \quad (a_0 = \cos\theta_0, \quad \theta_0 = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu})), \tag{8}$$

где θ_0 – постоянный параметр. На основе метода инвариантных соотношений [7, 8] продифференцируем обе части (8) в силу уравнения (2):

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\nu}) = 0. \tag{9}$$

Исключая случай равномерных вращений из (9), получим [3]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}. \tag{10}$$

Подставим $\boldsymbol{\omega}$ из (10) в уравнение (2)

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a})\dot{\varphi}. \tag{11}$$

Функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, входящие в уравнения (10), (11), могут интерпретироваться как углы Эйлера. В силу $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$ соотношению (8), геометрическому интегралу $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и уравнению (11), т. е. уравнению (2), можно удовлетворить, положив

$$\nu_1 = a_0' \sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0, \tag{12}$$

где $a_0' = \sin\theta_0$. Из (10) следует

$$\omega_1 = a_0'\dot{\psi}\sin\varphi, \quad \omega_2 = a_0'\dot{\psi}\cos\varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + a_0\dot{\psi}. \tag{13}$$

Поскольку уравнение (2) проинтегрировано, то осталось рассмотреть первые два интеграла из (3) и уравнение (7).

Подставим выражение (10) в первые два соотношения из системы (3) . Из полученных равенств определим

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})\big(E + U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\big) - \big(k - L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\big)^2}{(A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu})^2}, \tag{14}$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})}\big[k - L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) - \dot{\varphi}(A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu})\big]. \tag{15}$$

В [3] показано, что с учетом выбора вектора $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$) при значениях компонент ν_i из (12) выполняются условия

$$(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) > 0, \quad (A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu})^2 > 0,$$

т. е. формулы (14), (15) не имеют особенностей в знаменателях. Считая, что функции $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ и $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ заданы, из (14), (15) получим

$$\dot{\varphi}^2 = Q(\varphi), \quad \dot{\psi} = R(\varphi). \tag{16}$$

Первое уравнение из (16) позволяет найти функцию $\varphi(t)$ путем обращения интеграла

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{Q(\varphi)}} = t - t_0. \tag{17}$$

Функцию $\psi(t)$ определим из второй формулы системы (16):

$$\psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} R(\varphi(t))dt. \tag{18}$$

Таким образом, если прецессионное движение (8) является прецессией общего вида (см. (10)), то уравнения (16) определяют функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.

Регулярные и полурегулярные прецессии в таком методе являются особыми. Если $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} = m$ (n и m – постоянные), то прецессия называется регулярной. Тогда необходимо требовать, чтобы уравнения (16) выполнялись тождественно. Такое условие приводит при заданных функциях $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ к системе равенств на параметры задачи и параметры, входящие в данные функции [3].

Для полурегулярной прецессии первого типа только $\dot{\psi} = m$, где m – постоянная. Первое уравнение из (16) служит для нахождения функции $\varphi(t)$, а второе равенство из этой системы должно быть тождеством по φ (из этого требования находятся условия на параметры задачи и параметры функций $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$).

Для полурегулярной прецессии второго типа $\dot{\varphi} = n$, где n – постоянная. Так как при этом $\varphi = nt$, то из второго уравнения системы (16) получим $\psi = \psi(t)$. Условия существования прецессий второго типа определяют из первого уравнения системы (16).

В монографии [3] приведены результаты, полученные для задачи, в которой функции $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ имеют вид (5).

Итак, осталось удовлетворить уравнению (7).

