

УДК 539.3:534.1

©2006. И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян

## НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С СЕЧЕНИЕМ В ФОРМЕ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА

Построена аналитическая форма дисперсионных уравнений для множеств нормальных упругих волн в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с кольцевым сечением, имеющим секторный вырез произвольной угловой меры. Внешние цилиндрические граничные поверхности волновода полагаются фиксированными, а на граничные поверхности вырезов нанесены тонкие безинерционные нерастяжимые покрытия. Для волноводов данного типа с различными физико-механическими и геометрическими характеристиками рассчитаны действительные и мнимые ветви дисперсионных спектров. Описаны эффекты трансформации спектров, связанные с изменением угловой меры выреза.

**Введение.** Задачи динамики деформируемых сред об определении полных дисперсионных спектров нормальных упругих волн в цилиндрических телах с варьируемой геометрией и физико-механическими свойствами приобретают все большую актуальность в связи с появлением новых приложений в ультразвуковой дефектоскопии и акустоэлектронике и остаются открытыми по многим аспектам [1–5]. Одно из направлений анализа указанного класса задач заключается в поиске возможностей целенаправленного изменения структуры спектра – получении дисперсионных зависимостей с необходимыми свойствами, обеспечении существования определенного количества мод бегущих волн в заданном частотном диапазоне, изменении частот запираания, получении волновых движений с требуемой формой распределения потоков мощности по поперечному сечению.

В настоящей работе рассматривается одна из задач такого типа о распространении упругих волн в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с секторным вырезом произвольной угловой меры в концентрическом кольцевом сечении. В ней обобщаются подходы и результаты, представленные в работах [6–9].

**1. Физико-механическая и математическая постановка задачи.** Рассматривается трансверсально-изотропный цилиндрический волновод занимающий в безразмерной системе цилиндрических координат  $(r, \theta, z)$  область  $V = \{R_1 \leq r \leq R_2, -\alpha \leq \theta \leq \alpha, -\infty < z < \infty\}$  и имеющий приведенную на рис. 1 конфигурацию поперечного сечения.

Граница волновода  $G = G_- \cup G_+ \cup G_0$  образована суперпозицией поверхностей  $G_+ = \{R_1 \leq r \leq R_2, \theta = \alpha, -\infty < z < \infty\}$ ,  $G_- = \{R_1 \leq r \leq R_2, \theta = -\alpha, -\infty < z < \infty\}$ ,  $G_0 = \{r = R_1, -\alpha \leq \theta \leq \alpha, -\infty < z < \infty\} \cup \{r = R_2, -\alpha \leq \theta \leq \alpha, -\infty < z < \infty\}$ . Волновод имеет коллинеарную направлению  $Oz$  ось упругой симметрии механических свойств. Участок  $G_0$  границы волновода полагается жестко фиксированным, а граничные плоскости секторного выреза  $G_-$  и  $G_+$  имеют покрытия в виде нерастяжимых в плоскости абсолютно гибких мембран. Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид

$$(\tilde{u}_r)_{G_0} = (\tilde{u}_\theta)_{G_0} = (\tilde{u}_z)_{G_0} = 0, (\tilde{u}_r)_{G_\pm} = (\tilde{u}_z)_{G_\pm} = (\tilde{\sigma}_{\theta\theta})_{G_\pm} = 0, \quad (1)$$

где  $\{\tilde{u}_a\}$  ( $a = r, \theta, z$ ) – безразмерные компоненты вектор-функции  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(r, \theta) \exp(-i(\omega t - \tilde{k}z))$  напряженности гармонической нормальной волны,  $\{\tilde{\sigma}_{ab}\}$  ( $ab = rr, r\theta, rz, \theta\theta, \theta z$ ) – безразмерные комплексные функции напряжений на основных площадках цилиндрической координатной системы в исследуемых волнах.

