УДК УДК 531/532

©2005. **Н.Н. Кизилова**

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛЕЙ РАСТУЩИХ СПЛОШНЫХ СРЕД

Исследуется модель растущей сплошной среды, реология которой описывается моделью Максвелла вязкоупругой среды с дополнительными источниковыми слагаемыми, которые соответствуют собственным скоростям роста среды. Из условия положительной определенности потенциальной энергии растущего тела и анализа оператора задачи получены ограничения на реологические коэффициенты модели. Проведен подробный анализ полученных ограничений для случая изотропной среды. На основе численных оценок ряда параметров модели, полученных в экспериментах на растительных биоматериалах, показано, что условие устойчивости роста сводится к ограничению на коэффициент, равный отношению значения недиагональной компоненты тензора ростовых вязкостей к значению диагональной компоненты.

Введение. К растущим материалам относят среды, в которых с течением времени происходит увеличение или уменьшение массы, объема, плотности и пористости в ходе химических, электрохимических и физических реакций и процессов. Путем выращивания в искусственных условиях можно получать композитные материалы с различными вязкоупругими и прочностными характеристиками для использования их в технике, космических технологиях или медицине [1, 2]. Примером естественных растущих материалов являются биологические ткани, в которых происходит образование новых клеток или внеклеточного вещества за счет притока массы вместе с потоком крови в тканях животных или растительного сока в тканях растений. При этом в ходе биологической эволюции развились эффективные системы обратной связи, обеспечивающие рост тканей с оптимальными механическими свойствами (максимальная прочность при минимальном весе). Опосредующую роль в регуляции роста играют механические напряжения, что представляет огромный интерес для современных биотехнологий в связи с возможностью регуляции роста путем внешнего нагружения растущего биоматериала с целью выращивания материалов с заданными свойствами. Моделирование растущих биологических материалов основано на двухфазных моделях, в которых за счет массообмена между жидкой и твердой фазами происходит приращение массы твердой фазы [3–7]. Ненапряженный рост, в ходе которого механические напряжения отсутствуют, исследуется на основе моделей термоупругости [6]. Рост анизотропных биокомпозитов и рост тканей при механическом ограничении роста сопровождается возникновением напряжений [8–10]. При этом возникают задачи, связанные с устойчивостью растущих объектов и с оценкой реологических параметров моделей растущих сплошных сред [11].

1. Постановка задачи. Система уравнений для растущей среды представлена законами сохранения массы, импульсов и определяющими соотношениями в виде [3, 5, 9, 10]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) = -\theta, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,(\hat{\sigma}) + \rho\,\mathbf{f} = 0, \tag{2}$$

$$\hat{e} = \hat{A} + \hat{B}\hat{\sigma} + \frac{D}{Dt}\left(\hat{E}^{-1}\hat{\sigma}\right), \tag{3}$$

где ρ – плотность материала, $\mathbf{v}$ – вектор скорости, θ – скорость притока массы к твердой фазе из жидкой, $\hat{\sigma}$ и $\hat{e}$ – тензоры напряжений и скоростей деформаций, $\hat{A}$ – тензор собственных скоростей роста материала при отсутствии напряжений, $\hat{B}$ – тензор обратных (ростовых) вязкостей, $\hat{E}$ – тензор модулей упругости, $\mathbf{f}$ – плотность внешних объемных сил, D/Dt – тензорная производная по времени.

В силу симметрии тензоров $\hat{\sigma}$ и $\hat{e}$ матрица $\hat{A}$ является симметричной, а тензор B_{iklm} симметричен по первой и второй паре индексов и при замене первой пары на вторую. В биологических материалах компоненты $\hat{A}$ являются функциями времени [12].

