ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2005. Вып. 35

УДК 532.5:517.928.7

©2005. **А.Г. Петров**

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Предлагается метод асимптотического интегрирования гамильтоновых систем с помощью параметризации канонических преобразований. Метод применяется к интегрированию гамильтоновых систем общего вида с малым параметром и является модификацией метода инвариантной нормализации, предложенной В.Ф. Журавлевым. Так же, как и в методе Журавлева, нормальная форма и каноническая замена в каждом приближении сводится к вычислению одной квадратуры. Однако, в данном методе не надо приводить систему к автономному виду. Обсуждается связь метода с известными методами нормальной формы. На примерах демонстрируется эффективность предлагаемых методов.

1. Параметрическая форма канонических преобразований. Общий результат параметризации канонической замены переменных в гамильтоновых системах сформулируем в виде теоремы [1, 2].

Теорема 1. Пусть преобразование переменных $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ записано в параметрической форме

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{x} - \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{y}}\,, & \mathbf{Q} &= \mathbf{x} + \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{y}}\,, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{y} + \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{x}}\,, & \mathbf{P} &= \mathbf{y} - \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{x}}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда при любой функции $\Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$:

1) якобианы двух преобразований $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ тождественны

$$\frac{\partial(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial(\mathbf{x},\mathbf{y})} = \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = J(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}); \tag{2}$$

2) в области $J > 0$ преобразование (1) переменных $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ переводит гамильтонову систему $H = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ в гамильтонову систему $\tilde{H} = \tilde{H}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$ по следующему закону:

$$\Psi_t(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{H}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}), \tag{3}$$

где аргументы $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ и $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ в гамильтонианах H и $\tilde{H}$ выражены через параметры $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ по формулам (1).

Функция Ψ тесно связана с производящей функцией, которая определяется дифференциальной формой

$$d\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} Q_i - q_i & P_i - p_i \\ dQ_i + dq_i & dP_i + dp_i \end{vmatrix} + (\tilde{H} - H)dt. \tag{4}$$

При $dt = 0$ она введена Пуанкаре (см. [3] стр. 191, [4], стр. 337).

Обобщенная производящая функция Пуанкаре и функция Ψ очень просто выражаются друг через друга

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Psi\left(\frac{\mathbf{q} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{2}, \frac{\mathbf{p} + \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{2}\right) = \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

В свою очередь функция Пуанкаре выражается через производящие функции Якоби $S_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{P})$ и $S_2(t, \mathbf{p}, \mathbf{Q})$

$$dS_1 = \mathbf{p}d\mathbf{q} + \mathbf{Q}d\mathbf{P} + (\tilde{H} - H)dt, \quad \det S_{1\mathbf{qP}} \neq 0,$$
$$dS_2 = -\mathbf{q}d\mathbf{p} - \mathbf{P}d\mathbf{Q} + (\tilde{H} - H)dt, \quad \det S_{2\mathbf{pQ}} \neq 0$$

следующим образом:

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[S_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{P}) - \mathbf{qP} + S_2(t, \mathbf{Q}, \mathbf{p}) + \mathbf{Qp}\right]. \tag{5}$$

Можно показать, что определитель Δ матрицы $E + \partial(\mathbf{Q}, \mathbf{P})/\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ выражается через J следующим образом: $\Delta = 2^{2n}/J$. Поэтому параметризация (1) в области Ω существует, если в области $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Omega$ преобразование $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – каноническое, и ни одно из собственных значений матрицы Якоби A не равно -1.

В монографии [4] обращается внимание на "удручающую неинвариантность" производящих функций S_1 и S_2 по отношению к выбору базиса канонической системы координат и инвариантность дифференциальной формы Пуанкаре (4). Отсюда следует, что и параметрическая функция $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ также имеет инвариантный характер. Условие существования параметризации $J \neq 0$ инвариантно по отношению к выбору канонических переменных, тогда как условие $\det S_{1\mathbf{qP}} \neq 0$ зависит от выбора канонических переменных. Условие $\det S_{1\mathbf{qP}} \neq 0$ может нарушиться при канонической замене переменных. Кроме того, класс параметризуемых канонических преобразований существенно шире класса канонических преобразований через производящую функцию. Так, поворот на $90^\circ : q = -P, p = Q$ нельзя представить через производящую функцию $S(q, P)$, а через параметрическую функцию можно: $\Psi = x^2 + y^2$. Эти и другие преимущества параметризации перед методом производящих функций уже отмечались [1].