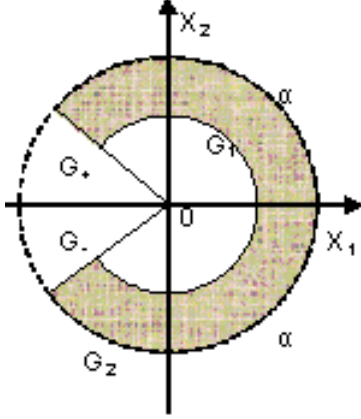


Рис. 1. Поперечное сечение волно-

$$L_{21} = L_{12}, \quad L_{22} = (c_{11} - c_{12})\partial_1^2/2 + c_{11}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho\partial^2/\partial t^2, \quad L_{23} = (c_{13} + c_{44})\partial_1\partial_3, \\ L_{31} = L_{13}, \quad L_{32} = L_{23}, \quad L_{33} = c_{44}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{33}\partial_3^2 - \rho\partial^2/\partial t^2, \quad \partial_j = \partial/\partial x_j,$$

$c_{ij}$  – значения отнесенных к нормирующему параметру  $c_*$  безразмерных упругих постоянных,  $x_j$  – нормированные прямоугольные декартовы координаты, связанные с введенными в волноводе цилиндрическими координатами соотношениями  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ ,  $x_3 = Z$ .

**2. Аналитическая методика получения дисперсионных уравнений.** Для комплексных функций волновых упругих перемещений  $u_i$  в нормальных волнах, распространяющихся вдоль оси  $z$  рассматриваемого волновода, вводятся представления

$$u_1 = (\partial_1\varphi(x_1, x_2) + \partial_2 F_3(x_1, x_2)) \exp(-i(\omega t - kx_3)), \\ u_2 = (\partial_2\varphi(x_1, x_2) - \partial_1 F_3(x_1, x_2)) \exp(-i(\omega t - kx_3)), \\ u_3 = \chi(x_1, x_2) \exp(-i(\omega t - kx_3)),$$

на основе которых уравнения движения (2) трансформируются в систему уравнений относительно обобщенных потенциалов  $\varphi(x_1, x_2)$ ,  $\chi(x_1, x_2)$ ,  $F_3(x_1, x_2)$ :

$$L_\varphi^{(1)}\varphi + L_\chi^{(1)}\chi = 0, \quad L_\varphi^{(2)}\varphi + L_\chi^{(2)}\chi = 0, \quad L_\psi^{(1)}\psi = 0, \quad (3)$$

где

$$L_\varphi^{(1)} = c_{11}D^2 + \beta_1, \quad L_\chi^{(1)} = ik(c_{13} + c_{44}), \quad L_\varphi^{(2)} = ik(c_{13} + c_{44})D^2, \\ L_\psi^{(1)} = 1/2(c_{11} - c_{12})D^2 + \beta_1, \quad L_\chi^{(2)} = c_{44}D^2 + \beta_2, \quad (4) \\ D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \beta_1 = \Omega^2 - c_{44}k^2, \quad \beta_2 = \Omega^2 - c_{33}k^2,$$

$k = \tilde{k}R_*$  – безразмерное волновое число;  $\Omega = \omega R_*(\rho/c_*)^{1/2}$  – приведенный безразмерный частотный параметр волны с круговой частотой  $\omega$ ;  $\rho$  – плотность материала волновода;  $R_*$  – нормирующий параметр для величин с размерностями упругих перемещений.

Получаемые операторным методом общие решения уравнений (3) могут быть представлены в виде

$$\varphi = L_{\chi}^{(2)}F, \quad \chi = -L_{\varphi}^{(2)}F. \quad (5)$$

При этом функция  $F$  определяется из дифференциального уравнения четвертого порядка  $(\Delta_1 D^4 + \Delta_2 D^2 + \Delta_3)F = 0$ , в котором  $\Delta_1 = c_{11}c_{44}$ ,  $\Delta_2 = \beta_1 c_{44} + \beta_2 c_{11} + k^2(c_{13} + c_{44})^2$ ,  $\Delta_3 = \beta_1 \beta_2$ .

