УДК 531.391, 517.927.25, 517.984.5

©2006. **А.Л. Зуев**

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИИ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА

Рассмотрена задача Штурма–Лиувилля для модели гибкого манипулятора в виде балки С.П. Тимошенко, к которой прикреплено твердое тело. Доказаны утверждения о расположении собственных значений этой задачи. При дополнительных предположениях на механические параметры получено асимтотическое представление собственных частот.

**1. Введение.** Для описания движения роботов-манипуляторов с упругими звеньями широко используется модель балки С.П. Тимошенко, которая учитывает инерцию вращения и прогибы, обусловленные поперечным сдвигом [1, с. 389]. В цитируемой монографии проведен приближенный анализ частот колебаний свободно опертого стержня на основе этой модели. При частном значении параметров балки С.П. Тимошенко со свободным концом, в статье [2] получены оценки собственных значений $\lambda_n$ задачи Штурма–Лиувилля в зависимости от номера $n$. Отметим, что при более общих предположениях относительно механических параметров могут возникать кратные собственные значения [3]. Достаточно полный анализ собственных значений для модели С.П. Тимошенко при наличии демпфирующей силы и момента на конце балки проведен в работе [4].

В настоящей статье исследуются свойства собственных частот в задаче о колебаниях механической системы в виде упругой балки, к концу которой прикреплено твердое тело (нагрузка).

**2. Задача Штурма–Лиувилля.** В работе [5] предложена математическая модель движения управляемого манипулятора в виде балки С.П. Тимошенко с нагрузкой в поле силы тяжести. Собственные значения и формы колебаний такой модели удовлетворяют задаче Штурма–Лиувилля [5, с. 110]:

$$\begin{pmatrix} \zeta(\tau) \\ \zeta'(\tau) \\ \theta(\tau) \\ \theta'(\tau) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda p_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -p_2 & p_2 - \lambda p_3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \zeta(\tau) \\ \zeta'(\tau) \\ \theta(\tau) \\ \theta'(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in (0,1), \tag{1}$$

$$\zeta(0) = \theta(0) = 0, \quad \zeta'(1) - \theta(1) = \lambda p_4 \zeta(1), \quad \theta'(1) = \lambda p_5 \theta(1). \tag{2}$$

Функции $\zeta(\tau)$ и $\theta(\tau)$ описывают отклонение центральной линии балки и угол поворота сечения балки в точке с координатой $\tau$ (при соответствующем масштабировании). Физические параметры задачи (1), (2) задаются с помощью соотношений

$$p_1 = \frac{\rho l^2}{K}, \qquad p_2 = \frac{K l^2}{EI}, \qquad p_3 = \frac{I_\rho l^2}{EI}, \qquad p_4 = \frac{ml}{K}, \qquad p_5 = \frac{J_c l}{EI}.$$

Здесь $\rho$ – масса на единицу длины балки; $l$ – длина балки; $K = \gamma G A$; $\gamma$ – геометрическая константа, определяемая формой поперечного сечения; $G$ – модуль сдвига; $A$ – площадь поперечного сечения балки; $E$ – модуль Юнга; $I$ – момент инерции поперечного сечения;

$I_\rho$ – массовый момент инерции сечения балки; $m$ – масса твердого тела-нагрузки, прикрепленного к концу балки; $J_c$ – центральный момент инерции твердого тела-нагрузки. Предполагается, что твердое тело прикреплено к балке в своем центре масс ($c = 0$ в обозначениях работы [5]). Учитывая, что для балки с постоянной объемной плотностью справедливо соотношение $I_\rho = \rho I/A$, получим формулу

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{\gamma G}{E}.$$

Отсюда следует, что на практике выполнено неравенство $p_3 < p_1$, ибо $G/E \approx 0,37$ для используемых в манипуляторах металлов, $\gamma < 1$ (формулы для вычисления коэффицента $\gamma$ приведены в [6]).