Подставив вектор $\boldsymbol{\omega}$ из (10) в уравнение (7), найдем значение функции $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ на кривой γ, которая определяется уравнениями

$$\gamma: \quad \nu_1 = a_0' \sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0, \quad \dot{\varphi}^2 = Q(\varphi), \quad \dot{\psi} = R(\varphi). \tag{19}$$

В векторном виде имеем

$$
\begin{aligned}
&\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\Big|_{\gamma} = \Big\{ \frac{1}{{a_0'}^2\dot\varphi}\big[\ddot\varphi(A\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})) + \ddot\psi(A\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})) - \\
&-\dot\varphi^2((A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}) - a_0(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})) + \dot\psi^2((A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}) - a_0(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})) + \\
&+\dot\varphi\dot\psi({a_0'}^2\mathrm{Sp}(A) + 2a_0(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}) - 2(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})) + \boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\nu}} - a_0\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\nu}} + \\
&+\big(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\nu}}\big)(\dot\psi + a_0\dot\varphi) - \big(\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\nu}}\big)(\dot\varphi + a_0\dot\psi)\big]\Big\}\Big|_{\gamma}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Здесь $\mathrm{Sp}(A)$ – след матрицы A.

Для получения функции $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ необходимо внести в правую часть уравнения (20) выражения (19) и учесть, что $\boldsymbol{a} = (0,0,1), A = (A_{ij})$. Справедливо

Утверждение 1. *В случае существования прецессии общего вида для заданных дифференцируемых функций* $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, *функция* $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ *на прецессиях* (19) *принимает значения* (20).

Из этого утверждения следует, что параметры θ_0, A_{ij} могут принимать произвольные значения, не нарушающие физический смысл тензора инерции A. В конкретных задачах динамики [1–3] это утверждение может нарушаться. Например, поскольку для уравнений Кирхгофа $\mu = 0$, а функции $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ имеют вид (5), то уравнение (20) представляет собой тригонометрический многочлен по φ. Требование того, что этот многочлен обращается в нуль для всех φ приводит к условиям существования прецессий общего вида [3]. Для регулярных и полурегулярных прецессий необходимо учитывать последние два равенства из системы (19).

В статье [9] также рассматриваются прецессионные движения для уравнений (1), (2) (в [9] используется термин "безнутационные движения", который ранее применял Г.Г. Аппельрот [10]). Если следовать обозначениям данной статьи, то допущения статьи [9] можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&U(\sin\theta\sin\varphi,\sin\theta\cos\varphi,\cos\theta) = P(\theta,\varphi) = \\
&\qquad = P_0(\theta_0,\varphi) + (\cos\theta-\cos\theta_0)P_1(\theta_0,\varphi) + (\cos\theta-\cos\theta_0)^2P_2(\theta,\varphi),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&L(\sin\theta\sin\varphi,\sin\theta\cos\varphi,\cos\theta) = Q(\theta,\varphi) = \\
&\qquad = Q_0(\theta_0,\varphi) + (\cos\theta-\cos\theta_0)Q_1(\theta_0,\varphi) + (\cos\theta-\cos\theta_0)^2Q_2(\theta,\varphi),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где $P_0(\theta_0,\varphi)$, $Q_0(\theta_0,\varphi)$ – значения функций U и L, вытекающие из интегралов (3):

$$
P_0(\theta_0,\varphi) = \frac{1}{2}\big[\dot\varphi^2(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}) + 2\dot\psi\dot\varphi(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}) + \dot\psi^2(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})\big] - E,
$$

$$
Q_0(\theta_0,\varphi) = k - \dot\varphi(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}) - \dot\psi(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}).
$$

Здесь ν_i определены равенствами (12). Используя представления (21), (22) в [9], получено уравнение, которое интерпретируется, как необходимое и достаточное условие существования у уравнений (1), (2) инвариантных соотношений (8), (10). Однако, в указанное авторами уравнение значение $\cos\theta_0$ входит в качестве знаменателя и поэтому оно содержит особенность $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Напротив, уравнение (20) не имеет особенностей ни при каких θ_0.

Отметим, что условие $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ выполняется не только для маятниковых движений тела, но для многих других классов прецессионных движений [9].

Рассмотрим более подробно второе отличительное свойство уравнения (20) и уравнения [9].