Можно показать, что уравнение (3) приводит к развитому ранее [6, 7] методу инвариантной нормализации гамильтонианов.

2. Об инвариантной нормализации гамильтонианов. Построению нормальной формы гамильтониана в окрестности неподвижной точки посвящены работы [8 – 13], (см. также монографии [4, 14]). При отсутствии резонансов нормальная форма называется нормальной формой Биркгофа [8]. Обобщение на резонансные системы, в которых все собственные числа различны, получено в работе [9]. В книге [10] (см. также [13, п. 6]) предложена нормальная форма, в которой жордановы клетки матрицы линейной системы используются для дальнейшего сокращения числа нелинейных членов. Самое общее определение нормальной формы, пригодное для квадратичной части гамильтонианов любого вида, дано в работах в [11, 12].

Во всех вышеперечисленных случаях порождающий гамильтониан выбирается в виде простейшей квадратичной формы для линейной системы, а определение нормальной формы привязывается к выбору порождающего гамильтониана.

В литературе наиболее распространены два способа построения канонических замен, приводящих систему к нормальной форме. Один способ основан на использовании производящих функций. Так поступал Биркгоф [8]. В другом способе вместо производящих функций применяются генераторы Ли, что удобнее, поскольку не требует обращения степенных рядов, необходимого в случае производящих функций.

В.Ф. Журавлевым [6, 7] предложено новое определение нормальной формы Биркгофа для возмущенного гамильтониана:

$$\begin{gathered}\bar{H}(t,\mathbf{q},\mathbf{p},\varepsilon)=H_0(t,\mathbf{q},\mathbf{p})+\bar{F}(t,\mathbf{q},\mathbf{p},\varepsilon),\\ \bar{F}(t,\mathbf{q},\mathbf{p},\varepsilon)=\varepsilon\bar{F}_1(t,\mathbf{q},\mathbf{p})+\varepsilon^2\bar{F}_2(t,\mathbf{q},\mathbf{p})+\dots\,.\end{gathered} \tag{6}$$

Определение. Возмущенный гамильтониан имеет нормальную форму тогда и только тогда, когда возмущение является первым интегралом невозмущенной части $\dfrac{\partial\bar{F}}{\partial t}+$ $+\{H_0,\bar{F}\}=0$, где $\{f,g\}=f_{\mathbf{p}}g_{\mathbf{q}}-f_{\mathbf{q}}g_{\mathbf{p}}$ – скобки Пуассона.

Преимущество такого определения перед известными обусловлено тремя причинами.

1°. Решение полной системы дифференциальных уравнений Гамильтона с гамильтонианом в нормальной форме получается суперпозицией решений невозмущенной системы и решения системы с автономным гамильтонианом, равным $F(0,\mathbf{q},\mathbf{p},\varepsilon)$. Этот результат был сформулирован в виде теоремы [7].

Теорема В.Ф. Журавлева. Если система с гамильтонианом $\bar{H}$ удовлетворяет условию нормальной формы, то для построения общего решения соответствующих уравнений Гамильтона достаточно:

А) найти общее решение порождающей системы с гамильтонианом $H_0(t,\mathbf{q},\mathbf{p})$;

Б) найти общее решение системы, определяемой только возмущением $\bar{F}(0,\mathbf{q},\mathbf{p},\varepsilon)$, при условии, что в этой системе явно входящее в гамильтониан время положено равным нулю.

Тогда общее решение исходной неавтономной системы представляется композицией в произвольном порядке полученных решений (вместо произвольных постоянных в решении второй системы подставляются решения первой или наоборот).

2°. Инвариантный характер критерия позволяет осуществлять нормализацию без предварительного упрощения невозмущенной части и без разделения на случаи автономный – неавтономный, резонансный – нерезонансный. Можно даже менять местами невозмущенную часть и возмущение, так как эти слагаемые равноправны. (Этот необычный для классичесского метода нормальной формы факт используется в третьем примере.)

3°. Асимптотики нормальной формы и замены переменных, приводящей гамильтониан к нормальной форме, находятся последовательными квадратурами от известных на каждом шаге функций.