Для определения собственных значений $\lambda$ задачи (1), (2) в статье [5] получено характеристическое уравнение следующего вида:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} e^{-i\sigma_1} & e^{i\sigma_1} & e^{-i\sigma_3} & e^{i\sigma_3} \\ \sigma_1\beta_1 e^{-i\sigma_1} & -\sigma_1\beta_1 e^{i\sigma_1} & \sigma_3\beta_3 e^{-i\sigma_3} & -\sigma_3\beta_3 e^{i\sigma_3} \\ \beta_1(p_1 + ip_4\sigma_1) & \beta_1(p_1 - ip_4\sigma_1) & \beta_3(p_1 + ip_4\sigma_3) & \beta_3(p_1 - ip_4\sigma_3) \\ i\sigma_1 - \lambda p_5 & i\sigma_1 + \lambda p_5 & i\sigma_3 - \lambda p_5 & i\sigma_3 + \lambda p_5 \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

где $\beta_1 = \sigma_1^2 - \lambda p_3, \quad \beta_3 = \sigma_3^2 - \lambda p_3$, а

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(p_1+p_3)\lambda - \sqrt{(p_1-p_3)^2\lambda^2 + 4p_1p_2\lambda}}\ , \\ \sigma_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(p_1+p_3)\lambda + \sqrt{(p_1-p_3)^2\lambda^2 + 4p_1p_2\lambda}}\ . \end{aligned} \qquad (4)$$

В статье [5] рассмотрен частный случай характеристического уравнения при $p_4 = 0$, $p_5 = 0$.

В данной работе исследуются свойства собственных значений $\lambda$ задачи (1), (2) в предположении, что все коэффициенты $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$, $p_5$ являются положительными константами.

**3. Распределение собственных значений.** Рассмотрим гильбертово пространство

$$X = \{(\zeta, \theta, y, z) \,:\, \zeta, \theta \in L^2[0,1],\, y, z \in \mathbb{C}\}$$

над полем комплексных чисел. Определим скалярное произведение элементов $\xi_1 = (\zeta_1, \theta_1, y_1, z_1) \in X$ и $\xi_2 = (\zeta_2, \theta_2, y_2, z_2) \in X$ следующим образом:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \int_0^1 \left(p_1p_2\zeta_1(\tau)\bar{\zeta}_2(\tau) + p_3\theta_1(\tau)\bar{\theta}_2(\tau)\right) d\tau + p_2p_4y_1\bar{y}_2 + p_5z_1\bar{z}_2. \qquad (5)$$

Зададим линейный оператор $A$ с областью определения $D(A) \subset X$ и значениями в $X$:

$$D(A) = \{(\zeta, \theta, y, z) \,:\, \zeta, \theta \in H^2(0,1),\, \zeta(0) = \theta(0) = 0,\, y = \zeta(1),\, z = \theta(1)\},$$

$$A(\zeta, \theta, y, z) = \left(\frac{\theta' - \zeta''}{p_1}, \frac{p_2(\theta - \zeta') - \theta''}{p_3}, \frac{\zeta'(1) - \theta(1)}{p_4}, \frac{\theta'(1)}{p_5}\right),$$

где $H^2(0,1)$ – пространство Соболева.

Нетрудно видеть, что число $\lambda$ является собственным значением задачи Штурма–Лиувилля (1), (2) только в том случае, если существует элемент $\xi \in X$, удовлетворяющий условиям

$$A\xi = \lambda\xi,\ \xi \neq 0,\ \ \xi \in D(A). \tag{6}$$

Если $\lambda$ и $\xi = (\zeta, \theta, y, z)$ удовлетворяют (6), то функции $\zeta(\tau)$, $\theta(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, определяют собственную форму колебаний балки, соответствующую собственному значению $\lambda$.