Уравнение, которое получено в [9], наряду с функциями $P_1(\theta,\varphi)$, $Q_1(\theta,\varphi)$, содержит производную $\dfrac{\partial L}{\partial \nu_3}\Big|_{\theta=\theta_0}$ (в обозначениях [9] $\dfrac{\partial f}{\partial \nu_1}\Big|_{\theta=\theta_0}$). Приведем цитату [9, стр. 3]: "*Это и есть необходимое и достаточное условие существования у системы* (1), (3) (по нумерации данной статьи (1), (2) – Г. Горр, А. Мазнев) *решения с инвариантным соотнощением* (7) (по нумерации данной статьи (8) – Г. Горр, А. Мазнев), *или, другими словами, необходимое и достаточное условие существования безнутационных движений. Отметим, что этим условием стеснены лишь коэффициенты* P_1 *и* Q_1 *в представлениях исходных функций* Π *и* f (по данной статье U, L – Г. Горр, А. Мазнев) *разложениями* (16) (по данной статье (21), (22) – Г. Горр, А. Мазнев) *и* $\dfrac{\partial f}{\partial \nu_1}\Big|_{\theta=\theta_0}$. *Произвольной остается и функция* F (по статье μ– Г. Горр, А. Мазнев)".

В статье [9] при рассмотрении разложений (21), (22) авторы не говорят об аналитичности данных функций, а лишь отмечают: "а P_1, Q_1 – соответственно первые производные от $P(\theta,\varphi)$ и $Q(\theta,\varphi)$ по $\cos\theta$ ". Поэтому представляет интерес рассмотрение уравнения (20) в случае, когда функции U и L имеют вид

$$\begin{gathered}
U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = U_0(\nu_1,\nu_2,a_0) + (\nu_3 - a_0)U_1(\nu_1,\nu_2,a_0) + \\
+ (\nu_3 - a_0)^2 U_2(\nu_1,\nu_2,a_0) + \dots , \\
L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = L_0(\nu_1,\nu_2,a_0) + (\nu_3 - a_0)L_1(\nu_1,\nu_2,a_0) + \\
+ (\nu_3 - a_0)^2 L_2(\nu_1,\nu_2,a_0) + \dots .
\end{gathered} \tag{23}$$

Из (23) следует

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_i}\Big|_{\nu_3=a_0} = \frac{\partial U_0(\nu_1,\nu_2,a_0)}{\partial \nu_i} \quad (i=1,2), \\
&\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_3}\Big|_{\nu_3=a_0} = U_1(\nu_1,\nu_2,a_0), \\
&\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_i}\Big|_{\nu_3=a_0} = \frac{\partial L_0(\nu_1,\nu_2,a_0)}{\partial \nu_i} \quad (i=1,2),
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_3}\Big|_{\nu_3=a_0} = L_1(\nu_1,\nu_2,a_0).$$

Для наглядности положим в уравнении (20) $A = \mathrm{diag}(A_0, A_0, A_0)$. Тогда

$$\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\big|_\gamma = \Big\{\frac{1}{{a_0'}^2\dot\varphi}\Big[{a_0'}^2 A_0\dot\varphi\dot\psi + (\boldsymbol{a} - a_0\boldsymbol{\nu})\cdot\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \\ + (\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}})(\dot\psi + a_0\dot\varphi) - \big(\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}}\big)(\dot\varphi + a_0\dot\psi)\Big]\Big\}\Big|_\gamma, \qquad (25)$$

где, в силу (14), (15):

$$\dot\varphi^2(\varphi) = \frac{1}{{a_0'}^2 A_0}\Big[2A_0\big(U(a_0'\sin\varphi, a_0'\cos\varphi, a_0) + E\big) - \\ -(k - L(a_0'\sin\varphi, a_0'\cos\varphi, a_0))^2\Big], \\ \dot\psi(\varphi) = \frac{1}{A_0}\Big[k - L(a_0'\sin\varphi, a_0'\cos\varphi, a_0) - a_0 A_0\dot\varphi(\varphi)\Big]. \qquad (26)$$

