ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2005. Вып. 35

УДК 531.38, 531.39

©2005. **А.А. Илюхин, С.А. Колесников**

БИФУРКАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-КИРХГОФА В СЛУЧАЕ СИММЕТРИИ

Рассмотрено решение дифференциальных уравнений, одинаково описывающих поведение двух различных механических систем: движение тяжелого гиростата около неподвижной точки и нелинейный изгиб и кручение упругого стержня. Считается, что в механических системах присутствует симметрия в значениях физических параметров (гиростат динамически симметричный, либо стержень имеет равные жесткости при изгибе). Для инвариантных соотношений, полученных А.И. Докшевичем, найдены условия, когда от стационарных решений ответвляются нетривиальные решения. Для нелинейного граничного функционала, соответствующего решению А.И. Докшевича, показана также неединственность существования стационарных решений, что свидетельсвует о неустойчивости равномерных вращений симметричного гиростата и поджатых положений равновесия винтовой пружины.

В настоящей статье в основу исследования положены основные дифференциальные уравнения и соотношения, которые в силу аналогии Кирхгофа описывают поведение двух различных механических систем: движение тяжелого гиростата в поле сил тяжести [1] и равновесие тонкого упругого стержня, деформированного концевыми нагрузками [2 – 4].

Многие точные решения, найденные в динамике гиростата, имеют аналогию в теории тонких упругих стержней [1, 2]. Одним из таких решений, как показано в статье [5], является исследуемое в данной работе решение А.И. Докшевича [6]. Применительно к задаче о деформации криволинейных стержней, это решение можно считать решением задачи об изгибе и кручении винтовой пружины с равными главными жесткостями при изгибе. Материал, из которого она изготовлена, может быть как изотропным, так и анизотропным.

В работе П.В. Харламова [7] по построению конуса осей равномерных вращений гиростата указаны условия существования равномерных вращений. Этим условиям в статике пружин в нагруженном состоянии соответствует винтовая линия. Изучению устойчивости и бифуркации стационарных решений посвящены работы [8, 9]. В данной статье получены условия существования решения [6] в стационарном случае в виде ограничений на физические параметры и начальные условия и показано отсутствие бифуркации равномерных вращений гиростата. В механике криволинейных стержней найдена точка бифуркации винтовых форм равновесия.

1. Уравнения Эйлера–Кирхгофа. Запишем уравнения движения тяжелого гиростата в векторном виде

$$(\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})^* = (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\omega} + P(\mathbf{e}\times\boldsymbol{\gamma}), \qquad \boldsymbol{\gamma}^* = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ – угловая скорость тела-носителя; $\mathbf{x}(x_1,x_2,x_3)$ – кинетический момент гиростата; $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор силы тяжести; $\mathbf{e}$ – единичный вектор, идущий из неподвижной точки O в центр тяжести гиростата; $\boldsymbol{\lambda}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ – гиростатический момент; P – произведение веса гиростата и расстояния от неподвижной точки до его центра тяжести. Звездочка означает дифференцирование по времени в осях, связанных с телом-носителем гиростата. Величины x_i линейно зависят от компонент вектора угловой скорости:

$$x_i = A_{i1}\omega_1 + A_{i2}\omega_2 + A_{i3}\omega_3, \tag{2}$$

где A – тензор инерции гиростата в неподвижной точке.

Г. Кирхгофом [4] было установлено, что уравнения движения тяжелого гиростата в случае, когда центр масс лежит на одной из главных осей эллипсоида инерции для неподвижной точки, по форме совпадают с уравнениями равновесия изотропного упругого стержня, деформированного концевыми нагрузками. Этот факт носит название кинетической аналогии Кирхгофа.

В работе [10] показано, что компоненты вектора момента $\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}$ при определенных предположениях – линейные и однородные функции компонент вектора $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0$, и выполняются соотношения (2), а смысл вектора $\boldsymbol{\lambda}$ следует из его представления в виде $\boldsymbol{\lambda} = -A\boldsymbol{\omega}_0$, где A – матрица жесткостей стержня, а $\boldsymbol{\omega}_0$ – вектор Дарбу оси в ненагруженном состоянии. В случае, когда поперечное сечение нагруженного стержня является плоскостью упругой симметрии материала, из которого стержень изготовлен, матрица A – диагональна. В общем случае анизотропного стержня матрица A полностью заполнена. Система дифференциальных уравнений (1) при выполнении соотношений (2) допускает три интеграла

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1, \qquad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = K, \qquad \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2P(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 2H. \tag{3}$$

Аналогия Кирхгофа между двумя задачами неполная, так как в задаче о движении гиростата на элементы матрицы A есть ограничения в виде неравенств $A_{11} + A_{33} > A_{22}$, $A_{22} + A_{33} > A_{11}$, $A_{11} + A_{22} > A_{33}$. В теории упругих стержней жесткости стержня также удовлетворяют некоторому ограничению в виде неравенств. Для анизотропных стержней такое неравенство было получено в [10]. В частном случае, когда поперечное сечение стержня является плоскостью упругой симметрии, это неравенство имеет вид

$$A_{11} \le \frac{2\mu}{1+\nu} \frac{A_{22}A_{33}}{A_{22}\mu + A_{33}}, \tag{4}$$

где μ и ν – безразмерные постоянные: $\mu = \dfrac{G_{12}}{G_{13}}$, $1 + \nu = \dfrac{2E_1}{G_{12}}$, а E_1, G_{12}, G_{13} – модуль Юнга и модули сдвига, входящие в обобщенный закон Гука. Если положить в неравенстве (4) $\mu = 1$, то получим неравенство для изотропных стержней, которое установил Е.Л. Николаи.