Если материал несжимаемый, то задача (2), (3) отделяется, а приток массы θ может быть определен после решения основной задачи с соответствующими граничными условиями. При отсутствии объемных сил и внешних нагрузок тривиальное решение (2) соответствует ненапряженному росту, а из уравнений (3) может быть получено условие совместности деформаций для материала в виде ограничений на компоненты $\hat{A}$:

$$\frac{\partial^2 A_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 A_{jj}}{\partial x_i^2} = 2\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{4}$$

где $i, j = 1, 2, 3$. Из соотношений (4) следует, что компоненты $\hat{A}$ могут быть заданы на основе одной производящей скалярной функции Φ такой, что

$$A_{ii} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}, \quad A_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Самый простой случай $A_{ii} = A_{ii}(t)$, $A_{ij} = 0$, соответствующий росту растительных тканей [13], удовлетворяет условию (4). При задании граничных условий в напряжениях

$$\boldsymbol{\sigma}_n|_\Gamma = \boldsymbol{\sigma}^*, \tag{5}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности Γ, σ^* – поверхностная нагрузка, задача (2), (5) для определения напряжений отделяется. Деформированное состояние растущего тела определяется из (3) после решения задачи (2), (5). При задании граничных условий в скоростях (перемещениях)

$$\mathbf{v}|_\Gamma = \mathbf{v}_0 \tag{6}$$

из (2), (3) можно получить уравнение движения в перемещениях:

$$\operatorname{div}\left(\hat{e} - \hat{A}\right) + \rho\left(\hat{B} + \frac{D}{Dt}\left(\hat{E}^{-1}\right) + \hat{E}^{-1}\frac{D}{Dt}\right)\mathbf{f} = 0. \tag{7}$$

Решение задачи (6), (7) дает поле скоростей, а напряженное состояние определяется затем из соотношений, которые можно получить из (3) в операторной форме:

$$\hat{\sigma} = \left(\hat{B} + \frac{D}{Dt}\left(\hat{E}^{-1}\right) + \hat{E}^{-1}\frac{D}{Dt}\right)^{-1}\left(\hat{e} - \hat{A}\right).$$

При формулировке задачи в смешанной постановке с граничными условиями в виде

$$\boldsymbol{\sigma}_n|_{\Gamma_1} = \boldsymbol{\sigma}_0, \qquad \mathbf{v}|_{\Gamma_2} = \mathbf{v}_0, \tag{8}$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, напряженно-деформированное состояние растущего материала определяется путем решения системы (2), (3) с условиями (8).

Будем считать, что материал ортотропный, а упругие свойства не меняются со временем ($D\hat{E}/Dt = 0$) за счет образования нового материала с той же плотностью (пористостью). Тогда система (2), (3) в декартовой системе координат примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\rho f_x,\\
&\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = -\rho f_y,\\
&\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho f_z,\\
&\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} - B_{11}\sigma_{xx} - B_{12}\sigma_{yy} - B_{13}\sigma_{zz} - \frac{1}{E_1}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} + \frac{\nu_{21}}{E_2}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} + \frac{\nu_{31}}{E_3}\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = A_{11},\\
&\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial t} - B_{21}\sigma_{xx} - B_{22}\sigma_{yy} - B_{23}\sigma_{zz} + \frac{\nu_{12}}{E_1}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} - \frac{1}{E_2}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} + \frac{\nu_{32}}{E_3}\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = A_{22},\\
&\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial t} - B_{31}\sigma_{xx} - B_{32}\sigma_{yy} - B_{33}\sigma_{zz} + \frac{\nu_{13}}{E_1}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} + \frac{\nu_{23}}{E_2}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} - \frac{1}{E_3}\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = A_{33},\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial t}\right) - B_{44}\sigma_{xy} - \frac{1}{G_1}\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = A_{23},\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial t}\right) - B_{55}\sigma_{xz} - \frac{1}{G_2}\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = A_{13},\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial t}\right) - B_{66}\sigma_{yz} - \frac{1}{G_3}\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = A_{12},
\end{aligned} \tag{9}$$

где E_i, ν_{jk}, G_i – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига в направлениях соответствующих осей, причем $\nu_{ik}/E_i = \nu_{ki}/E_k$ в силу симметрии упругих свойств, а компоненты A_{ik} удовлетворяют соотношениям (4). Естественно считать, что ростовые вязкости связаны с типом анизотропии материала, что определяет вид матрицы B_{ik}.