На основании (24) найдем следующие выражения:

$$\Big[(\boldsymbol{a} - a_0\boldsymbol{\nu})\cdot\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big]\Big|_{\nu_3=a_0} = {a_0'}^2 U_1(\nu_1,\nu_2,a_0) - \\ -\Big[\nu_1\frac{\partial U_0(\nu_1,\nu_2,a_0)}{\partial \nu_1} + \nu_2\frac{\partial U_0(\nu_1,\nu_2,a_0)}{\partial \nu_2}\Big]a_0, \qquad (27)$$

$$\Big(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big)\Big|_{\nu_3=a_0} = L_1(\nu_1,\nu_2,a_0), \\ \Big(\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big)\Big|_{\nu_3=a_0} = \nu_1\frac{\partial L_0(\nu_1,\nu_2,a_0)}{\partial \nu_1} + \nu_2\frac{\partial L_0(\nu_1,\nu_2,a_0)}{\partial \nu_2} + a_0 L_1(\nu_1,\nu_2,a_0). \qquad (28)$$

Из (26)–(28) вытекает, что равенство (25), принимает вид

$$\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\Big|_\gamma = \Big\{\frac{1}{{a_0'}^2\dot\varphi}\Big[{a_0'}^2\big(A_0\dot\varphi\dot\psi + U_1(\nu_1,\nu_2,a_0) + \dot\psi L_1(\nu_1,\nu_2,a_0)\big) - \\ -\Big(\nu_1\frac{\partial U_0(\nu_1,\nu_2,a_0)}{\partial \nu_1} + \nu_2\frac{\partial U_0(\nu_1,\nu_2,a_0)}{\partial \nu_2}\Big)a_0 - \\ -(\dot\varphi + a_0\dot\psi)\Big(\nu_1\frac{\partial L_0(\nu_1,\nu_2,a_0)}{\partial \nu_1} + \nu_2\frac{\partial L_0(\nu_1,\nu_2,a_0)}{\partial \nu_2}\Big)\Big]\Big\}\Bigg|_{\substack{\nu_1 = a_0'\sin\varphi,\\ \nu_2 = a_0'\cos\varphi}}, \qquad (29)$$

В уравнении (29) $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ имеют значения (26) и поэтому $\nu_1 = a_0' \sin\varphi$, $\nu_2 = a_0' \cos\varphi$ подставляются только в $U_1(\nu_1, \nu_2, a_0)$, $L_1(\nu_1, \nu_2, a_0)$ и выражения в скобках, которые содержат производные функций $U_0(\nu_1, \nu_2, a_0)$, $L_0(\nu_1, \nu_2, a_0)$.

Таким образом, уравнение (29) и уравнение из [9] получены при разных предположениях на характер основных функций.

Отметим, что замечание авторов о том, что функция F произвольна (см. цитату, приведенную выше), математически неточно. Действительно, анализ уравнения [9] показывает, что все функции (например, $\sigma = \sigma(\varphi), \varkappa = \varkappa(\varphi)$, $\sigma'(\varphi), \varkappa'(\varphi)$) зависят только от φ, а функция F является произвольной, т. е. $F(\cos\theta, \sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi)$ является функцией двух переменных, что невозможно. Поэтому в уравнении [9] необходимо писать $F(\cos\theta_0$, $\sin\theta_0 \sin\varphi, \sin\theta_0, \cos\varphi)$.

3. Изоконические движения тела. Эти движения можно охарактеризовать инвариантным соотношением [3]:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{c}) = 0, \tag{30}$$

где вектор $\boldsymbol{c}$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом. Направим первую координатную ось подвижной системы координат по вектору $\boldsymbol{c}$. Тогда для вектора $\boldsymbol{c}$ имеем: $\boldsymbol{c} = (1, 0, 0)$. При анализе изоконических движений используем углы Эйлера θ, φ, ψ, приняв за θ угол между векторами $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{\nu}$. В этом случае компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ и вектора $\boldsymbol{\omega}$ таковы [3]:

$$\nu_1 = \cos\theta, \quad \nu_2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \nu_3 = \sin\theta\cos\varphi, \tag{31}$$

$$\omega_1 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta, \;\; \omega_2 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \;\; \omega_3 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi. \tag{32}$$

Подставив выражения (31), (32) в равенство (30) и исключив случай равномерных вращений, найдем условие

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi}. \tag{33}$$

В силу (33) компоненты ω_i из (32) принимают вид

$$\omega_1 = \dot{\varphi}(1 + \cos\theta), \;\; \omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi. \tag{34}$$

Таким образом, если для компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$ принять выражения (31), а для компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ – (34), то условие изоконичности (30) выполняется.