2. Решение А.И. Докшевича. В работе [6] получено частное решение уравнений (1) в предположении, что $e_1 = 1$, $e_2 = 0$, $e_3 = 0$, $A_{22} = A_{33}$, $A_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $\lambda_3 = 0$. Введем безразмерные величины

$$x_1 = \lambda_2 x, \quad x_2 = \lambda_2 y, \quad x_3 = \lambda_2 z, \quad \tau = \frac{\lambda_2 t}{A_{22}}, \quad g = \frac{A_{22}}{A_{11}},$$

$$p = \frac{A_{22}P}{\lambda_2^2}, \quad k = \frac{pK}{\lambda_2}, \quad 2h = \frac{2A_{22}H}{\lambda_2^2}, \quad \lambda_1 = r\lambda_2.$$

Наложим на постоянные интегралов ограничения:

$$p^2 = \left[(b - 2a(a+1))^2 + a^2(1-a)^2 n^4 + \big(2a(1-a)b + a^3(a+1)(a^2 - 3a + 4)\big)n^2\right] / (1 - a^2)^4,$$

$$k = a(a-2)n\big[-b + a(a-1)n^2 - (a+1)(a^2+1)\big]\big/(1-a^2)^3, \tag{5}$$
$$2h = \big[2(a^2+a-1)b + a^2(1-a)(a+3)n^2 + 4a(a+1)\big]\big/(1-a^2)^2,$$

где $$a = \big(1 \mp \sqrt{g^2-g+1}\big)\big/(1-g), \quad n = r(1-a^2)\big/(a^2-a+1).$$

Тогда система дифференциальных уравнений (1) допускает решение, в котором основные безразмерные переменные связаны равенствами:

$$\begin{gathered} y = (ax^2 - anx + b)/(1-a^2), \\ z^2 = [-a^2x^4 + 2a^3nx^3 - a\big(a(a+1)(a-3) + a^3n^2 + 2b\big)x^2 + 2a^2n(b-a-1)x - b^2 + \\ +2a(a+1)b + a^2(1-a^2)n^2]/(1-a^2)^2, \\ p\gamma_1 = [-a(a+1)x^2 + a^2(a+1)nx - b + a^2(1-a)n^2 + 2a(a+1)]/(1-a^2)^2, \\ p\gamma_2 = [ax^3 + a(1-2a)nx^2 + (b + a^2(a-1)n - 2a(a+1))x + (a^2(a+1) + (1-a)b)n]/(1-a^2)^2, \\ p\gamma_3 = [x + (1-a)n]z/(1-a^2). \end{gathered} \tag{6}$$

В решении (6) переменная x выступает в качестве независимой. Зависимость ее от времени t устанавливается обращением эллиптического интеграла $t - t_0 = \dfrac{A_{22}}{\lambda_2}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{dx}{z}$, получаемого интегрированием первого уравнения системы (1). В динамике гиростата решение (6) описывает движение симметричного гиростата, у которого центр масс лежит на первой главной оси, а вектор гиростатического момента находится в главной плоскости. Это решение трехпараметрическое. Свободный параметр a связан с распределением масс. Параметр n указывает на возможные значения гиростатического момента. Третий безразмерный параметр b, как следует из (5), характеризует начальные значения исходных переменных.

В механике стержней решение (6) описывает равновесие стержня, у которого поперечное сечение совпадает с плоскостью упругой симметрии материала и главные жесткости при изгибе равны. В ненагруженном состоянии ось стержня расположена по винтовой линии и отсутствует поворот главных осей изгиба и кручения относительно естественного базиса. Соотношения (5) выделяют некоторый класс концевых усилий. Они накладывают ограничения на податливость стержня, и эти ограничения связаны с параметром a; дают значение кривизны и кручения оси стержня в исходной системе и связаны с параметром n; через параметр b вычисляются значения концевой силы P и момента K.

В задаче движения гиростата из неравенства $A_{22} + A_{33} > A_{11}$ следует $g > 0,5$. Производная по g от четвертого равенства в (5) имеет вид

$$\frac{da}{dg} = \frac{2(g^2-g+1)^{\frac{1}{2}} \mp (g+1)}{2(g-1)^2(g^2-g+1)^{\frac{1}{2}}}$$

и является положительной величиной при $g = 0,5$. Вычислим значения параметра a при $g = 0,5,\ g = 1$ и $g \to \infty$ и получим ограничения:

$$a < -1, \quad 2 - \sqrt{3} < a < 1, \quad a > 2 + \sqrt{3}. \tag{7}$$

Если предположить, что гиростат имеет полости, заполненные вращающейся жидкостью, то $g > 0$, и параметр a изменяется в пределах:

$$a < -1, \quad 0 < a < 1, \quad a > 2. \tag{8}$$

В механике стержней область изменения параметра a найдена в работе [5], она совпадает с (8). Область (7) является подобластью (8), значит по параметру a решение (6) обладает большей общностью в механике стержней, чем в задаче о движении систем твердых тел.