Таким образом, для амплитудных характеристик упругих перемещений могут быть получены представления

$$u_1 = \chi_1^{(1)} \partial_1 F_1 + \chi_2^{(1)} \partial_1 F_2 + \partial_2 F_3, \quad u_2 = \chi_1^{(1)} \partial_2 F_1 + \chi_2^{(1)} \partial_2 F_2 - \partial_1 F_3, \quad u_3 = \chi_1^{(3)} F_1 + \chi_2^{(3)} F_2, \\ \chi_j^{(1)} = \beta_2 - c_{44} \gamma_j^2, \quad \chi_j^{(3)} = -ik(c_{13} + c_{44}) \gamma_j^2, \quad (6)$$

в которых функции  $F_j$  удовлетворяют метагармоническим уравнениям

$$D^2 F_j + \gamma_j^2 F_j = 0 \quad (j = 1, 3). \quad (7)$$

При этом значения параметра  $\gamma_j^2$  ( $j = 1, 2$ ) определяются из биквадратного алгебраического уравнения  $\Delta_1 \gamma^4 + \Delta_2 \gamma^2 + \Delta_3 = 0$ , а  $\gamma_3^2 = 2\beta_1(c_{11} - c_{12})^{-1}$ .

Амплитудные функции упругих перемещений в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  соответственно имеют вид:

$$u_{0r} = \chi_1^{(1)} \partial_r F_1 + \chi_2^{(1)} \partial_r F_2 + r^{-1} \partial_{\theta} F_3, \quad u_{0\theta} = \chi_1^{(1)} r^{-1} \partial_{\theta} F_1 + \chi_2^{(1)} r^{-1} \partial_{\theta} F_2 - \partial_r F_3, \quad (8) \\ u_{0z} = \chi_1^{(2)} F_1 + \chi_2^{(2)} F_2, \quad \partial_r = \partial / \partial r, \quad \partial_{\theta} = \partial / \partial \theta.$$

При дальнейшем анализе отдельно рассматриваются спектры симметричных нормальных волн (волн  $S$ -типа), для которых амплитудные функции удовлетворяют условиям  $u_{0r}(r, -\theta) = u_{0r}(r, \theta)$ ,  $u_{0\theta}(r, -\theta) = -u_{0\theta}(r, \theta)$ ,  $u_{0z}(r, -\theta) = u_{0z}(r, \theta)$ , и спектры антисимметричных нормальных волн (волн  $A$ -типа) с амплитудными функциями, удовлетворяющими условиям  $u_{0r}(r, -\theta) = -u_{0r}(r, \theta)$ ,  $u_{0\theta}(r, -\theta) = u_{0\theta}(r, \theta)$ ,  $u_{0z}(r, -\theta) = -u_{0z}(r, \theta)$ .

Для волн  $S$ -типа представления амплитудных функций напряженности, следующие из (4, 8) и априори удовлетворяющие краевым условиям (1) на поверхностях  $G_-$  и  $G_+$ , могут быть выбраны в виде

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 (A_{nj}^+ G_{nrj}^+(r) + B_{nj}^+ D_{nrj}^+(r)) \cos \nu_n^+ \theta, \\ u_{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 (A_{nj}^+ G_{n\theta j}^+(r) + B_{nj}^+ D_{n\theta j}^+(r)) \sin \nu_n^+ \theta, \quad (9) \\ u_z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 (A_{nj}^+ G_{nzj}^+(r) + B_{nj}^+ D_{nzj}^+(r)) \cos(\nu_n^+ \theta),$$