Поскольку при подстановке (31), (34) в уравнение (2) получим тождество, то необходимо рассмотреть только интегралы (3) и уравнения (7).

При записи (3) положим компоненту A_{23} тензора (A_{ij}) нулевой. Тогда

$$\begin{gathered} A_{11}\omega_1^2 + A_{22}\omega_2^2 + A_{33}\omega_3^2 + 2(A_{12}\omega_2 + A_{13}\omega_3)\omega_1 = 2(E + U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)), \\ \omega_1(A_{11}\nu_1 + A_{12}\nu_2 + A_{13}\nu_3) + \omega_2(A_{12}\nu_1 + A_{22}\nu_2) + \omega_3(A_{13}\nu_1 + A_{33}\nu_3) = \\ = k - L(\nu_1, \nu_2, \nu_3). \end{gathered} \tag{35}$$

Если подставим выражения (31), (34) в равенства (35), то получим два уравнения следующей структуры:

$$\begin{aligned}&\dot{\varphi}^2 H_1(\theta,\varphi)+\dot{\varphi}\dot{\theta}H_2(\theta,\varphi)+\dot{\theta}^2 H_3(\theta,\varphi)=H_4(\theta,\varphi),\\&\dot{\varphi}G_1(\theta,\varphi)+\dot{\theta}G_2(\theta,\varphi)=G_3(\theta,\varphi),\end{aligned}\tag{36}$$

где $H_1(\theta,\varphi), H_2(\theta,\varphi), H_3(\theta,\varphi), G_1(\theta,\varphi), G_2(\theta,\varphi)$ – тригонометрические многочлены. Из (36) найдем функции

$$\dot{\varphi}=R_1(\theta,\varphi),\qquad \dot{\theta}=R_2(\theta,\varphi).\tag{37}$$

Укажем явный вид функций $R_i(\theta,\varphi)$ в случае $A=\mathrm{diag}(A_0,A_0,A_0)$:

$$R_1(\theta,\varphi)=\frac{k-L(\cos\theta,\sin\theta\sin\varphi,\sin\theta\cos\varphi)}{A_0(1+\cos\theta)},\tag{38}$$

$$\begin{aligned}&R_2^2(\theta,\varphi)=2\big[A_0(1+\cos\theta)\big(E+U(\cos\theta,\sin\theta\sin\varphi,\sin\theta\cos\varphi)\big)-\\&-\big(k-L(\cos\theta,\sin\theta\sin\varphi,\sin\theta\cos\varphi)\big)\big]A_0^{-2}(1+\cos\theta)^{-1}.\end{aligned}\tag{39}$$

Из уравнений (37) следует

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{R_1(\theta,\varphi)}{R_2(\theta,\varphi)}.\tag{40}$$

Уравнение (40) является неавтономным дифференциальным уравнением первого порядка. Из него находится функция $\varphi=\varphi(\theta)$. Зависимость $\theta=\theta(t)$ определяется из второго уравнения системы (37)

$$\dot{\theta}=R_2(\theta,\varphi(\theta))=R(\theta)\tag{41}$$

путем обращения интеграла

$$\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{R(\theta)}=t-t_0.\tag{42}$$

Запишем уравнение (7), используя (31), (34):

$$\begin{aligned}&\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\dot{\varphi}(1+\cos\theta)\Big[\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\\&-2(E+U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\Big]-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\nu}}\cdot\boldsymbol{\omega}+\big[2\dot{\varphi}^2(1+\cos\theta)+\dot{\theta}^2\big]\Big(k-\\&-L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big)=A\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}).\end{aligned}\tag{43}$$