В дальнейшем в соотношениях (6) удобно перейти к новой независимой переменной $v = x - n$, а за свободные параметры выбрать величины $\tilde{n} = n(a-2)$, $\tilde{b} = b - a(a^2 - 1)n - 2a(a+1)$. Опустим знак волны и перепишем соотношения (6), используя новую переменную v и новые параметры:

$$\begin{gathered}
p^2 = \left[b^2 + a^2(a+1)^2 n^2\right]/(1-a^2)^4, \\
k = -an\left[b + (a+1)^3\right]/(1-a^2)^3, \\
2h = \left[\frac{2(a^2+a-1)b + a(a^2-1)n^2}{(a-2)} + 4a^2(a+1)^2\right] \Bigg/ (1-a^2)^2;
\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}
y = (av^2 - anv + b + 2a(a+1))/(1-a^2), \\
z^2 = [-a^2v^4 + 2a^2nv^3 + (-a^2n^2 - 2ab - a^2(a+1)^2)v^2 + 2an(b + a(a+1))v - \\
- b(b + 2a(a+1))]/(1-a^2)^2, \\
p\gamma_1 = [-a(a+1)v^2 + a(a+1)nv - b]/(1-a^2)^2, \\
p\gamma_2 = [av^3 + 2anv^2 + (b + an^2)v - n(b + a(a+1))]/(1-a^2)^2, \\
p\gamma_3 = (v-n)z/(1-a^2);
\end{gathered} \tag{10}$$

$$t - t_0 = \frac{A_{22}}{\lambda_2} \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{z}. \tag{11}$$

Для того чтобы соотношения (10), (11) определяли вещественные значения переменных, необходимо потребовать $z^2(v) \geq 0$. Пусть у многочлена четвертого порядка $z^2 = z^2(v)$ дискриминант G – положительная величина и выполняются два неравенства:

$$\begin{gathered}
G_1 = \frac{a^2}{12}\left(a^2n^2 - 4ab - 2a^2(a+1)^2\right) > 0, \\
G_2 = \frac{a^7(a+1)}{4}\left[4(a-1)b + 3a(1-a)n^2 + a(a+1)^3\right] > 0,
\end{gathered} \tag{12}$$

тогда уравнение $z^2 = 0$ имеет четыре различных корня: v_1, v_2, v_3, v_4. Область изменения независимой переменной v – двухсвязная и состоит из двух интервалов: $[v_1, v_2], [v_3, v_4]$.

Если при $G > 0$ хотя бы одно из неравенств (12) не выполняется, то все корни комплексно-сопряженные и действительных решений не существует.

Когда дискриминант G принимает отрицательные значения, уравнение $z^2(v) = 0$ имеет два различных действительных корня v_1, v_2, независимая переменная v принадлежит односвязному интервалу $[v_1, v_2]$. В случае равенства нулю дискриминанта G уравнение $z^2 = 0$ имеет кратный корень $v = c$. Детальный анализ области изменения переменной v, когда $G = 0$, будет дан в следующем пункте.

3. Ветвление стационарного решения. Стационарные решения системы дифференциальных уравнений (1) описывают в динамике гиростата равномерные вращения, в статике тонкого упругого стержня они определяют равновесные формы в виде винтовой линии. Если решение стационарное, то из первого уравнения системы (1) при $A_{22} = A_{33}$ следует равенство $\omega_3 = 0$.

Равномерные вращения возможны [11, 7] только вокруг вертикальной оси: $\omega_i = \omega\gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Из соотношения $\omega_3 = 0$ следует равенство $\gamma_3 = 0$.

Рассмотрим совместно первое и третье уравнения системы (1) и получим еще одно условие существования стационарного решения $\dfrac{d\omega_3^2}{d\omega_1} = 0$. На траекториях, определяемых соотношениями (10), (11), условия $\omega_3 = 0$, $\gamma_3 = 0$ выполняются, если уравнение $z^2(v) = 0$ имеет кратный корень $v = c$.

Для системы дифференциальных уравнений (1) при выполнении равенств (10), (11) соотношения

$$
\begin{gathered}
A_{11}\frac{d\omega_1}{dt} - \lambda_2\omega_3 = 0,\\
\omega_2 - f_1(A_{11}, A_{22}, \lambda_1, \lambda_2, P, \omega_1) = 0,\\
\omega_2^3 - f_2(A_{11}, A_{22}, \lambda_1, \lambda_2, P, \omega_1) = 0,\\
\gamma_1 - f_3(A_{11}, A_{22}, \lambda_1, \lambda_2, P, \omega_1) = 0,\\
\gamma_2 - f_4(A_{11}, A_{22}, \lambda_1, \lambda_2, P, \omega_1) = 0,\\
\gamma_3 - f_5(A_{11}, A_{22}, \lambda_1, \lambda_2, P, \omega_1)\omega_3 = 0
\end{gathered}
\tag{13}
$$

можно рассматривать как граничное условие при некотором $t = t_*$. Следуя работам [12 – 14], назовем (13) граничным функционалом, который обозначим следующим образом: $B(\mathbf{u}, \mathbf{d}, t) = 0$, где $\mathbf{d} = (A_{11}, A_{22}, \lambda_1, \lambda_2, P)$, $\mathbf{u} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Система (1) допускает стационарное решение $\mathbf{u}_0 = (\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30})$ при определенном значении $\mathbf{d}$. Запишем необходимое условие ветвления [13] стационарного решения $\mathbf{u}_0$ на функционале $\mathbf{B}$ в виде равенства нулю якобиана $B_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{d}_0, t) = 0$:

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial}{\partial\omega_1}\left(A_{11}\dfrac{d\omega_1}{dt} - \lambda_2\omega_3\right) & -\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega_1} & -\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega_1} & -\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega_1} & -\dfrac{\partial f_4}{\partial\omega_1} & -\left[f_5\dfrac{\partial\omega_3}{\partial\omega_1} + \omega_3\dfrac{\partial f_5}{\partial\omega_1}\right]\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\lambda_2 & 0 & 2\omega_3 & 0 & 0 & -f_5\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix} = 0
$$

и дополнительных условий

$$
\left[2\omega_3\frac{\partial}{\partial\omega_1}\left(A_{11}\frac{d\omega_1}{dt} - \lambda_2\omega_3\right) - \frac{\partial f_2}{\partial\omega_1}\right]\bigg|_{\omega_3=0} = 0, \qquad \frac{\partial\omega_3^2}{\partial\omega_1}\bigg|_{\omega_3=0} = 0. \tag{14}
$$

Если в качестве функционала $B(\mathbf{u}, \mathbf{d}, t)$ использовать соотношения (10), то условия (14) в безразмерных переменных записываются в виде

$$z^2(c) = 0, \qquad \left.\frac{dz^2(v)}{dv}\right|_{v=c} = 0. \tag{15}$$

Таким образом, необходимые условия ветвления стационарного решения в силу соотношений $\dfrac{d\omega_3^2}{d\omega_1} = 0$, $\omega_3 = 0$ совпадают с достаточными условиями существования таких решений. Эти условия будут достаточными для существования ответвляющихся нестационарных решений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{d}, t)$, если выполняются требования теоремы I, приведенной в работе [13] на стр. 20. В изучаемой постановке эти требования эквивалентны условию непрерывности нестационарного решения (6) в окрестности точки $v = c$.

4. Условия существования стационарных решений. Изучим условия существования решения (10) системы (1) вида

$$\omega_1 = \omega_{10}, \quad \omega_2 = \omega_{20}, \quad \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_{10}, \quad \gamma_2 = \gamma_{20}, \quad \gamma_3 = 0.$$

Из равенств (15) следует, что второе соотношение (10) можно представить в виде $z^2(v) = a^2(v-c)^2 z_2(v)/(1-a^2)^2$, где $z_2(v) = z_{20}v^2 + z_{21}v + z_{22}$.

Для определенности будем считать $c > 0$, как видно из дальнейшего анализа, это ограничение не уменьшает общности. Значение же $v = 0$ является корнем уравнения $z^2 = 0$, если $b = 0$ или $b + 2a(a+1) = 0$, и как следует из (10), не может быть кратным. Сравним коэффициенты при одинаковых степенях v правых частей второго равенства (10) и соотношения, полученного для $z^2(v)$. В результате найдено выражение для $z_2(v)$: $z_2(v) = n(a^2-1)/(2c-n) - (v-n+c)^2$ и два уравнения, связывающие свободные параметры a, b, n и дополнительный параметр c:

$$\begin{gathered} b = ac(n-c) - a(a+1)[(a+1)c - n]/(2c-n), \\ (n-2c)^2 = (a+1)(a-1)^2c^2/[a+1+(1-a)c^2]. \end{gathered} \tag{16}$$

Наличие действительных корней уравнения $z_2(v) = 0$ зависит от знака величины $D_{z_2} = n(a^2-1)/(2c-n)$. Если $D_{z_2} > 0$, то оба корня действительные и вычисляются по формуле $v_{1,2} = n - c \mp \sqrt{D_{z_2}}$.

Значение $v = c$ является внутренней точкой для интервала $[v_1, v_2]$, когда выражение $z_2(c) = n(a^2-1)/(2c-n) - (2c-n)^2$ неотрицательно. Дальнейший анализ условий существования стационарных решений сводится к исследованию знака правой части равенств для D_{z_2} и $z_2(v)$ при условии разрешимости уравнения (16) на области допустимых значений параметра a. В результате будем получать некоторые ограничения на параметры a, b, n, c и область изменения независимой переменной, что позволит устанавливать вид движения гиростата (или возможные формы равновесия стержня).

Пусть параметр n отличен от нуля, не нарушая общности, в дальнейших исследованиях считаем его положительным. Область (8) изменения параметра a включает в себя область (7). Приведем основные результаты анализа существования стационарных решений в задаче о равновесии стержней и затем перенесем эти результаты в задачу о движении гиростата.