В соответствии с результатами наблюдений и экспериментов с растущими материалами сжимающие нагрузки угнетают, а растягивающие – стимулируют рост [3], поэтому $B_{ii} > 0$ при $i = 1, 2, 3$. Эксперименты с клеточными слоями показали, что существует порог механочувствительности клеток, который по данным, полученным для ряда клеток, составляет $\sigma^\circ \sim 0.03 - 0.05$ MPa [14].

2. Исследование ограничений на реологические параметры модели. Моделирование растущих биологических сред представляет собой один из новых разделов современной биомеханики, и результаты проведенных к настоящему времени экспериментов не позволяют судить о возможных диапазонах значений тензорных величин A_{ik}, B_{ik}, поэтому имеет смысл провести оценки их допустимых значений, исходя из термодинамических ограничений, условия сплошности среды и других наиболее общих положений механики. Постулат об устойчивости естественного напряженного состояния тела позволяет получить ограничения на реологические коэффициенты, исходя из условия положительной определенности потенциальной энергии тела [15]:

$$\sigma_{ik}\varepsilon_{ik} \geq k(\varepsilon_{ik})^2, \tag{10}$$

где по повторяющимся индексам ведется суммирование. Условие (10) для изотропного упругого тела позволяет получить известные ограничения на величины E, G, а для вязкоупругого тела - дополнительные ограничения на вязкие параметры [15].

Пренебрегая в (3) мгновенными упругими деформациями, разрешим реологические соотношения относительно напряжений

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx} = \frac{1}{B}\left((\varepsilon_{xx} - A_{11})\Delta_{11} - (\varepsilon_{yy} - A_{22})\Delta_{21} + (\varepsilon_{zz} - A_{33})\Delta_{31}\right),\\
&\sigma_{yy} = \frac{1}{B}\left(-(\varepsilon_{xx} - A_{11})\Delta_{12} + (\varepsilon_{yy} - A_{22})\Delta_{22} - (\varepsilon_{zz} - A_{33})\Delta_{32}\right),\\
&\sigma_{zz} = \frac{1}{B}\left((\varepsilon_{xx} - A_{11})\Delta_{13} - (\varepsilon_{yy} - A_{22})\Delta_{23} + (\varepsilon_{zz} - A_{33})\Delta_{33}\right),\\
&\sigma_{yz} = \frac{\varepsilon_{yz}}{B_{44}}, \quad \sigma_{xz} = \frac{\varepsilon_{yz}}{B_{55}}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\varepsilon_{yz}}{B_{66}},
\end{aligned} \tag{11}$$

где Δ_{ik} – определитель минора матрицы B_{ik}, который получается из нее путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца, а $B = det\,|B_{ik}|$.

Подставляя (11) в (10), преобразуем полученное выражение к виду квадратичной формы:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta_{11}}{B}\left[\varepsilon_{xx} - \frac{\Delta_{21}+\Delta_{12}}{2\Delta_{11}}\varepsilon_{yy} + \frac{\Delta_{31}+\Delta_{13}}{2\Delta_{11}}\varepsilon_{zz} + \frac{\kappa_x}{2\Delta_{11}}\right]^2 + \frac{\zeta_y}{B}\left[\varepsilon_{yy} + \frac{\zeta_{yz}}{2\zeta_y}\varepsilon_{zz} + \frac{\alpha_y}{2\zeta_y}\right]^2 +\\
&+\frac{\alpha_1}{B}\left[\varepsilon_{zz} + \frac{\alpha_2}{2\alpha_1}\right]^2 - \frac{1}{4B}\left[\frac{\kappa_x^2}{\Delta_{11}} + \frac{\alpha_y^2}{\zeta_y} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\right] + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{B_{44}} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{B_{55}} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{B_{66}},
\end{aligned} \tag{12}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\zeta_y = \Delta_{22} - \frac{(\Delta_{21}+\Delta_{12})^2}{4\Delta_{11}}, \quad \zeta_z = \Delta_{33} - \frac{(\Delta_{31}+\Delta_{13})^2}{4\Delta_{11}},\\
&\zeta_{yz} = \frac{(\Delta_{21}+\Delta_{12})(\Delta_{31}+\Delta_{13})}{4\Delta_{11}} - \Delta_{32} - \Delta_{23},\\
&\kappa_x = -A_{11}\Delta_{11} + A_{22}\Delta_{21} - A_{33}\Delta_{31},\\
&\kappa_y = A_{11}\Delta_{12} - A_{22}\Delta_{22} + A_{33}\Delta_{32},\\
&\kappa_z = -A_{11}\Delta_{13} + A_{22}\Delta_{23} - A_{33}\Delta_{33},\\
&\alpha_y = \kappa_y + \frac{\kappa_x}{2\Delta_{11}}(\Delta_{21}+\Delta_{12}), \quad \alpha_1 = \zeta_z - \frac{\zeta_{yz}^2}{4\zeta_y}, \quad \alpha_2 = \alpha_z - \frac{\alpha_y\zeta_{yz}}{2\zeta_y}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Условие положительной определенности для (12) с учетом (13) сводится к следующим ограничениям на коэффициенты A_{ik}, B_{ik}:

$$\frac{\Delta_{11}}{B} \geq 0, \quad \frac{\zeta_y}{B} \geq 0, \quad \frac{\zeta_z}{B} - \frac{\zeta_{yz}^2}{4B\zeta_y} \geq 0, \frac{1}{B}\left(\frac{\kappa_x^2}{\Delta_{11}} + \frac{\alpha_y^2}{\zeta_y} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\right) \leq 0, \quad B_{44}, B_{55}, B_{66} > 0. \tag{14}$$

С учетом первых двух условий (14) последнее из них может выполняться лишь при отрицательных значениях α_1. Соотношения (14) могут быть непосредственно проверены путем подстановки значений реологических параметров растущего материала, полученных в ходе экспериментов и наблюдений за ростом. Поскольку определение величин B_{ik}

требует проведения экспериментов с ростом материала под действием заданной нагрузки, то не все значения коэффициентов B_{ik} могут быть оценены одновременно в ходе одного эксперимента. Например, рост образца под действием растягивающей нагрузки, приложенной к его периметру (торцу) в направлении j-й оси координат, позволит оценить значения B_{1j}, B_{2j}, B_{3j}. Проведение последовательной серии экспериментов по действию на рост нагрузки, действующей в направлениях трех осей координат, даст последовательные оценки величин B_{ij}, $i,j = 1,2,3$. Для определения коэффициентов B_{kk}, $k = 4,5,6$, можно провести серию экспериментов по действию на рост момента сил, направленного вдоль соответствующей оси координат. При этом теоретические модели могут быть разработаны для простых форм однородного изотропного растущего тела, которое можно аппроксимировать брусом или цилиндром (трубчатые кости, стволы и ветви деревьев, корни растений). Аналогичные обратные задачи, поставленные для плоских образований, которые моделируются пластинами и оболочками (плоские кости, слои хряща или кожи, листья растений), позволяют идентифицировать только некоторые из коэффициентов B_{ij} [5, 9, 16–18]. В связи с этим условия (14) представляются весьма полезными для получения оценок допустимых значений реологических параметров при условии, что часть из них известна из экспериментов.

3. Исследование оператора основной задачи. Исследуем свойства оператора системы (9). Получим характеристическое уравнение системы, произведя подстановку

$$\Psi = \psi^* e^{\gamma t - i(s_1 x + s_2 y + s_3 z)}, \tag{15}$$

где $\Psi = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}, u_x, u_y, u_z\}$ – вектор неизвестных задачи. Подобная подстановка позволяет установить условия, которым подчиняются операторы вязкоупругости [15], и соответствует исследованию устойчивости стационарного решения Ψ_0 системы (9). При отсутствии внешних объемных и поверхностных сил и источников сдвиговых деформаций $A_{ij} = 0$ решение Ψ_0 отвечает случаю ненапряженного роста:

$$\Psi_0 = \left\{0,0,0,0,0,0, \int A_{11} dx, \int A_{22} dy, \int A_{33} dz\right\},$$

где величины A_{ii} должны удовлетворять условиям совместности ростовых деформаций (4).