При рассмотрении (43) будем полагать, что функции $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ заданы, а функция $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ подлежит определению. Поскольку $\dot{\theta}^2+$ $+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\neq 0$, то при нахождении $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ из (43) не возникает особенностей. Явный вид этой функции можно получить, учтя в (43) равенства (31), (34), (37); (41), (42). Таким образом, справедливо

Утверждение 2. *В случае изоконических движений твердого тела с неподвижной точкой для заданных дифференцируемых функций* $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ *существует функция* $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, если удастся найти $\varphi(\theta)$ из (40), *которая на изоконических движениях* (31), (34) *удовлетворяет уравнению* (43).

Как видим из этого утверждения, в условиях существования рассматриваемого класса движений нет ограничений на компоненты тензора (A_{ij}), кроме тех, которые вытекают из физического смысла этих величин.

Запишем формулу (43) в случае $A=\mathrm{diag}(A_0,A_0,A_0)$:

$$\mu(\cos\theta,\sin\theta\sin\varphi,\sin\theta\cos\varphi)=\frac{1}{\dot{\theta}[1+(\varphi'(\theta))^2]}\Big\{A_0\dot{\theta}^2\Big[(\varphi'(\theta))^3\sin^2\theta+$$
$$+(\varphi'(\theta))(1-\cos\theta)-(\varphi''(\theta))\sin^2\theta\Big]-(\varphi'(\theta))(1+\cos\theta)\Big[\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\nu}}-$$
$$-\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\nu}}-2(E+U(\nu_1,\nu_2,\nu_3))\Big]-\dot{\theta}\big[2(\varphi'(\theta))^2(1+\cos\theta)+1\big](k- \tag{44}$$
$$-L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big\}\Bigg|_{\substack{\nu_1=\cos\theta,\,\nu_2=\sin\theta\sin\varphi,\,\nu_3=\sin\theta\cos\varphi\\ \dot{\theta}=R_2(\theta,\varphi),\ \dot{\varphi}=R_1(\theta,\varphi)}}$$

Если функции U и L зависят только от θ, тогда $\theta=\theta(t)$ найдем из (37) в виде квадратуры. Подстановка этой функции в первое уравнение системы (37) приводит к тому, что его правая часть зависит от θ. Следовательно, и $\varphi(t)$ определяется в виде квадратур. Данный частный случай представляет интерес, поскольку в общем случае нахождение решения уравнения (40) и интегала (42) представляется затруднительным.

4. Прецессионно-изоконические движения. Движения твердого тела, которые характеризуются свойствами прецессионности и изоконичности, называются [3] прецессионно-изоконическими движениями. Следуя [3], запишем инвариантные соотношения для этих движений

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}=a_0,\quad \boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{a}+\dot{\psi}\boldsymbol{\nu},\quad \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{c})=0. \tag{45}$$

Будем предполагать, что $\boldsymbol{a}=(0,0,1)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,0,c_3)$. Заметим, что вид вектора $\boldsymbol{c}$ в (45) не совпадает с тем, который применялся в п. 3 при изучении изоконических движений. Это связано с выбором подвижной системы координат: третью ось направляем по $\boldsymbol{a}$ и полагаем, что вектор $\boldsymbol{c}$ лежит в координатной плоскости, перпендикулярной второй оси.

Как показано в [3], существует два класса прецессионно-изоконических движений, для которых прецессионное движение – прецессия общего вида:

$$1.\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}, \quad \psi=\varphi; \tag{46}$$

$$2.\ \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}, \quad \dot\psi=\frac{\dot\varphi}{b_0+c_0\sin\varphi}, \tag{47}$$