где

$$G_{nrj}^+(r) = \chi_j^{(1)} \left( \frac{\nu_n^+}{r} J_{\nu_n^+}(\gamma_j r) - \gamma_j J_{\nu_n^+ + 1}(\gamma_j r) \right) \quad (j = 1, 2), \quad G_{nr3}^+(r) = \frac{\nu_n^+}{r} J_{\nu_n^+}(\gamma_3 r),$$

$$G_{n\theta j}^+(r) = -\chi_j^{(1)} \frac{\nu_n^+}{r} J_{\nu_n^+}(\gamma_j r) \quad (j = 1, 2), \quad G_{n\theta 3}^+(r) = -\frac{\nu_n^+}{r} J_{\nu_n^+}(\gamma_3 r) + \gamma_3 J_{\nu_n^++1}(\gamma_3 r),$$

$$G_{nzj}^+(r) = \chi_j^{(3)} J_{\nu_n^+}(\gamma_j r) \quad (j = 1, 2), \quad G_{nz3}^+ = 0,$$

$$D_{nrj}^+(r) = \chi_j^{(1)} \left( \frac{\nu_n^+}{r} Y_{\nu_n^+}(\gamma_j r) - \gamma_j Y_{\nu_n^++1}(\gamma_j r) \right) \quad (j = 1, 2), \quad D_{nr3}^+(r) = \frac{\nu_n^+}{r} Y_{\nu_n^+}(\gamma_3 r)$$

$$D_{n\theta j}^+(r) = -\chi_j^{(1)} \frac{\nu_n^+}{r} Y_{\nu_n^+}(\gamma_j r) \quad (j = 1, 2), \quad D_{n\theta 3}^+(r) = -\frac{\nu_n^+}{r} Y_{\nu_n^+}(\gamma_3 r) + \gamma_3 Y_{\nu_n^++1}(\gamma_3 r)$$

$$D_{nzj}^+(r) = \chi_1^{(3)} Y_{\nu_n^+}(\gamma_1 r) \quad (j = 1, 2), \quad D_{nz3}^+(r) = 0, \quad \nu_n^+ = (2n + 1)\pi/2\alpha.$$

Аналогичные представления для функций напряженности в волнах А-типа соответственно имеют вид

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 (A_{nj}^+ G_{nrj}^+(r) + B_{nj}^+ D_{nrj}^+(r)) \sin \nu_n^+ \theta,$$

$$u_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 (A_{nj}^+ G_{n\theta j}^+(r) + B_{nj}^+ D_{n\theta j}^+(r)) \cos \nu_n^+ \theta, \quad (10)$$

$$u_z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 (A_{nj}^+ G_{nzj}^+(r) + B_{nj}^+ D_{nzj}^+(r)) \sin \nu_n^+ \theta.$$

Здесь

$$G_{nrj}^+(r) = \chi_j^{(1)} \left( \frac{\nu_n^+}{r} J_{\nu_n^+}(\gamma_j r) - \gamma_j J_{\nu_n^++1}(\gamma_j r) \right) \quad (j = 1, 2), \quad G_{nr3}^+(r) = -\frac{\nu_n^+}{r} J_{\nu_n^+}(\gamma_3 r),$$

$$G_{n\theta j}^+(r) = \chi_j^{(1)} \frac{\nu_n^+}{r} J_{\nu_n^+}(\gamma_j r) \quad (j = \overline{1, 2}), \quad G_{n\theta 3}^+(r) = -\frac{\nu_n^+}{r} J_{\nu_n^+}(\gamma_3 r) + \gamma_3 J_{\nu_n^++1}(\gamma_3 r),$$

$$G_{nzj}^+(r) = \chi_j^{(3)} J_{\nu_n^+}(\gamma_j r) \quad (j = 1, 2), \quad G_{nz3}^+ = 0;$$

$$D_{nrj}^+(r) = \chi_j^{(1)} \left( \frac{\nu_n^+}{r} Y_{\nu_n^+}(\gamma_j r) - \gamma_j Y_{\nu_n^++1}(\gamma_j r) \right) \quad (j = 1, 2), \quad D_{nr3}^+(r) = -\frac{\nu_n^+}{r} Y_{\nu_n^+}(\gamma_3 r),$$