Установим важное свойство оператора $A$. Пусть $\xi_1, \xi_2 \in D(A)$. Интегрируя по частям с учетом граничных условий из $D(A)$, получим:

$$\langle A\xi_1, \xi_2\rangle = \int_0^1 \left(p_2(\theta_1' - \zeta_1'')\bar{\zeta}_2 + (p_2(\theta_1 - \zeta_1') - \theta_1'')\bar{\theta}_2\right) d\tau + p_2(\zeta_1'(1) - \theta_1(1))\bar{\zeta}_2(1) + \theta_1'(1)\bar{\theta}_2(1) =$$

$$= \int_0^1 \left(p_2\theta_1\bar{\theta}_2 + p_2(\zeta_1' - \theta_1)\bar{\zeta}_2' + (p_2\zeta_1 + \theta_1')\bar{\theta}_2'\right) d\tau + \left(p_2(\theta_1 - \zeta_1')\bar{\zeta}_2 - (p_2\zeta_1 + \theta_1')\bar{\theta}_2\right)\Big|_{\tau=0}^1 +$$

$$+ p_2(\zeta_1'(1) - \theta_1(1))\bar{\zeta}_2(1) + \theta_1'(1)\bar{\theta}_2(1) =$$

$$= \int_0^1 \left(p_2(\theta_1\bar{\theta}_2 - \theta_1\bar{\zeta}_2' + \zeta_1\bar{\theta}_2' - \zeta_1\bar{\zeta}_2'') - \theta_1\bar{\theta}_2''\right) d\tau + \left(p_2\zeta_1\bar{\zeta}_2' + \theta_1\bar{\theta}_2'\right)\Big|_{\tau=0}^1 - p_2\zeta_1(1)\bar{\theta}_2(1) =$$

$$= \int_0^1 \left(p_2\zeta_1(\bar{\theta}_2' - \bar{\zeta}_2'') + \theta_1(p_2(\bar{\theta}_2 - \bar{\zeta}_2') - \bar{\theta}_2'')\right) d\tau + p_2\zeta_1(1)\left(\bar{\zeta}_2'(1) - \bar{\theta}_2(1)\right) + \theta_1(1)\bar{\theta}_2'(1) =$$

$$= \langle \xi_1, A\xi_2\rangle\,.$$

Таким образом, $A$ обладает свойствами самосопряженного оператора [7, с. 330]:

1. *все собственные значения $\lambda$ вещественны;*
2. *собственные векторы $\xi_1, \xi_2 \in D(A)$, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2$, ортогональны в $X$.*

Ввиду вещественности собственных значений $\lambda$, собственные функции $\zeta(\tau)$ и $\theta(\tau)$ задачи (1), (2) также могут быть выбраны вещественными. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только элементы пространства $X$ с вещественными компонентами и опускать знак комплексного сопряжения в скалярном произведении (5). Имеет место лемма о расположении собственных значений.

**Лемма 1.***Пусть $p_2 < 2$, тогда все собственные значения $\lambda$ задачи (1), (2) принадлежат полуинтервалу $[\lambda_0, +\infty)$, где*

$$\lambda_0 = \min\left\{\frac{1}{p_1 + 2p_4}, \frac{2 - p_2}{p_3 + 2p_5}\right\} > 0. \tag{7}$$

**Доказательство.** Пусть $\xi \in D(A)$. Вычислим $\langle A\xi, \xi\rangle$, используя прием интегрирования по частям:

$$\langle A\xi, \xi\rangle = \int_0^1 (p_2\zeta(\theta' - \zeta'') + p_2\theta(\theta - \zeta') - \theta\theta'')d\tau + p_2(\zeta'(1) - \theta(1))\zeta(1) + \theta(1)\theta'(1) =$$

$$= \int_0^1 (p_2(\zeta'^2 + \theta^2) + \theta'^2 - 2p_2\theta\zeta')d\tau = \int_0^1 (p_2(\zeta' - \theta)^2 + \theta'^2)d\tau =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{p_2}{2}\zeta'^2 + \theta'^2 - p_2\theta^2\right) d\tau + \frac{p_2}{2}\int_0^1 (\zeta' - 2\theta)^2 d\tau \geq \int_0^1 \left(\frac{p_2}{2}\zeta'^2 + \theta'^2 - p_2\theta^2\right) d\tau. \qquad (8)$$