где

$$b_0=\frac{a_0c_3-1}{a_0-c_3}, \qquad c_0=\frac{a_0'c_1}{a_0-c_3}.$$

При исследовании случаев (46), (47) удобно пользоваться методом для прецессионных движений. Будем, как и ранее, предполагать, что функции $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ заданы, а функция $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ подлежит определению. Из первых интегралов в случае (46) имеем

$$\dot\varphi^2=\frac{2(E+U(\nu_1,\nu_2,\nu_3))}{A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}+2(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu})+A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}, \tag{48}$$

$$\begin{gathered}\big[k-L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\big]^2\big[A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}+2(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu})+A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\big]-\\ -2(E+U(\nu_1,\nu_2,\nu_3))(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}+A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu})^2=0.\end{gathered} \tag{49}$$

Запишем равенство (20) при условии $\dot\psi=\dot\varphi$:

$$\begin{gathered}\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\Big|_\gamma=\Big\{\frac{1}{{a_0'}^2\dot\varphi}\Big[\ddot\varphi A(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\nu})\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})+\dot\varphi^2\Big(a_0\big(2(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu})+\\ +(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\big)+{a_0'}^2\mathrm{Sp}(A)-(2+a_0)(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})\Big)+\\ +(\boldsymbol{a}-a_0\boldsymbol{\nu})\cdot\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\dot\varphi(a_0+1)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{\nu})\cdot\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big]\Big\}\Big|_\gamma.\end{gathered} \tag{50}$$

Здесь кривая γ определяется соотношениями (19). При исследовании уравнений (48)–(50) можно считать, что задана только функция $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$. Тогда уравнение (49) служит для нахождения функции $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$. Практический интерес представляет случай, когда $\mu=0$, U и L имеют вид (5), $A=\mathrm{diag}(A_0,A_0,A_0)$. Из (48)–(50) получим

$$\dot\varphi=\frac{f_2(\varphi)}{A_0(1+a_0)}, \quad 2f_2^2(\varphi)-A_0(1+a_0)g_2(\varphi)=0, \tag{51}$$

$$\dot\varphi^2A_0{a_0'}^2+(\boldsymbol{a}-a_0\boldsymbol{\nu})\cdot(\boldsymbol{s}-C\boldsymbol{\nu})+\dot\varphi(a_0+1)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{\nu})\cdot(\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{\nu})=0, \tag{52}$$

где

$$\begin{gathered}f_2(\varphi)=b_2\cos2\varphi+b_2'\sin2\varphi+b_1\cos\varphi+b_1'\sin\varphi+b_0,\\ g_2(\varphi)=c_2\cos2\varphi+c_2'\sin2\varphi+c_1\cos\varphi+c_1'\sin\varphi+c_0.\end{gathered} \tag{53}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&b_2 = \frac{{a_0'}^2}{4}(B_{22} - B_{11}), \quad b_2' = \frac{{a_0'}^2}{2}B_{12}, \quad b_1 = a_0'(a_0 B_{23} - \lambda_2),\\
&b_1' = a_0'(a_0 B_{13} - \lambda_1), \quad b_0 = \frac{1}{4}[{a_0'}^2(B_{11} + B_{22}) + 2{a_0}^2 B_{33}] - a_0\lambda_3 + k,\\
&c_2 = \frac{{a_0'}^2}{2}(C_{11} - C_{22}), \quad c_2' = -{a_0'}^2 C_{12}, \; c_1 = 2a_0'(s_2 - a_0 C_{23}),\\
&c_1' = 2a_0'(s_1 - a_0 C_{13}), \quad c_0 = 2E + 2a_0 s_3 - \frac{1}{2}\big[{a_0'}^2(C_{11} + C_{22}) + 2a_0^2 C_{33}\big].
\end{aligned} \tag{54}$$

Второе уравнение из (51) должно быть тождеством по φ. На основании (53), (54) найдем условия на параметры задачи. Запишем их для случая

$$\lambda_2 = 0, \quad s_2 = 0, \quad B_{23} = 0, \quad C_{23} = 0. \tag{55}$$

Тогда

$$C_{22} - C_{11} = \frac{2(a_0 B_{13} - \lambda_1)^2}{A_0(1 + a_0)}, \quad C_{12} = 0, \tag{56}$$

$$\frac{1}{2}{b_1'}^2 + b_0^2 = 2A_0 c_0(1 + a_0), \tag{57}$$

$$b_0 = \frac{2(a_0 + 1)A_0(s_1 - a_0 C_{13})}{a_0 B_{13} - \lambda_1}. \tag{58}$$