После подстановки (15) в (9) получим однородную алгебраическую систему для определения величин ψ^*. Матрица этой системы имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & s_3 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & s_3 & 0 & s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & s_2 & s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & i\gamma s_1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & i\gamma s_2 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\gamma s_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 & 0 & i\gamma s_3 & i\gamma s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & 0 & i\gamma s_3 & 0 & i\gamma s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} & i\gamma s_2 & i\gamma s_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $b_{ii} = B_{ii} + \dfrac{\gamma}{E_i}$ для $i = 1,2,3$, $b_{ii} = B_{ii} + \dfrac{2\gamma}{G_i}$ для $i = 4,5,6$, $b_{ij} = B_{ij} - \dfrac{\gamma \nu_{ji}}{E_i}$ для $i,j = 1,2,3, i \neq j$.

Приравнивая нулю детерминант матрицы M, получим характеристическое уравнение в форме:

$$\gamma^3 \left(\beta_1\gamma^3 + \beta_2\gamma^2 + \beta_3\gamma + \beta_4\right) = 0, \tag{16}$$

где $\beta_m = \beta_m\left(s_1, s_2, s_3\right)$. Выражения для β_{1-3} в общем виде здесь не приводятся ввиду их крайней громоздкости, а $\beta_4 = -2det\left|B_{ik}\right|$. Если матрица B_{ik} вырожденная, то корни получающегося при этом из (16) квадратного уравнения могут быть легко исследованы численно при задании значений соответствующих упругих и ростовых параметров модели. Детально изученные к настоящему времени случаи роста растительных тканей [9, 16, 17] отвечают условию $det\left|B_{ik}\right| > 0$. Исследование корней уравнения (16) позволит получить условия устойчивости роста для задачи (2), (3).

В случае плоской задачи (2), (3) уравнение (16) принимает более простой вид:

$$\gamma^2\left(\gamma - \gamma^*\right) = 0, \tag{17}$$

где

$$\gamma^* = -\frac{B_{22}s_1^4 + B_{11}s_2^4 + \left(2B_{44} + B_{12} + B_{21}\right)s_1^2s_2^2}{\dfrac{s_1^4}{E_2} + \dfrac{s_2^4}{E_1} + 2\left(\dfrac{1}{G_{12}} - \dfrac{\nu_{12}}{E_1}\right)s_1^2s_2^2}. \tag{18}$$

При этом оценки устойчивости роста ($\gamma \le 0$) могут быть легко получены из (18) в аналитической форме:

$$2B_{44} + B_{12} + B_{21} \ge 0, \quad G_{12} \le E_1/\nu_{12}, \tag{19}$$

причем последнее условие (19) выполняется в силу известной связи между коэффициентами G, E, ν для упругого материала.

В ряде случаев для медленно растущих биоматериалов или на поздних стадиях роста характерные времена ростовых деформаций T^g, относящиеся к производным компонент вектора перемещения по времени и времена релаксации упругих деформаций T^e, относящиеся к производным по времени от компонент тензора напряжений, имеют разный порядок, в силу чего можно пренебрегать изменением напряжений за счет упругих деформаций. В таком приближении был ранее рассмотрен ряд задач о росте стебля, листа и корня растений [3, 4, 9, 17]. При этом вид уравнения (16) существенно упрощается, и условие невырожденности матрицы задачи сводится к соотношению $det\left|B_{ik}\right| \ne 0$.

Дальнейшее исследование свойств оператора задачи (2), (3) может быть проведено с учетом числовых значений параметров для растущих материалов. Поскольку идентификация реологических коэффициентов A_{ik}, B_{ik} проводилась для растительных материалов, исследуем условия (14), (16), (17) для однородных изотропных материалов, используя оценки ряда параметров, полученные в [5, 13, 17, 18] для растущего растительного материала.

4. Численные оценки для однородного изотропного материала. Рассмотрим случай изотропного растущего тела, причем для компонент B_{ik} введем следующие обозначения:

$B_{ii} = b$ для $i = 1, 2, 3$; $\quad B_{ij} = \lambda b$ для $i, j = 1, 2, 3,\ i \ne j$; $\quad B_{ii} = \tau b$ для $i = 4, 5, 6$.