Поскольку $\zeta(0) = 0$ и $\theta(0) = 0$, то функции $\zeta(\tau)$ и $\theta(\tau)$ удовлетворяют неравенствам Фридрихса следующего вида [2, p. 440]:

$$\int_0^1 \zeta'^2(\tau)d\tau \geq 2\int_0^1 \zeta^2(\tau)d\tau, \ \int_0^1 \theta'^2(\tau)d\tau \geq 2\int_0^1 \theta^2(\tau)d\tau. \qquad (9)$$

Кроме того,

$$\zeta^2(1) = \left(\int_0^1 1\cdot\zeta'(\tau)d\tau\right)^2 \leq \int_0^1 d\tau \cdot \int_0^1 \zeta'^2(\tau)d\tau = \int_0^1 \zeta'^2(\tau)d\tau, \ \theta^2(1) \leq \int_0^1 \theta'^2(\tau)d\tau \quad (10)$$

на основании неравенства Коши–Буняковского.

Пусть $\lambda_0$ – положительное число. Принимая во внимание неравенства (8) и (10), получим

$$\langle A\xi,\xi\rangle - \lambda_0\langle\xi,\xi\rangle \geq \int_0^1 \left(\frac{p_2}{2}\zeta'^2 + \theta'^2 - p_2\theta^2 - \lambda_0(p_1p_2\zeta^2 + p_3\theta^2)\right)d\tau - \lambda_0(p_2p_4\zeta^2(1) + p_5\theta^2(1)) \geq$$

$$\geq \int_0^1 \left(p_2\left(\frac{1}{2} - \lambda_0 p_4\right)\zeta'^2 + (1-\lambda_0p_5)\theta'^2 - (p_2+\lambda_0p_3)\theta^2 - \lambda_0p_1p_2\zeta^2\right)d\tau. \qquad (11)$$

Полагая, что

$$\frac{1}{2} - \lambda_0 p_4 \geq 0, \ 1 - \lambda_0 p_5 \geq 0,$$

продолжим оценку выражения (11) с помощью неравенств (9). Имеем

$$\langle A\xi,\xi\rangle - \lambda_0\langle\xi,\xi\rangle \geq \int_0^1 \left(p_2(1-\lambda_0(p_1+2p_4))\zeta^2(\tau) + (2 - p_2 - \lambda_0(p_3+2p_5))\theta^2(\tau)\right)d\tau.$$

Отсюда заключаем, что

$$\langle A\xi,\xi\rangle \geq \lambda_0\langle\xi,\xi\rangle \qquad (12)$$

для всех $\xi \in D(A)$, если $\lambda_0$ определяется выражением (7) и $p_2 < 2$.

Теперь легко видеть, что всякое собственное значение $\lambda$ оператора $A$ удовлетворяет неравенству $\lambda \geq \lambda_0$. Действительно, если $A\xi = \lambda\xi$ для некоторого $\xi \in D(A)$, $\xi \neq 0$, то $\langle A\xi,\xi\rangle = \lambda\langle\xi,\xi\rangle$. С учетом неравенства (12) получим

$$(\lambda - \lambda_0)\langle\xi,\xi\rangle \geq 0,$$

откуда следует $\lambda - \lambda_0 \geq 0$ при $\xi \neq 0$. Лемма 1 доказана.

Поскольку выражение (3) определяет не равную тождественно нулю аналитическую функцию $\Delta(\lambda)$, то у задачи (1), (2) существует не более чем счетное множество собственных значений, которое при этом не имеет конечной предельной точки и кратность каждого собственного значения конечна (см. [8, с. 22]). Кроме того, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Если $p_1 \neq p_3$, то множество корней характеристического уравнения (3) не ограничено сверху.*

**Доказательство.** Раскрывая определитель в формуле (3)[1], получим асимптотическое представление для $\Delta(\lambda)$:

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda^4} = -4p_1p_4p_5(p_1-p_3)^2\left(\cos\sigma_1\sin\sigma_3 + R(\lambda)\right), \tag{13}$$