Равенства (55), (56) служат условиями на параметры задачи. Из равенства (58) в силу (54) определяется значение постоянной k. Равенство (57) с учетом (54), (58) можно рассматривать как уравнение для нахождения постоянной E. Так как $a_0 + 1 \neq 0$, то имеем линейное уравнение на эту постоянную.

На основании условий (55) для $\dot\varphi$ из первого уравнения (51) получим

$$\dot\varphi = \frac{b_1' \sin\varphi + b_0}{A_0(1 + a_0)}. \tag{59}$$

Используя (55), (56), (59), распишем уравнение (52):

$$\begin{aligned}
&(1 - a_0)(b_1' \sin\varphi + b_0)^2 + a_0 {a_0'}^2 (a_0 B_{13} - \lambda_1)^2 \cos 2\varphi -\\
&- a_0'(1 + a_0)A_0[(1 - 2a_0)C_{13} + a_0 s_1] \sin\varphi +\\
&+ (1 + a_0)(b_1' \sin\varphi + b_0)\big[a_0(B_{13}(2a_0 - 1) - \lambda_1) \sin\varphi +\\
&+ (1 - a_0)\big(\lambda_3 - a_0 B_{33} + (1 + a_0)B_{11}\big)\big] +\\
&+ A_0(1 + a_0)\big[{a_0'}^2 s_3 + \frac{a_0}{2}\big({a_0'}^2(C_{11} + C_{22}) + 2{a_0}^2 C_{33}\big)\big] = 0.
\end{aligned} \tag{60}$$

Уравнение (60) должно быть тождеством по переменной φ. Это условие приводит к трем равенствам, которым должны удовлетворять параметры задачи. Из первого равенства найдем

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} B_{13}(a_0 - 1). \tag{61}$$

Второе равенство служит условием на параметр s_1, а третье равенство – на параметр s_3. Разрешимость этих условий следует из того, что параметры s_1, s_3 входят в указанные равенства линейно. При выполнении (61) выражение $a_0 B_{13} - \lambda_1 \neq 0$ и поэтому прецессия не вырождается в регулярную прецессию

Данный класс движений можно получить на основе уравнений (6.126), (6.127), указанных в [3] (этот случай в [3] не рассматривается).

Таким образом, указан новый класс прецессионно-изоконических движений в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Аналогично рассматривается и класс движений, описываемый и формулой из (47).

Заключение Рассмотрены условия существования прецессионных и изоконических движений твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил. Получены уравнения для определения значений функции $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ на инвариантных соотношениях, задающих данные движения.

1. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
2. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
3. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
4. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 703–707.
5. *Grioli G.* Questioni di dinamica del solido pesante asimmetrico // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. – 1963. – **35**, № 1–2. – P. 35–39.
6. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Харламова Е.И.* Об особых решениях одной формы уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 3–9.
7. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
8. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
9. *Мозалевская Г.В., Орешкина Л.Н.* Безнутационные движения твердого тела // Механика твердого тела. – 1991. – Вып. 23. – С. 1–5.
10. *Аппельрот Г.Г.* Простейшие случаи движения тяжелого несимметричного гироскопа С.В. Ковалевской // Мат. сб. Кружка любителей мат. наук. – 1910. – **27**, вып. 3. – С. 262–334.

G.V. Gorr, A.B. Maznev

Precession and isoconic motions of a rigid body under the potential and gyroscopic forces

The conditions of existence of precession and isoconic motions of a rigid body are established. The conditions are described by Grioli's equations.

Keywords: *precessions, isoconic motions, Grioli's equations.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк;
Донецкий гос. ун-т

Получено 25.09.15

gvgorr@gmail.com, maznev_av@rambler.ru