$$D_{n\theta j}^+(r) = \chi_j^{(1)} \frac{\nu_n^+}{r} Y_{\nu_n^+}(\gamma_j r) \quad (j = 1, 2), \quad D_{n\theta 3}^+(r) = -\frac{\nu_n^+}{r} Y_{\nu_n^+}(\gamma_3 r) + \gamma_3 Y_{\nu_n^++1}(\gamma_3 r),$$

$$D_{nzj}^+(r) = \chi_1^{(3)} Y_{\nu_n^+}(\gamma_1 r) \quad (j = 1, 2), \quad D_{nz3}^+(r) = 0, \quad \nu_n^+ = n\pi/2\alpha,$$

Свойство ортогональности систем функций  $\{\cos \nu_n^\pm \theta\}$ ,  $\{\sin \nu_n^\pm \theta\}$  на интервале  $\theta \in [-\alpha, \alpha]$  позволяет на базе представлений (9) и (10) получить из (1) – граничных условий на  $G_0$  – серию независимых дисперсионных уравнений для семейств нормальных волн с "окружными волновыми числами"  $\nu_n^\pm$ . Эти уравнения для нормальных

волн  $S$ -типа и  $A$ -типа в рассматриваемом волноводе соответственно имеют форму

$$\Delta_n^\pm(\Omega, k) = \begin{vmatrix} G_{nr1}^\pm(1) & G_{nr2}^\pm(1) & G_{nr3}^\pm(1) & D_{nr1}^\pm(1) & D_{nr2}^\pm(1) & D_{nr3}^\pm(1) \\ G_{n\theta1}^\pm(1) & G_{n\theta2}^\pm(1) & G_{n\theta3}^\pm(1) & D_{n\theta1}^\pm(1) & D_{n\theta2}^\pm(1) & D_{n\theta3}^\pm(1) \\ G_{nz1}^\pm(1) & G_{nz2}^\pm(1) & 0 & D_{nz1}^\pm(1) & D_{nz2}^\pm(1) & 0 \\ G_{nr1}^\pm(R_1^*) & G_{nr2}^\pm(R_1^*) & G_{nr3}^\pm(R_1^*) & D_{nr1}^\pm(R_1^*) & D_{nr2}^\pm(R_1^*) & D_{nr3}^\pm(R_1^*) \\ G_{n\theta1}^\pm(R_1^*) & G_{n\theta2}^\pm(R_1^*) & G_{n\theta3}^\pm(R_1^*) & D_{n\theta1}^\pm(R_1^*) & D_{n\theta2}^\pm(R_1^*) & D_{n\theta3}^\pm(R_1^*) \\ G_{nz1}^\pm(R_1^*) & G_{nz2}^\pm(R_1^*) & 0 & D_{nz1}^\pm(R_1^*) & D_{nz2}^\pm(R_1^*) & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

### 3. Численные исследования и интерпретация полученных результатов.

Численный анализ дисперсионных уравнений (11) проведен в диапазоне изменения приведенных волновых параметров  $\text{Re } k \in [0, 5]$ ,  $\text{Im } k \in [0, 4]$ ,  $\Omega \in [0, 20]$  для волноводов с различными угловыми размерами и различными соотношениями внутреннего  $R_1$  и внешнего  $R_2$  радиусов. Рассматривались волноводы из керамики PZT-4 с физико-механическими характеристиками  $c_{11} = 13.9$ ,  $c_{12} = 7.78$ ,  $c_{13} = 7.43$ ,  $c_{33} = 11.5$ ,  $c_{44} = 2.56$ ,  $c_* = 10^{10}$  н/м<sup>2</sup>. Для численного решения дисперсионных уравнений (11) использовался метод бисекции отрезков перемены знака.

Результаты расчетов действительных и мнимых ветвей дисперсионных спектров для кольцевых волноводов с  $\alpha = \pi/4$ ,  $\alpha = \pi/2$  и  $\alpha = 3\pi/4$  приведены соответственно на рис. 2, а; 3, а, б для  $R_1/R_2 = 0.1$  и на рис. 2, б; 3, в, г для  $R_1/R_2 = 0.5$ .