где

$$R(\lambda) = \left(\frac{\sqrt{p_1}}{p_4}\cos\sigma_1\cos\sigma_3 - \frac{\sqrt{p_3}}{p_5}\sin\sigma_1\sin\sigma_3\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{при } \lambda\to+\infty.$$

Покажем, что функция $\phi(\lambda) = \cos\sigma_1\sin\sigma_3$ имеет счетное множество нулей в любом полуинтервале вида $\lambda \ge M$ (величины $\sigma_1 = \sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_3 = \sigma_3(\lambda)$ зависят от $\lambda$ согласно формулам (4)). Легко проверить, что все решения уравнения $\phi(\lambda) = 0$ можно задать в виде $\lambda = \lambda_k^*$ ($k$ – целочисленный индекс), где $\lambda_k^*$ определяется из условий

$$\sigma_1(\lambda_k^*) = \frac{\pi k}{2} \quad \text{при нечетном } k, \tag{14}$$

$$\sigma_3(\lambda_k^*) = \frac{\pi k}{2} \quad \text{при четном } k. \tag{15}$$

Отсюда можно найти $\lambda_k^*$ явным образом, разрешив формулы (4) относительно $\lambda$:

$$\lambda = \frac{p_1p_2 + (p_1+p_3){\sigma_1}^2 + \sqrt{\left((p_1-p_3){\sigma_1}^2 + p_1p_2\right)^2 + 4p_1p_2p_3{\sigma_1}^2}}{2p_1p_3}, \tag{16}$$

$$\lambda = \frac{p_1p_2 + (p_1+p_3){\sigma_3}^2 - \sqrt{\left((p_1-p_3){\sigma_3}^2 + p_1p_2\right)^2 + 4p_1p_2p_3{\sigma_3}^2}}{2p_1p_3}. \tag{17}$$

Раскладывая формулы (16) и (17) в ряд Маклорена по степеням $1/\sigma_1$, $1/\sigma_3$, получим следующие асимптотические представления:

$$\lambda = \frac{p_1p_2}{(p_1-p_3)p_3} + \frac{{\sigma_1}^2}{p_3} + O({\sigma_1}^{-2}) \quad \text{при } \sigma_1\to\infty,$$

$$\lambda = \frac{p_2}{p_3-p_1} + \frac{{\sigma_3}^2}{p_1} + O({\sigma_3}^{-2}) \quad \text{при } \sigma_3\to\infty. \tag{18}$$

Подставив в эти формулы выражения (14), (15), получим асимптотическое представление корней уравнения $\phi(\lambda) = 0$ при больших значениях $k$:

$$\lambda_k^* = \begin{cases} \dfrac{p_1p_2}{(p_1-p_3)p_3} + \dfrac{\pi^2k^2}{4p_3} + O(1/k^2) & \text{при нечетном } k, \\[2ex] \dfrac{p_2}{p_3-p_1} + \dfrac{\pi^2k^2}{4p_1} + O(1/k^2) & \text{при четном } k. \end{cases} \tag{19}$$

[1] Вспомогательные выкладки проведены с помощью компьютерной программы.

Таким образом, $\lambda_k^* \to +\infty$ при $k \to \infty$. Покажем теперь, что возмущенное уравнение $\phi(\lambda) + R(\lambda) = 0$ также имеет неограниченное сверху множество решений. Действительно, этот факт вытекает из непрерывности функций $\phi(\lambda)$, $R(\lambda)$ и свойств

$$\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\,\phi(\lambda) > 0, \qquad \underline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\,\phi(\lambda) < 0.$$

Отсюда на основании формулы (13) заключаем, что характеристическое уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ имеет корни в любом полуинтервале вида $\lambda \geq M$. Лемма 2 доказана.

Итак, множество собственных значений задачи (1), (2) счетно при $p_1 \neq p_3$. Расположим эти значения в неубывающем порядке с учетом их кратности:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots, \quad \lambda_n \to +\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Из Леммы 1 следует, что $\lambda_1 \geq \lambda_0 > 0$ при выполнении условия $p_2 < 2$. Учитывая представление (13), естественно предположить, что значения $\lambda_n$ при больших $n$ будут "близки" к соответствующим числам $\lambda_k^*$, определяемым формулой (19). Для обоснования такого предположения докажем теорему об асимптотическом распределении собственных частот при дополнительных условиях на механические параметры.