Если параметр a изменяется на луче $a > 2$, то дискриминант отрицателен, при этом начальные значения переменной c должны удовлетворять неравенству $c^2 < \dfrac{a+1}{a-1}$, а параметр n должен изменяться в пределах $0 < n < 2c$. В этом случае единственное решение системы (1) – стационарное решение и имеет вид (10):

$$x_0 = \frac{c}{a-2}\left[a + (a-1)\left(\frac{a+1}{a+1+(1-a)c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$y_0 = \frac{a}{a-1}\left[1 + \left(\frac{a+1+(1-a)c^2}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\gamma_{10} = \frac{a(a+1)}{1-a}\left[\left(\frac{a+1}{a+1+(1-a)c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]\left[\left(\frac{a+1+(1-a)c^2}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}} + a\right]\times \tag{17}$$

$$\times\left[1 - a - a\left(\frac{a+1+(1-a)c^2}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\Big/ P_0,$$

$$\gamma_{20} = -a(a+1)c\left[\left(\frac{a+1+(1-a)c^2}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}} + a\right]\Big/ P_0,$$

$$z_0 = \gamma_{30} = 0,$$

где

$$P_0 = \left|a(a+1)\left[((a+1+(1-a)c^2)/(a+1))^{\frac{1}{2}} + a\right]\Big/(1-a)\right|\times$$

$$\times\sqrt{\left[\left(\frac{a+1}{a+1+(1-a)c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]^2\left[1 - a - a\left(\frac{a+1+(1-a)c^2}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + (a-1)^2c^2}\,.$$

На данном решении кручение стержня и его главные кривизны (3) принимают постоянные значения для всех значений дуговой координаты s. Поэтому ось деформированного стержня расположена по винтовой линии.

Пусть параметр a изменяется в интервале (2, 3). В зависимости от ограничений на начальные данные возможны следующие формы равновесия нагруженного стержня.

1. Если выполняются соотношения $c^2 < \dfrac{a+1}{\sqrt[3]{4(a-1)}} - \dfrac{a+1}{a-1}$, $\dfrac{2(a-1)c^3}{a+1} < n < 2c$, то уравнение $z_2(v) = 0$ имеет два действительных корня. Точка $v = c$ является внутренней для интервала $[v_1, v_2]$. Когда начальное значение $v = c$, то система (1) допускает единственное стационарное решение, которое имеет вид

$$x_0 = \frac{c}{a-2}\left[a + (1-a)\left(\frac{a+1}{a+1+(1-a)c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$y_0 = \frac{a}{1-a}\left[1 - \left(\frac{a+1+(1-a)c^2}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\gamma_{10} = \frac{a(a+1)}{1-a}\left[\left(\frac{a+1}{a+1+(1-a)c^2}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]\left[\left(\frac{a+1+(1-a)c^2}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}}-a\right]\times \tag{18}$$

$$\times\left[a\left(\frac{a+1+(1-a)c^2}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}}+1-a\right]\Big/P_0,$$

$$\gamma_{20} = a(a+1)c\left[\left(\frac{a+1+(1-a)c^2}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}}-a\right]\Big/P_0,$$

$$z_0 = \gamma_{30} = 0,$$

где

$$P_0 = \left|a(a+1)\left[\left(\left(a+1+(1-a)c^2\right)/(a+1)\right)^{\frac{1}{2}}-a\right]\Big/(1-a)\right|\times$$

$$\times\sqrt{\left[\left(\frac{a+1}{a+1+(1-a)c^2}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]^2\left[1-a+a\left(\frac{a+1+(1-a)c^2}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2+(a-1)^2c^2}\ .$$

Это решение определяет винтовую линию, по которой расположена ось нагруженного стержня.

Пусть начальное значение $v \neq c$, тогда независимая переменная v изменяется в одном из двух полуоткрытых интервалов $[v_1, c)$ или $(c, v_2]$.

При изменении переменной v на любом из этих интервалов решение (6) описывает асимптотические формы равновесия нагруженного стержня. Эти асимптотические формы равновесия ответвляются от винтовых и решение представляется с помощью элементарной функции

$$s = \frac{A_{22}}{\lambda_2}\left|\frac{a^2-1}{a}\right|\sqrt{\frac{2c-n}{n(a^2-1)-(2c-n)^3}}\times$$

$$\times\ln\left|\left[\frac{n(a^2-1)-(2c-n)^3}{(2c-n)(v-c)}+\sqrt{\frac{n(a^2-1)-(2c-n)^3}{2c-n}}\ \frac{\sqrt{\frac{n(a^2-1)}{2c-n}-(v-n+c)^2}}{v-c}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+n-2c\right]\Big/\sqrt{\frac{n(a^2-1)}{2c-n}}\right|,$$

(когда $v \to c \mp 0$, то дуговая координата s неограниченно возрастает).

2. Пусть выполняются соотношения:

$$c^2 = \frac{a+1}{\sqrt[3]{4(a-1)}} - \frac{a+1}{a-1}, \qquad n = \frac{2(a-1)c^3}{a+1}.$$

Тогда значение $v = c = v_2$ является трехкратным корнем уравнения $z^2 = 0$ и стационарное решение уравнений (1) имеет вид

$$\omega_{10} = A_{22}c\left[a+(1-a)\left(\frac{2}{a-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\Big/(\lambda_2(a-2)),\quad \omega_{20} = A_{22}a\left[1-\left(\frac{a-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\Big/(\lambda_2(1-a)),$$

$$\gamma_{10} = \frac{a(a+1)}{1-a}\left[\left(\frac{2}{a-1}\right)^{\frac{1}{3}}+1\right]\left[-a+\left(\frac{a-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\left[1-a+a\left(\frac{a-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\Big/P_0, \qquad (19)$$

$$\gamma_{20} = a(a+1)c\left[-a+\left(\frac{a-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\Big/P_0, \qquad \omega_{30}=0, \qquad \gamma_{30}=0,$$