Подставляя эти значения в (13), получим условия (14) в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{1+\lambda}{B(1-\lambda)(1+2\lambda)} \geq 0, \quad \frac{1}{B(1-\lambda^2)} \geq 0, \quad \frac{1+3\lambda}{B(1-\lambda)(1+2\lambda)^2} \geq 0, \\ &\frac{a^2(3+\lambda)}{B(1-\lambda)(1+2\lambda)} \geq 0, \end{aligned} \tag{20}$$

где $a = A_{jj}$, а $A_{ij} = 0, i \neq j$ в соответствии с [13, 16–18]. Условия (20) выполняются, если

$$-\frac{1}{3} < \lambda < 1. \tag{21}$$

Дополнительные оценки проведем, используя условия устойчивости. Для однородного изотропного тела коэффициенты β_{1-3} уравнения (16) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = EG^2(1-\nu^2)p_1 + (2E^2G + EG^2(1-2\nu-2\nu^2))p_2 + \\
&+2(2E^3 + G^3(1-3\nu^2-2\nu^3) + 3EG\nu(G(1+\nu)-2E))p_3, \\
&\beta_2 = (2E^2G^2b(1+\nu\lambda) + EG^2b\tau(1-\nu^2))p_1 + (2E^2Gb(E+ \\
&+G(1+\lambda-\nu+3\nu\lambda)) + b\tau(EG^3(1-2\nu)-3\nu^2) + 4E^2G^2)p_2 + \\
&(6EGb(G^2(1-\nu^2) + EG(1-\lambda) + 2G^2\nu\lambda(1+\nu) + \\
&+2E\lambda(E-G\nu)) + b\tau(6EG^3\nu(1+\nu) + 12E^2G(E-2\nu G)))p_3, \\
&\beta_3 = (E^3G^2b^2(1-\lambda^2) + 2E^2G^3b^2\tau(1+\lambda\nu))p_1 + (E^3G^2b^2(1+2\lambda-3\lambda^2) + \\
&+2b^2\tau^2E^2G^3 + 2E^2G^2b^2\tau(2E-G\nu+G\lambda+2G+3G\nu\lambda))p_2 + \\
&+6E^2G^2b^2(G(1-\lambda^2) + ((2\nu G-E)(1-\lambda)\lambda + 12b^2\tau^2E^2G^2(E-G\nu) + \\
&+6E^2G^2b^2\tau\lambda(4E-G+G\nu-2G\nu)p_3, \\
&\beta_4 = E^3G^3b^3(\tau(1-\lambda^2)p_1 + (2\tau^2+\tau(1+2\lambda-2\lambda^2))p_2 + (2(1-3\lambda^2+2\lambda^3) + \\
&+12\tau^2\lambda + 6\tau\lambda(\lambda-1))p_3),
\end{aligned} \tag{22}$$

где использованы следующие обозначения:
$p_1 = s_1^6 + s_2^6 + s_3^6$,
$p_2 = s_1^4s_2^2 + s_1^2s_2^4 + s_1^4s_3^2 + s_1^2s_3^4 + s_2^4s_3^2 + s_2^2s_3^4$,
$p_3 = s_1^2s_2^2s_3^2$.

Первое условие (19) для изотропного материала дает ограничение $\lambda \geq -1$, которое справедливо для биологических материалов, поскольку в противном случае при действии, к примеру, сжимающей нагрузки вдоль оси j, происходило бы торможение роста в направлении j, сопровождающееся быстрой резорбцией (растворением) материала в направлениях i, k. В природе чаще наблюдается обратное явление - компенсаторный рост в направлениях i, k при наличии ограничения роста в направлении оси j [19].

Таким образом, соотношение (21) является условием устойчивости роста для однородного изотропного материала. Оценки знака корней уравнения (16) проведем численными методами, подставляя в (22) характерные значения параметров, полученные для растительных материалов [5, 13, 17, 18]: $A = (1-5)\cdot 10^{-6}c^{-1}$, $E = 10^7 - 2\cdot 10^9$Па, $\nu = 0 - 0.4$, $b = 10^{-6} - 10^{-5}$ (Па·с)$^{-1}$. Результаты исследования зависимости $\gamma(p_1, p_2, p_3)$ при вариации значений параметров в указанных диапазонах показали, что при $\tau > 0$ и для значений λ из диапазона (21) имеет место устойчивый рост ($\gamma < 0$).