**Теорема 1.** *Пусть $\sqrt{p_3/p_1} = r/q$, где $r < q$ – натуральные числа, $q$ – нечетно. Тогда для всякого собственного значения $\lambda_n$ задачи (1) найдутся числа $k = k(n)$ и*

$$\omega_k^* = \begin{cases} \dfrac{\pi k}{2p_3} & \textit{при нечетном } k, \\ \dfrac{\pi k}{2p_1} & \textit{при четном } k, \end{cases} \tag{20}$$

*обладающие свойствами $\sqrt{\lambda_n} = \omega_k^* + O(\frac{1}{k})$, $\quad k \to \infty$ при $n \to \infty$.*

**Доказательство.** В характеристическом уравнении $\Delta(\lambda) = 0$ выразим $\lambda$ и $\sigma_1$ через $\sigma_3$ по формулам (4), (18). В результате с учетом (13) получим следующее уравнение относительно $\sigma_3$:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{p_3}{p_1}}\sigma_3 - \frac{\sqrt{p_1}p_2(p_1+p_3)}{2\sqrt{p_3}(p_1-p_3)\sigma_3}\right)\left(\sin\sigma_3 + \frac{\sqrt{p_1p_3}}{p_4\sigma_3}\cos\sigma_3\right) =$$
$$= \frac{p_3}{p_5\sigma_3}\sin\left(\sqrt{\frac{p_3}{p_1}}\sigma_3 - \frac{\sqrt{p_1}p_2(p_1+p_3)}{2\sqrt{p_3}(p_1-p_3)\sigma_3}\right)\sin\sigma_3 + O\left(\frac{1}{\sigma_3^2}\right). \tag{21}$$

Отбросив члены более высокого порядка малости, перепишем уравнение (21) в виде

$$\cos(\alpha\sigma)\sin\sigma = \varepsilon(\sigma), \qquad (\alpha = \sqrt{p_3/p_1},\ \sigma = \sigma_3), \tag{22}$$

где $\varepsilon(\sigma) = O(1/\sigma)$ при $\sigma \to \infty$. Это означает, что $\varepsilon(\sigma)$ допускает оценку

$$|\varepsilon(\sigma)| \leq \frac{M_1}{\sigma} \quad \text{при } \sigma \geq \tilde{\sigma} \tag{23}$$

с некоторыми положительными константами $\tilde{\sigma}$, $M_1$. Функция $f(\sigma) = \sin\sigma\cos(\alpha\sigma)$ обращается в нуль при $\sigma = \sigma_k^*$, где

$$\sigma_k^* = \begin{cases} \dfrac{\pi k}{2} & \text{при четном } k, \\ \dfrac{\pi k}{2\alpha} & \text{при нечетном } k. \end{cases} \tag{24}$$

Для локализации решений уравнения (22) применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа к функции $f$:

$$f(\sigma_k^* + d) = f'(\sigma_k^*)d + \frac{f''(\eta)}{2}d^2,\ |\eta - \sigma_k^*| \le |d|, \tag{25}$$

$$f'(\sigma_k^*) = \begin{cases} (-1)^{k/2}\cos\left(\dfrac{\pi k \alpha}{2}\right) & \text{при четном } k, \\ (-1)^{(k+1)/2}\alpha\sin\left(\dfrac{\pi k}{2\alpha}\right) & \text{при нечетном } k, \end{cases} \tag{26}$$

$$f''(\eta) = -(1+\alpha^2)\sin\eta\cos(\alpha\eta) - 2\alpha\cos\eta\sin(\alpha\eta).$$

Из условия теоремы $\alpha = r/q$ ($q$ – нечетное число) следует периодичность $f(\sigma)$ и свойство $f'(\sigma_k^*) \ne 0$ при всех целых $k$. Для доказательства этого свойства воспользуемся рассуждением от противного. Если $f'(\sigma_k^*) = 0$ при некотором $k$, то согласно формулам (26) выполнена одна из двух альтернатив:

1) $k$ – четно, $kr/q$ – нечетное целое число;

2) $k$ – нечетно, $kq/r$ – четное целое число.