Надо обратить внимание на следующие особенности метода инвариантной нормализации. Нормализация по Журавлеву без предварительного упрощения невозмущенной части дает, вообще говоря, два интеграла. Поэтому для получения дополнительных интегралов следует квадратичную часть привести к простейшему виду так же, как и при обычной нормализации. Тогда, если в линейной системе нет кратных корней, нормальная форма по Журавлеву совпадет с обычной нормальной формой.

Кроме того, обычная нормальная форма строится всегда в окрестности неподвижной точки, тогда как нормальная форма по Журавлеву строится в некоторой области, которая иногда может и не примыкать к неподвижной точке.

3. Алгоритм инвариантной нормализации с помощью параметрической замены. С помощью уравнения (3) теоремы 1 получен аналог метода нормализации

В.Ф. Журавлева. В нем вместо генератора Ли используется каноническая замена переменных в параметрической форме (1). Этот алгоритм построен в работах [15, 16] и состоит в следующем.

Пусть дан гамильтониан

$$H(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) = H_0(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) + F(t,\mathbf{q},\mathbf{p},\varepsilon), \quad F(t,\mathbf{q},\mathbf{p},\varepsilon) = \varepsilon F_1(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) + \varepsilon^2 F_2(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) + \ \ldots\ ,$$

где F – возмущение, ε – малый параметр. Тогда функция Ψ в (1) представляется разложением $\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\varepsilon) = \varepsilon\Psi_1(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) + \varepsilon^2\Psi_2(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) + \ldots$, коэффициенты которого и коэффициенты нормальной формы находятся на каждой i-той итерации ($i = 1, 2, \ldots$) из одной квадратуры

$$\int_{t_0}^{t} R_i(t)dt = (t-t_0)\bar{F}_i(t_0,\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) + \Psi_i(t_0,\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) - \Psi_i(t,\mathbf{x},\mathbf{y}), \tag{7}$$

где функции R_i вычисляются последовательно по формулам

$$R_1 = F_1, \quad R_2 = F_2 + \frac{1}{2}\{F_1 + \bar{F}_1, \Psi_1\},\ \ldots \tag{8}$$

и подстановкой в них решения невозмущенной системы. Если функция R_i после подстановки в нее решения невозмущенной системы окажется квазипериодической (суммой периодических по t функций), интеграл от R_i равен линейной функции и квазипериодической $f(t)$. Из $f(t)$ можно вычесть не зависящую от времени среднюю часть $\bar{f}(t)$ и отнести ее ко второму слагаемому правой части (7). Представление (7) тогда будет единственным образом определять $\bar{F}_i(t_0,\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ и функцию $\Psi_i(t_0,\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ с нулевым средневременным значением: $\overline{\Psi_i(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t))} = 0$. Условие квазипериодичности R_i накладывает ограничения на параметры, при которых существует нормальная форма.

4. Примеры асимптотических решений. Весьма поучительные примеры в [6, 7] демонстрируют существенные упрощения построения и анализа асимптотического решения перед всеми известными ранее методами. Данный метод по простоте эквивалентен методу [6, 7], но отличается тем, что цепочка уравнений для асимптотик записывается в исходной гамильтоновой системе независимо от того, автономная система или неавтономная. В методе [6, 7] неавтономную систему надо свести к автономной с повышением порядка системы и потом для нее писать цепочку уравнений для асимптотик.

Продемонстрируем предлагаемые методы на примерах.

Пример 1. *Найти решение уравнения* $\ddot{q} = \varepsilon^2 \cos t \cos q$ *с точностью до малых порядка* ε^6.

Это уравнение описывает разные задачи механики и физики. Близкое по характеру уравнение описывает вибрационное движение сферической частицы в жидкости, в которой создается плоская стоячая акустическая волна [17, 18]. Для качественного исследования этого уравнения обычным методом усреднения ([19]) требуется три приближения по парметру ε. Покажем, как получить решение предлагаемым методом. Разложение будем вести по параметру $\delta = \varepsilon^2$, поэтому для достижения существенно большей точности (порядка ε^6) потребуется всего два приближения с гораздо меньшими выкладками.

Решение. К уравнению примера сводится система уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона $H = \dfrac{1}{2}p^2 + \delta F_1(t,q,p), \quad F_1 = -\cos t \sin q$.

Находим решение невозмущенной системы $q = q_0 + p_0(t - t_0), \quad p = p_0$.