где

$$P_0 = \left|a(a+1)\left[\left(\frac{a-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-a\right]\Big/(1-a)\right| \times \sqrt{\left[\left(\frac{2}{a-1}\right)^{\frac{1}{3}}+1\right]^2\left[1-a+a\left(\frac{a-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2+(a-1)^2c^2}.$$

Решение (19) описывает винтовую линию, по которой расположена деформированная ось стержня. Если начальное значение $v \neq c$, то независимая переменная v изменяется в интервале $[v_1, c)$. Решение (6) определяет асимптотические формы равновесия деформированной оси. При этом дуговая координата s является алгебраической функцией переменной v: $s = \dfrac{A_{22}(a^2-1)}{\lambda_2 a(2c-n)}\sqrt{\dfrac{2n-3c-v}{v-c}}$. Из последнего равенства найдем зависимость

$$v = \frac{(a^2-1)^2(2n-3c)/a^2 + c(2c-n)^2(\lambda_2 s/A_{22})^2}{(a^2-1)^2/a^2+(2c-n)^2(\lambda_2 s/A_{22})^2}. \qquad (20)$$

Из равенства (20) следует, что основные переменные явно выражаются через рациональные функции от s. Значит можно элементарно вычислить для каждой точки оси геометрические параметры стержня.

Дадим интерпретацию полученных выше результатов в задаче о движении гиростата, имеющего полости, заполненные вращающейся жидкостью. При выполнении условий п. 2 и равенства $v = c$ стационарное решение (19) определяет равномерные вращения гиростата вокруг вертикали. Направление вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в гиростате вычисляется с помощью второго и третьего равенств (19). Этот вектор лежит в главной плоскости $\gamma_3 = 0$.

Если начальное значение $v \neq c$, то соотношение (18) устанавливает связь зависимой переменной v от времени t при $t \in [0, \infty)$. Подставим (20) в (6) и получим решение уравнений (1) в виде соотношений:

$$\omega_1 = \frac{\lambda_2 \sum\limits_{k=0}^{1}\varphi_k(a)\tau^{2k}}{A_{11}\sum\limits_{k=0}^{1}\gamma_k(a)\tau^{2k}}, \qquad \omega_2 = \frac{\lambda_2 \sum\limits_{k=0}^{2}\psi_k(a)\tau^{2k}}{A_{22}\left(\sum\limits_{k=0}^{1}\gamma_k(a)\tau^{2k}\right)^2}, \qquad \omega_3 = \frac{\lambda_2\tau}{A_{22}\left(\sum\limits_{k=0}^{1}\gamma_k(a)\tau^{2k}\right)^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{\sum\limits_{k=0}^{2}\beta_k(a)\tau^{2k}}{\left(\sum\limits_{k=0}^{2}\gamma_k(a)\tau^{2k}\right)^2}, \qquad \gamma_2 = \frac{\sum\limits_{k=0}^{3}\delta_k(a)\tau^{2k}}{\left(\sum\limits_{k=0}^{1}\gamma_k(a)\tau^{2k}\right)^3}, \qquad \gamma_3 = \frac{\tau\sum\limits_{k=0}^{1}r_k(a)\tau^{2k}}{\left(\sum\limits_{k=0}^{1}\gamma_k(a)\tau^{2k}\right)^3}. \qquad (21)$$

Напомним, что $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\lambda_2} t/A_{22}$.

Решение (21) описывает асимптотические равномерные движения гиростата [1] и имеет в качестве предельной точки (при $t \to \infty$) соотношение (19). Решение интересно тем, что переменные Эйлера–Пуассона являются элементарными алгебраическими функциями времени. Такая ситуация встречается крайне редко в известных случаях интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона.

3. Если начальные данные удовлетворяют соотношениям

$$\frac{a+1}{a-1} - \frac{a+1}{\sqrt[3]{4(a-1)}} < c^2 < \frac{1}{4}(a+1)^2(3-a)/(a+1), \quad n < 2(a-1)c^3/(a+1),$$

то это значит, что $v = c$ является изолированным корнем уравнения $z^2(v) = 0$ и существует стационарное решение (18), которое описывает винтовую форму равновесия оси стержня. Когда начальное значение $v \neq c$, то переменная v изменяется на интервале $[v_1, v_2]$. Зависимость $v = v(c)$ после интегрирования (11) можно представить следующим образом:

$$v = c + \frac{n(a^2-1)/(2c-n) - (2c-n)^2}{(2c-n)\big(n\big((a^2-1)\big)/(2c-n)\big)^{\frac{1}{2}} \cos\Big(\dfrac{\lambda_2 a}{A_{22}(a^2-1)}\sqrt{(2c-n)^2 - \dfrac{n(a^2-1)}{2c-n}}s\Big)}, \quad (22)$$

где v – периодическая функция с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\dfrac{\lambda_2 a}{A_{22}(a^2-1)}\sqrt{(2c-n)^2 - \dfrac{n(a^2-1)}{2c-n}}}\,.$$

С помощью формулы (22) основные зависимости (10) выражаются в явном виде как функции переменной s. В этом случае решение (10) описывает формы равновесия, которые не являются асимптотическими. При этом в каждой точке оси стержня с помощью равенств (10) можно вычислить его геометрические параметры – кручение ω_1 и главные кривизны ω_2, ω_3.