Дальнейшее исследование задачи для неоднородных изотропных и анизотропных тел может быть проведено после получения более детальных экспериментальных оценок реологических параметров модели (3) для различных растущих биологических материалов, что составит предмет дальнейших исследований.

Автор выражает глубокую признательность В.И. Гуляеву и А.А. Илюхину за полезные и стимулирующие обсуждения темы.

1. *Арутюнян Н.Х.* Механика растущих вязкоупругопластических тел. – М.:Наука, 1987. – 471с.
2. *Арутюнян Н.Х.* Контактные задачи механики растущих тел. – М.:Наука, 1991. – 422с.
3. Современные проблемы биомеханики. Т.10. Механика роста и морфогенеза. – М., 2000. – 412с.
4. *Кантор Б.Я., Кизилова Н.Н.* Механика растущего биологического континуума //Доп. НАН України. – 2003. – № 2. – С.56–60.
5. *Kizilova N.N., Egorova E.S.* Modelling of laminated growing biological materials //J.Mech.Eng. – 2005. – N5(56). – P.258-273.
6. *Volokh K.Y.* Mathematical framework for modeling tissue growth. //Biorheology. – 2004. – **41**, № 3-4. – P.263–269.
7. *Klisch S.M.* A theory of volumetric growth for compressible elastic biological materials. //Math.Mech.Solids. – 2001. – **6**, № 6. – P.551–576.
8. *Menzel A.* Modelling of anisotropic growth in biological tissues. A new approach and computational aspects. //Biomechan. Model. Mechanobiol. – 2005. **3**. – P.147–171.
9. *Кантор Б.Я., Кизилова Н.Н.* Деформации круглой пластины из растущего биоматериала при ограничении роста //Теоретич. и приклад. механика. - 2003. – Вып. 37. – С.130–135.
10. *Кизилова Н.Н., Кравченко Е.П.* Исследование напряжений и деформаций в двумерных растущих континуумах //Механика твердого тела. – 2003. – Вып.33. – С.158–168.
11. *Kizilova N.N.* Stability problems in mechanics of growing biological continuous media. // 9-th Intern.conf. “Stability, control and rigid bodies dynamics”. Donetsk. – 2005. – P.120–121.
12. *Светлов П.Г.* Физиология (механика) развития. В 2-х т. – Л., 1979.
13. *Kizilova N.N.* Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics // Lecture Notes in Computer Sci. — 2004. – **3044**. — P.476–485.
14. *Cosgrove D.J.* Wall relaxation and the driving forces for cell expansive growth //Plant Physiol. – 1987. – **84**. – P.561–564.
15. *Ворович И.И.* О некоторых свойствах операторов вязкоупругости. //Избранные проблемы прикладной механики: Сборник работ, посвящ. 6О-летию акад. Челомея В.В. – М., 1974. – С.225–244.
16. *Kizilova N.N.* Analysis of stress distribution and leaf blade bending during bounded growth //Summer Bioengineering Conference, Royal Sonesta Resort, Key Biscayne, FL. – 2003.
17. *Кантор Б.Я., Кизилова Н.Н.* Исследование плоского напряженно-деформированного состояния растущих биологических материалов при ограничении роста // Вестн. ХНУ. Сер."Математика, прикл. математика и механика". – 2003. – **582**, № 52. – С.107-120.
18. *Kizilova N.N.* Identification of rheological parameters in models of growing continuums // EUROMECH Colloquium «Identification and Updating Methods of Mechanical Structures». – Book of Abstracts. – Prague, 2002. – P.22.
19. Plant growth : interactions with nutrition and environment/ J.R. Porter and D.W. Lawlor (eds.). – Cambridge : Cambridge University Press, 1991. – 284 P.

Харьковский национальный ун-т
`nnk_@bk.ru`

Получено 15.11.05