На первой итерации находим $R_1 = F_1$ и квадратуру $\displaystyle\int_{t_0}^{t} R_1 dt = -\frac{\cos(t_0 + q_0)}{2 + 2p_0} +$ $\displaystyle+\frac{\cos(-t_0 + q_0)}{2 - 2p_0} + f_1(t)$. Отсюда следует

$$\bar{F}_1 = 0, \quad \bar{\Psi}_1(t, q, p) = -\frac{\cos(t + q)}{2 + 2p} + \frac{\cos(-t + q)}{2 - 2p}. \tag{9}$$

На второй итерации $\displaystyle R_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial F_1}{\partial q}\frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial p} = \frac{1}{4}\cos t \cos q \left(\frac{\cos(t + q)}{(1 + p)^2} + \frac{\cos(t - q)}{(1 - p)^2}\right)$.

Из интеграла (7) находим линейную F_2 и не зависящую от времени Ψ_2 части. Окончательный вид нормальной формы и функции, определяющей параметрическую замену, таков

$$\bar{H} = \frac{1}{2}P^2 + \frac{\delta^2}{16}\left[\frac{1}{(1 + P)^2} + \frac{1}{(1 - P)^2}\right] + O(\delta^3),$$

$$\Psi(0, x, y) = \frac{\delta y}{1 - y^2}\cos x - \frac{\delta^2(1 - 3y^2 - 2y^4)}{16y(1 - y^2)^3}\sin 2x + O(\delta^3).$$

Система нормальной формы в переменных Q, P легко интегрируется. Чтобы получить решение в исходных переменных q, p в моменты времени, кратные периоду $t = 2k\pi$, $k = 0, 1, \ldots$, нужно выразить их через Q, P с помощью параметрической замены (1) и найденной функции Ψ. Следует, однако, заметить, что полученное асимптотическое решение не пригодно в окрестности неподвижной точки с нулевым импульсом. Оно применимо и приближает решение с высокой точностью при достаточно большом импульсе P там, где не применимо обычное асимптотическое решение, в окрестности неподвижной точки. Равномерное пригодное приближение можно получить с помощью инвариантной нормализации с другим порождающим гамильтонианом (см. [16]).

Пример 2. *Нелинейные колебания качающейся пружины.*

Постановка этой задачи дана, например, в книгах [20–22]. Уравнения записываются в виде уравнений Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u}, \qquad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}, \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Будем изучать движение вблизи положения покоя на больших временах t. Для этого разложим Гамильтониан вблизи положения равновесия

$$H_0 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \mu^2 x^2 + y^2), \qquad F_1 = \frac{1}{2}(\mu^2 - 1)xy^2, \qquad F_2 = \frac{1}{2}(\mu^2 - 1)(y^4/4 - x^2 y^2),$$

где μ – отношение частоты колебаний груза при неотклоненной пружине к частоте горизонтальных колебаний маятника. Рассмотрим случай резонанса $\mu = 2$. В предлагаемом методе нормальная форма находится так же, как и для нерезонансного случая, и совпадает с нормальной формой Густавсона. Однако здесь для главного приближения нужна всего одна квадратура.

Применяем описанный выше алгоритм. Вначале находим общее решение невозмущенной системы с гамильтонианом H_0

$$\begin{aligned} x(t) &= X\cos 2t + \frac{U}{2}\sin 2t, \qquad & y(t) &= Y\cos t + V\sin t, \\ u(t) &= U\cos 2t - 2X\sin 2t, \qquad & v(t) &= V\cos t - Y\sin t. \end{aligned} \tag{10}$$

В функцию $R_1 = F_1 = \dfrac{3}{2}x(t)y^2(t)$ подставляем решение невозмущенной системы. В результате получим квазипериодическую по времени функцию $R_1(t, X, Y, U, V)$ и из интеграла (7) найдем нормальную форму $\bar{F}_1$ и функцию Ψ_1 первого приближения (см. [23])

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= \frac{3}{8}\left(-V^2\,X + U\,V\,Y + X\,Y^2\right), \\ \Psi_1 &= \frac{3}{64}(4\,X\,Y\,V + 3\,U\,V^2 + 5\,Y^2\,U). \end{aligned} \tag{11}$$

Полученную систему с гамильтонианом $H_0 + \bar{F}_1$ можно проинтегрировать точно и полностью исследовать нелинейные колебания маятника [23].