Ни одна из этих альтернатив невозможна при нечетном $q$. Таким образом, при выполнении условий теоремы значения $|f'(\sigma_k^*)|$ отделены от нуля[2]:

$$M_2 = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |f'(\sigma_k^*)| > 0.$$

Обозначим

$$h = \frac{M_2}{2(\alpha+1)^2} > 0$$

и покажем, что функция $f(\sigma)$ строго монотонна на каждом из интервалов вида $I_k = (\sigma_k^* - h, \sigma_k^* + h)$. Действительно, производная $f'(\sigma)$ непрерывна и не обращается в нуль при $\sigma \in I_k$:

$$|f'(\sigma)| = |f'(\sigma_k^*) + f''(\eta)(\sigma - \sigma_k^*)| \ge |f'(\sigma_k^*)| - h\sup_{\eta\in\mathbb{R}}|f''(\eta)| \ge M_2 - h(1+\alpha)^2 = \frac{M_2}{2} > 0.$$

Поскольку $\sigma_k^*$ расположены в интервалах $I_k$, а функция $f(\sigma)$ непрерывна и периодична, то значения $f(\sigma)$ отделены от нуля на множестве $S = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$:

$$M_3 = \inf_{\sigma\in S} |f(\sigma)| > 0.$$

Зададимся числом

$$\sigma_{min} = \max\left\{\tilde{\sigma}, \frac{M_1}{M_3}, \sqrt{\frac{2M_1}{M_2}}\right\}. \tag{27}$$

[2]Нетрудно проверить, что в случае $\alpha = r/q$, $(r,q) = 1$, $q$ – четно, а также в случае иррационального $\alpha$, нижняя граница значений $|f'(\sigma_k^*)|$ равна нулю.

При таком выборе $\sigma_{min}$ уравнение (22) не имеет решений в интервале $\sigma \in (\sigma_{min}, +\infty)$, удовлетворяющих условию $\sigma \in S$. Действительно,

$$|f(\sigma)| \geq M_3 \geq \frac{M_1}{\sigma_{min}} > \frac{M_1}{\sigma} \geq |\varepsilon(\sigma)| \quad \text{при } \sigma \in S,\ \sigma > \sigma_{min}.$$

Таким образом, каждое решение уравнения (22) из интервала $\sigma > \sigma_{min}$ находится в некотором $I_k$. И наоборот, при достаточно больших $k$ каждый интервал $I_k \subset (\sigma_{min}, +\infty)$ содержит решение уравнения (22). Для доказательства этого факта рассмотрим произвольное значение $\sigma_k^*$, удовлетворяющее неравенству $\sigma_k^* > \sigma_{min} + d$. Построим такой отрезок $[\sigma_k^* - d, \sigma_k^* + d]$, чтобы на его концах функция $f(\sigma) - \varepsilon(\sigma)$ принимала значения разных знаков, либо обращалась в нуль. Для этого достаточно выбрать число $d$ из условий

$$|f(\sigma_k^* - d)| \geq |\varepsilon(\sigma_k^* - d)|,\ |f(\sigma_k^* + d)| \geq |\varepsilon(\sigma_k^* + d)|,\ 0 < d < h, \tag{28}$$

поскольку $f(\sigma)$ меняет знак при переходе через $\sigma_k^*$. С учетом формулы (25), условия (28) будут выполнены, если

$$|f(\sigma_k^* \pm d)| \geq |f'(\sigma_k^*)|d - \frac{d^2}{2}\sup_{\eta \in R}|f''(\eta)| \geq M_2 d - \frac{(\alpha+1)^2}{2}d^2 \geq \frac{M_1}{\sigma_k^* - d}. \tag{29}$$