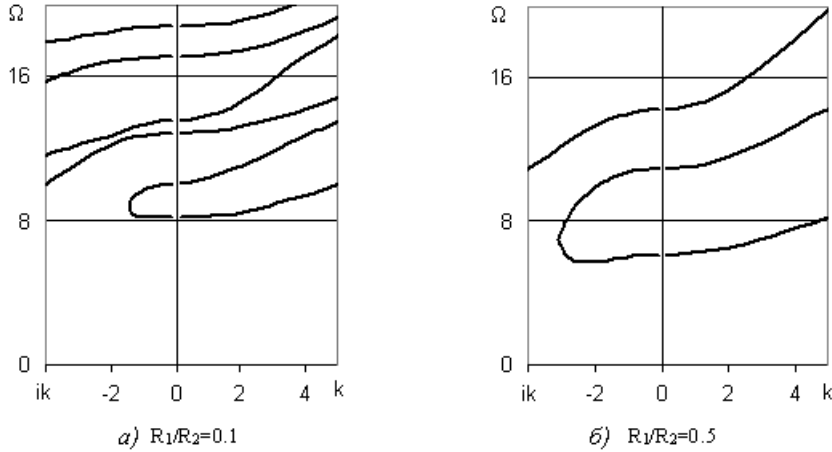


Рис. 2. Дисперсионный спектр волн  $S$ -типа с  $n = 0$  в кольцевом волноводе при  $\alpha = \pi/4$ .

Анализ построенных спектров показывает, что при увеличении относительного внутреннего радиуса волновода в диапазоне проведенных численных исследований, структура спектра качественно не меняется, однако частота запирания низшей моды бегущих волн понижается (см. рис. 2, 3).

Для волноводов с относительно малым внутренним радиусом темпы изменений в структуре спектров увеличиваются с ростом угловых размеров сечения волновода  $\alpha$ .

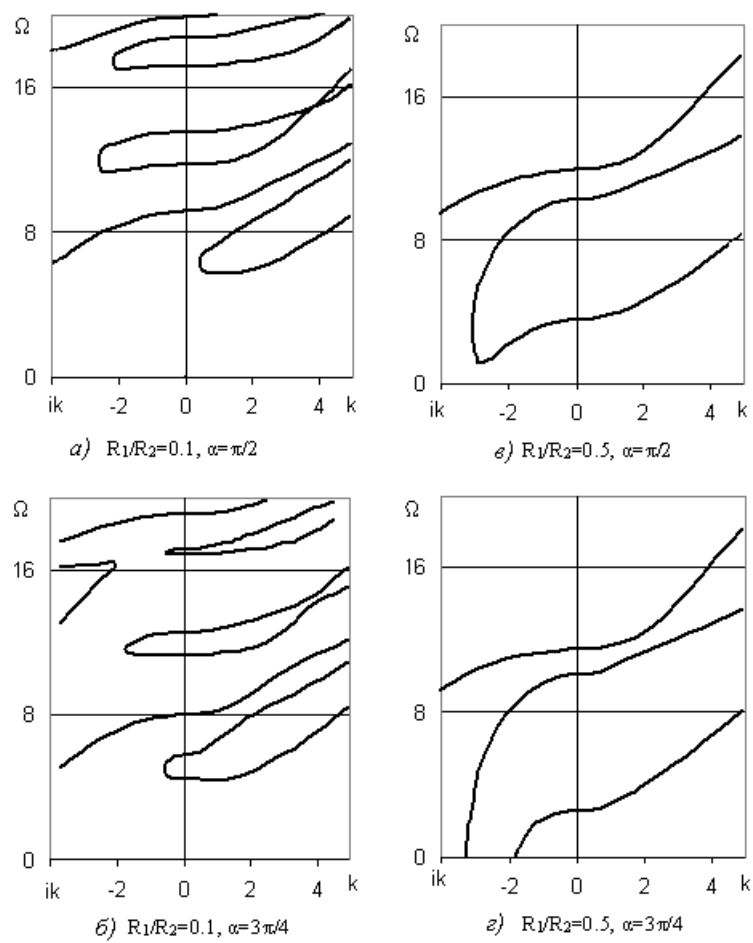


Рис. 3. Дисперсионный спектр волн  $S$ -типа с  $n = 0$  в кольцевом волноводе.