Пример 3. *Найти периодическое решение и исследовать устойчивость колебаний сферического маятника с произвольной трехмерной периодической вибрацией точки подвеса.*

В системе координат, связанной с точкой подвеса, гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta} - l\cos\theta\,(mg - m\ddot{x}_3) + l\sin\theta\,((m\ddot{x}_1)\cos\varphi + (m\ddot{x}_2)\sin\varphi)\,,$$

где $x_i,\ i = 1, 2, 3$ – декартовы координаты точки подвеса, θ, ϕ – сферические координаты материальной точки, l – длина маятника.

Метод нормальной формы Биркгофа использовался в работе [24] для частного случая осесимметричных колебаний сферического маятника с вертикальной точкой подвеса. В этой же работе приведена подробная библиография по этой проблеме. Для определения устойчивых периодических решений в этом частном случае потребовалось найти нормальную форму Биркгофа четвертого порядка. Ниже приводится решение общей задачи определения периодических решений и их устойчивости в случае произвольной трехмерной вибрации подвеса маятника методом инвариантной нормализации [27]. Для получения результата той же точности требуется всего одна квадратура от простых тригонометрических функций.

Приведем гамильтониан к безразмерному виду $H(\theta, \varphi, u, v) = H_0 + \Phi$, где u и v – импульсы, соответствующие координатам θ и φ.

За невозмущенную часть гамильтониана H_0 принимаем энергию инерционных сил вибрации, а остальные слагаемые относим к возмущению:

$$\begin{gathered} H_0 = W_{t't'}, \quad \Phi = \varepsilon\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{v^2}{2\sin^2\theta} - \cos\theta\right), \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{g}{l\omega^2}}, \\ W = a_3\cos\theta + \sin\theta(a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi), \quad a_i(t') = \frac{\omega x_i}{\sqrt{gl}}, \quad t' = \omega t, \end{gathered} \tag{12}$$

где ω – частота колебаний точки подвеса, через $W_{t't'}$ обозначена вторая производная функции W по безразмерному времени t'.

Заметим, что форма невозмущенного гамильтониана может быть совершенно произвольна, и в данном случае возмущенная и невозмущенная части гамильтониана переставлены местами. Этот, необычный для классического метода Биркгофа, прием и позволяет существенно упростить вычисление нормальной формы и провести интегрирование. Первый шаг метода заключается в решении уравнений невозмущенной системы $\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{u} = -W_{t't'\theta}, \quad \dot{v} = -W_{t't'\varphi}$, где индексы t', θ и φ означают дифференцирование по этим переменным.

Решение невозмущенной системы имеет вид

$$\theta=\theta_0,\quad \varphi=\varphi_0,\quad u=u_0-W_{t'\theta},\quad v=v_0-W_{t'\varphi}.$$

Из квадратуры (7)

$$\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\left[(u-W_{t'\theta})^2+\frac{(v-W_{t'\varphi})^2}{\sin^2\theta_0}-2\cos\theta_0\right]dt= \tag{13}$$

$$=(t-t_0)\bar{\Phi}(t_0,\theta_0,\varphi_0,u_0,v_0)+\Psi(t_0,\theta_0,\varphi_0,u_0,v_0)+f(t)$$

находится нормальная форма

$$2\bar{\Phi}(t_0,\theta_0,\varphi_0,u_0,v_0)=\varepsilon\left(u_0^2+\frac{v_0^2}{\sin^2\theta_0}+2U(\theta_0,\varphi_0)\right),$$

$$2U(\theta_0,\varphi_0)=<W_{t'\theta}^2>+\frac{<W_{t'\varphi}^2>}{\sin^2\theta_0}-2\cos\theta_0,\qquad <f>=\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt. \tag{14}$$

Выражение $U(\theta_0,\varphi_0)$ совпадает с найденным в работах [1] и [15] методом отображений Пуанкаре в параметрической форме. Точка минимума θ_0,φ_0 функции $U(\theta_0,\varphi_0)$ соответствует устойчивому периодическому решению. Периодическое решение имеет вид

$$\theta=\theta_0-\Psi_u+O(\varepsilon^2),\quad \varphi=\varphi_0-\Psi_v+O(\varepsilon^2). \tag{15}$$