Замечание. Если на начальные данные наложить ограничение в виде равенств $c = \mp\sqrt{(a+1)^2(3-a)/(4(a-1))}$, то из соотношения (16) следует, что $n = 0$. В этом случае ось недеформированного стержня расположена по дуге окружности $\lambda_1 = 0$. Уравнение $z^2(v) = 0$ имеет два действительных изолированных корня $v = \mp c$ второй кратности. Решение системы (1) существует, если начальные значения $v = \mp c$. Это решение будет стационарным и вычисляется по формулам (17) при $c = \mp\sqrt{(a+1)^2(3-a)/(4(a-1))}$. Оно определяет винтовую форму равновесия деформированного стержня.

4. Когда параметр a изменяется в интервале $(2, 3)$, а начальные значения параметра c удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{4}(a+1)^2(3-a)/(a+1) < c^2 < (a+1)(a-1), \quad (23)$$

уравнение $v = \mp c$ имеет два комплексно-сопряженных корня. В этом случае система (1) при допущениях (5) имеет только стационарное решение вида (17). Ось деформированного стержня имеет форму винтовой линии.

5. Если соотношение для жесткостей стержня удовлетворяет в безразмерном виде неравенству $a \geq 3$, а начальные данные лежат в пределах $c^2 < (a+1)/(a-1)$, $n > 2c$, то уравнение $z^2(v) = 0$ имеет единственный действительный кратный корень $v = c$. Ось

стержня до и после деформации представляет собой винтовую линию (решение (10), (11) может быть только стационарным и вычисляться по формулам (17)).

6. Пусть параметр a принадлежит интервалу (0, 1). В этом случае уравнение (16) имеет решение

$$n_{1,2} = c\left[2 \mp (1-a)\sqrt{\frac{a+1}{a+1+(1-a)c^2}}\ \right]. \tag{24}$$

При равенстве $n = n_1$ дискриминант D_{z_2} отрицателен. Поэтому область изменения независимой переменной v состоит из изолированной точки $v = c$. Нагруженный стержень расположен по винтовой линии, геометрические характеристики которой определяет стационарное решение (17). Параметр c может принимать любые положительные значения.

Если параметр n вычисляется по второй формуле (24), то уравнение $z^2(v) = 0$ имеет еще два действительных и различных корня: $v = v_{1,2}$. Точка $v = c$ – внутренняя для интервала $[v_1, v_2]$. Существует стационарное решение вида (18), которое определяет винтовую форму равновесия нагруженного стержня. Пусть начальное значение переменной $v \neq c$, тогда эта независимая переменная изменяется в одном из полуоткрытых интервалов $[v_1, c)$ или $(c, v_2]$. Решение (10) описывает асимптотические формы равновесия деформированной оси стержня, которые ответвляются от винтовых.

Равномерные вращения. Используем результаты анализа условий существования стационарных форм равновесия тонкого упругого стержня и приведем условия существования равномерных вращений гиростата. Если гиростат представляет собой систему твердых тел, то ограничения на область допустимых значений параметра a определяют неравенства (7).

Пусть параметр a изменяется на луче $a < -1$, а начальные данные удовлетворяют условиям $c^2 < (a+1)/(a-1),\ 0 < n < 2c$. Тогда стационарное решение (17) определяет равномерные вращения гиростата, у которого конусом осей равномерных вращений будет плоскость $\gamma_3 = 0$. Второе и третье соотношение (17) определяют ориентацию вектора угловой скорости в гиростате.

Если отношение главных моментов инерции гиростата удовлетворяет в безразмерном виде неравенству $a > 2 + \sqrt{3}$, а начальные данные определяются соотношениями (9), то единственно возможные движения гиростата – равномерные вращения. Эти вращения описывает решение (17).

Пусть параметр a принадлежит интервалу $(2-\sqrt{3}, 1)$, а параметр n удовлетворяет первому равенству (24). И в этом случае стационарное решение (17) определяет равномерные вращения, других движений нет. Когда параметр n вычисляется по второй формуле (24), то реализуются два вида движений. Стационарное решение (18) описывает равномерные вращения. Если же переменная v изменяется в одном из интервалов $[v_1, c)$ или $(c, v_2]$, то решение дифференциального уравнения (11) находим по указанной элементарной формуле, где дуговая координата s должна быть заменена на время t. Для решения (10), в котором основные переменные зависят от времени, выполняется теорема о необходимых и достаточных условиях существования асимптотически равномерных движений, доказанная в работе [1].

Предположим, что гиростат имеет полости с идеальной жидкостью. Тогда область изменения параметра a определена неравенствами (8). В этом случае исследования существования стационарных решений в механике стержней полностью переносятся в динамику гиростата. При этом винтовым формам равновесия соответствуют равномерные вращения, а асимптотическим формам равновесия соответствуют асимптотически равномерные движения гиростата. Отметим, что при ограничениях (22) периодическое решение (10) определяет движение гиростата, которое не является асимптотически равномерным движением.