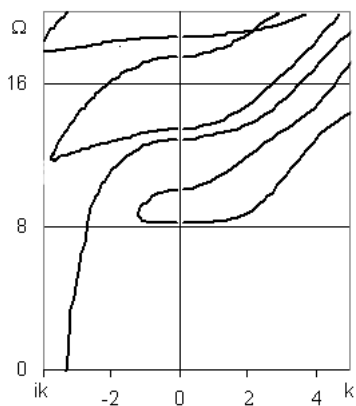


Рис. 4. Дисперсионный спектр волн  $S$ -типа в сплошном волноводе с секторным вырезом при  $n = 0, a = \pi/4$ .

При этом спектры для цилиндра кольцевого сечения сохраняют большую степень подобия с соответствующими спектрами для цилиндра сплошного кругового сечения при одинаковых значениях  $\alpha$ . Так, для кольцевого волновода с  $R_1/R_2 = 0.1$ ,  $\alpha = \pi/4$  и волновода кругового сечения с тем же секторным вырезом дисперсионные спектры волн  $S$ -типа при  $n = 0$  имеют предельно сходную структуру (рис. 2, а и рис. 4).

1. Влайков Г.Г., Григоренко А.Я., Шевченко С.Н. Некоторые задачи теории упругости для анизотропных цилиндров с некруговым поперечным сечением. – К.: Ин-т механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, Техн. центр, 2001. – 147 с.
2. Комиссарова Г.Л. Анализ комплексных корней дисперсионного уравнения жестко заземленного цилиндра // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 8. – С. 43-46.
3. Комиссарова Г.Л. Дисперсия осесимметричных нормальных волн в упругом жестко заземленном цилиндре // Там же. – 1981. – № 9. – С. 39-43.
4. Комиссарова Г.Л. Распространение нормальных осесимметричных волн в заполненных и окруженных жидкостью упругих цилиндрах из податливых материалов // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 5. – С. 104-1113.
5. Шульга В.М., Шульга О.М. О распространении волн в ортотропном цилиндре с жидкостью // Там же. – 2003. – 39, № 6. – С. 126-132.
6. Moiseenko I.A., Troyan R.R. The analysis of full spectra of normal elastic waves in homogeneous and inhomogeneous anisotropic cylindrical waveguides of complex cross-section // Days on Diffraction'2006: Abstr. International Seminar (St.-Petersburg, May 30 – June 2, 2006). – St.-Petersburg, 2006. – P. 55.
7. Космодамианский А.С., Моисеенко И.А., Троян Р.Р. Дисперсионный спектр анизотропного волновода секторного сечения с закрепленной границей // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 9. – С.46-51.
8. Моисеенко И.А., Троян Р.Р. Дисперсионные, кинематические и энергетические свойства нормальных волн в трансверсально изотропном цилиндрическом волноводе секторного сечения с варьируемой угловой мерой выреза // Акустичний симпозіум "Консонанс-2005" (Київ, 27–29 вересня 2005). – К.: ІГМ НАН України, 2006. – С. 231-236.
9. Пузырев В.В. Троян Р.Р. Упругие и электроупругие волны в цилиндрических волноводах секторного сечения из материалов гексагональной системы // IX Всероссийский съезд по теор. и прикл. механике (Нижний Новгород, 22-28 августа 2006): Аннот. докл. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2006. – Т. III. – С. 179.