Из квадратуры (13) видно, что функция Ψ линейна по u и v. Коэффициенты линейной формы имеют вид

$$\Psi_u=\varepsilon W_\theta(t,\theta_0,\varphi_0),\quad \Psi_v=\frac{\varepsilon}{\sin^2\theta}W_\varphi(t,\theta_0,\varphi_0). \tag{16}$$

Формулы (12), (15) и (16) определяют периодическую траекторию с точностью до малых ε^2. С учетом соотношения $\varepsilon a_i=x_i/l$ уравнение траектории можно записать в размерных переменных

$$\begin{aligned}\theta&=\theta_0-\frac{1}{l}\left[-x_3(t)\sin\theta_0+(x_1(t)\cos\varphi_0+x_2(t)\sin\varphi_0)\cos\theta_0\right],\\ \varphi&=\varphi_0-\frac{1}{l\sin\theta_0}(-x_1(t)\sin\varphi_0+x_2(t)\cos\varphi_0).\end{aligned} \tag{17}$$

Приведенные результаты согласуются со всеми известными частными случаями, а также с общим результатом, полученным методом усреднения [25, 26].

Автор благодарит А.Д. Брюно за полезное обсуждение результатов работы и замечания.

1. *Петров А. Г.* Параметрический метод построения отображений Пуанкаре в гидродинамических системах // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып. 6. – С. 948-967.
2. *Петров А.Г.* Асимптотические методы решения уравнений Гамильтона с помощью параметризации канонических преобразований // Диф. уравнения. – 2004. – **40**, № 5. – С. 626-638.
3. *Пуанкаре Анри.* Избранные труды: В 3-х т. – М.: Наука, 1972. – Том II. – 999 с.

4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 408 с.
5. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. : Наука, 1978. – 304 с.
6. *Журавлев В. Ф.* Основы теоретической механики. – М.: Наука, 1997. – 320 с.
7. *Журавлев В. Ф.* Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып. 3. – С. 356–365.
8. *Биркгоф Д. Д.* Динамические системы. – М.; Л.: Гостехиздат, 1941. – 320 с.
9. *Gustavson F.G.* On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near of equilibrium point // Aston. J. – 1966. – **71**. – P. 670-686.
10. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. Ограниченная задача трех тел. – Киев: Наук. думка, 1979. – 174 с. (гл. 2, §7, п. 7.4).
11. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. Моск. математического об-ва. – 1972. – **26**. – С. 199-238.
12. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел. – М.: Наука, 1990. – 296 с.
13. *Брюно А. Д.* Система, подобная нормальной форме // Мат. заметки. – 1990. – **48**, вып. 3. – С. 20-30.
14. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Динамические системы / ВИНИТИ. – 1985. – **3**. – 304 с.
15. *Петров А.Г.* Модификация метода инвариантной нормализации гамильтонианов с помощью параметризации канонических преобразований // Докл. РАН. – 2002. – **386**, № 4. – С. 482-486.
16. *Петров А.Г.* Об инвариантной нормализации неавтономных гамильтоновых систем // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, вып. 6. – С. 402-413.
17. *Ганиев Р. Ф., Украинский Л. Е.* Динамика частиц при воздействии вибраций. – Киев: Наук. думка, 1975. – 168 с.
18. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987. – Т.1. – 464 с.
19. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
20. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с. (Nayfeh A.H. Perturbation Methods. – New York: J. Wiley, 1973).
21. *Старжинский В.М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1977. – 256 с.
22. *Богаевский В.Н., Повзнер А.Я.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. – М.: Наука, 1987. – 255 с.
23. *Зарипов М.Н., Петров А.Г.* Нелинейные колебания качающейся пружины // Докл. РАН. – 2004. – **399**, № 3. – С. 347-352.
24. *Маркеев А.П.* О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 2. – С. 213-219.
25. *Петров А.Г.* Об усреднении гамильтоновых систем с периодическим по времени гамильтонианом // Докл. РАН. – 1999. – **368**, № 4. – С. 483-488.
26. *Петров А.Г.* Об усреднении гамильтоновых систем // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 3. – С. 19-32.
27. *Петров А.Г.* Об уравнениях движения сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса // Докл. РАН. – 2005. – **405**, № 1. – С. 51-55.

Ин-т проблем механики РАН, Москва
petrov@ipmnet.ru

Получено 16.10.05