Из формулы конечных приращений вытекает неравенство

$$\frac{1}{\sigma_k^* - d} < \frac{1}{\sigma_k^*} + \frac{d}{\sigma_{min}^2}, \qquad (0 < d < \sigma_k^* - \sigma_{min}). \tag{30}$$

Поэтому условие (29) выполнено при

$$d^2 - 2bd + c \leq 0, \qquad 0 < d < h, \tag{31}$$

где

$$b = \frac{M_2 - M_1/\sigma_{min}^2}{(\alpha+1)^2}, \qquad c = \frac{2M_1}{(\alpha+1)^2\sigma_k^*} > 0.$$

Отметим, что $b > 0$ вследствие неравенства $\sigma_{min}^2 \geq 2M_1/M_2$, которое следует из формулы (27). Решив неравенство (31), приходим к выводу, что отрезок $[\sigma_k^* - d, \sigma_k^* - d]$ содержит решение уравнения (22), если $d = d_k^*$:

$$d_k^* = b - \sqrt{b^2 - c} = \frac{M_1}{(M_2 - M_1/\sigma_{min}^2)\sigma_k^*} + O\left(\frac{1}{(\sigma_k^*)^2}\right), \quad \sigma_k^* > \frac{2M_1}{b^2(\alpha+1)^2}. \tag{32}$$

Остается показать, что при таком $d = d_k^*$ множество $I_k \setminus [\sigma_k^* - d, \sigma_k^* - d]$ не содержит решений уравнения (22). Для этого достаточно установить, принимая во внимание оценку (23), что

$$|f(\sigma_k^* \pm \delta)| > \frac{M_1}{\sigma_k^* - \delta} \tag{33}$$

при всех $\delta \in (d_k^*, h]$. Вследствие формул (25), (30), неравенство (33) выполняется в случае $P(\delta) = \delta^2 - 2b\delta + c < 0$. Поскольку корнями квадратного многочлена $P(\delta)$ являются числа $\delta = d_k^*$ и $\delta = b + \sqrt{b^2 - c} > b \geq h$, то $P(\delta)$ сохраняет (отрицательный) знак при всех $\delta \in (d_k^*, h]$.

Таким образом, каждое достаточно большое $\sigma$, удовлетворяющее уравнению (22), расположено в замкнутой окрестности некоторого числа $\sigma_k^*$ с радиусом $d_k^*$. Из формулы (32) вытекает оценка $\sigma = \sigma_k^* + O(1/k)$ для решений уравнения (22) при $k \to \infty$. Подставляя эту оценку в формулу (17) и извлекая корень, получим оценку вида $\sqrt{\lambda_n} = \omega_k^* + O(1/k)$, что и требовалось доказать.

Результаты данной работы могут быть использованы в дальнейшем при исследовании свойств траекторий уравнений движения манипулятора с бесконечным числом степеней свободы. Представление (20) имеет также возможное практическое применение для оценки механических параметров манипулятора в случае, если известны частоты колебаний.

1. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
2. *Krabs W., Sklyar G.M.* On the Controllability of a Slowly Rotating Timoshenko Beam // J. for Analysis and Applications. – 1999. – **18**, No. 2. – P. 437-448.
3. *Geist B., McLaughlin J.R.* Double Eigenvalues for the Uniform Timoshenko Beam // Appl. Math. Lett. – 1997. – **10**, No. 3. – P. 129-134.
4. *Xu G.Q., Yung S.P.* Exponential Decay Rate for a Timoshenko Beam with Boundary Damping // J. of Optimization Theory and Applications. – 2004. – **123**, No. 3. – P. 669-693.
5. *Зуев А.Л.* Управление моделью упругого манипулятора в виде балки в рамках теории Тимошенко // Прикл. механика. – 2005. – № 12. – С. 107-115.
6. *Cowper G.R.* The shear coefficient in Timoshenko's beam theory // Transactions of ASME. Ser. E. – 1966. – **88**. – P. 335-340.
7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
8. *Костюченко А.Г., Саргсян И.С.* Распеределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). – М.: Наука, 1979. – 400 с.

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
al_zv@mail.ru

Получено 27.06.2006