Бифуркация и устойчивость решения в стационарном случае. Теория бифуркаций стационарных решений создана А. Пуанкаре и Н.Г. Четаевым для лагранжевых консервативных механических систем. В работах В.Н. Рубановского [8, 9] показано, что эта теория применима также для исследования систем с известными первыми интегралами. Рассмотрим функцию

$$W = 2H - \omega\Big(\sum_{i=1}^{3}(A_{ii}\omega_i + \lambda_i)\gamma_i - K\Big) + \frac{1}{2}q\omega^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1), \tag{25}$$

которая является интегралом системы дифференциальных уравнений (1). Значениям переменных ω_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$, для которых интеграл (25) имеет стационарные значения при условиях (5) и данной величине K интеграла площадей, соответствуют равномерные вращения гиростата (или стационарные формы равновесия стержня). Они определяются по методу неопределенных множителей Лагранжа из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial \omega} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \omega_i} = 0. \tag{26}$$

Из последних шести уравнений (26) находим

$$\omega_i = \omega\gamma_i, \qquad \gamma_i = \frac{e_i - \omega\lambda_i}{\omega^2(A_{ii} - q)}. \tag{27}$$

Подставив эти значения в (3), получим уравнения:

$$\begin{gathered}\Phi(\omega, q) = \omega^4 - \sum_{i=1}^{3}\frac{(e_i - \omega\lambda_i)^2}{(A_{ii} - q)^2} = 0,\\ K(\omega, q) = \frac{1}{\omega^3}\sum_{i=1}^{3}\frac{(A_{ii}e_i - q\omega\lambda_i)(e_i - \omega\lambda_i)}{(A_{ii} - q)^2}.\end{gathered} \tag{28}$$

В пространстве K, ω_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ уравнения (27), (28) определяют кривую Q. В окрестности точки самопересечения Q совпадают, по меньшей мере, два вещественных корня (26), а значит, равен нулю гессиан D функции W по переменным $\omega, q, \omega_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Множество решений (26), (27) геометрически можно представить в пространстве K, ω, q в виде кривой $\widetilde{Q}$, определяемой уравнениями (28). Между точками кривых Q и $\widetilde{Q}$ устанавливается биективное отображение формулами (27), а значит точкам бифуркации кривой Q соответствуют точки ветвления кривой $\widetilde{Q}$, где уничтожается якобиан $\widetilde{D}$ уравнений (28).

Используем результаты работы [9] и запишем выражения для производных $\dfrac{dK}{dq}$ и $\dfrac{d\omega}{dq}$. Тогда

$$\frac{dK}{dq} = -\frac{D}{D^{(2)}}, \qquad \frac{d\omega}{dq} = \frac{D^{(1)}}{D^{(2)}},$$

где

$$D = A_{11}A_{22}A_{33}\omega^6(B_1 + \omega^2 B_2 B_3), \quad D^{(1)} = -A_{11}A_{22}A_{33}\omega^8 B_3,$$
$$D^{(2)} = \frac{1}{2}A_{11}A_{22}A_{33}\omega^4(q - A_{11})(q - A_{22})(q - A_{33})\frac{\partial \Phi}{\partial \omega},$$
$$B_1 = \sum_{1,2,3}(q - A_{11})[2\omega(A_{22} - A_{33})\gamma_2\gamma_3 + \lambda_2\gamma_3 - \lambda_3\gamma_2]^2,$$
$$B_2 = \sum_{i=1}^{3} A_{ii}\gamma_i^2, \qquad B_3 = \sum_{1,2,3}(q - A_{22})(q - A_{33})\gamma_1^2.$$

Соотношение между якобианами D и $\widetilde{D}$ имеет вид

$$D = \frac{1}{2}A_{11}A_{22}A_{33}\omega^4(A_{11} - q)(A_{22} - q)(A_{33} - q)\widetilde{D}.$$

Достаточные условия устойчивости движений (27) в случае, когда

$$\sum_{(1,2,3)}[2\omega(A_{22} - A_{33})\gamma_2\gamma_3 + \lambda_2\gamma_3 - \lambda_3\gamma_2]^2 \neq 0,$$

приводятся к неравенствам $B_1 > 0$, $D > 0$. При выполнении условия $D < 0$ невозмущенное движение неустойчиво [9].

Исследуем бифуркацию и устойчивость стационарных движений для точного решения [6]. Введем дополнительный параметр μ вместо параметра c с помощью равенства

$$\mu^2 = \frac{a+1}{a+1+(1-a)c^2}. \tag{29}$$

Перепишем ограничения (16), которые дают условия существования стационарных решений

$$n = c[2 \mp (1-a)\mu], \quad b + a(c-n)c = \frac{a(a+1)}{\mu}(-\mu \pm 1), \quad c = \sqrt{\frac{(a+1)(1-\mu^2)}{(1-a)\mu^2}}. \tag{30}$$

Введем безразмерные величины $\widetilde{\omega} = \dfrac{A_{22}\omega}{\lambda_2}$, $\widetilde{q} = \dfrac{q}{A_{11}}$. Из соотношений (27) и (30) получим зависимость

$$q = g\frac{y(c)+1}{y(c)} = g\frac{\mu \pm a}{a(\mu \pm 1)}, \quad \omega = (1-a^2)\frac{P\mu \pm 1}{c(-a\mu \pm 1)}. \tag{31}$$

Знак волны в (31) опущен. Второе равенство (31) определяет кривую $\omega = \omega(\mu)$. Точки $\mu_{1,2} = \mp\dfrac{1}{a}$ на оси $O\mu$ являются предельными и недостижимыми. Постоянную в интеграле, которая в безразмерном виде дана второй формулой (9), запишем следующим образом

$$K = -\frac{a(a-2)\lambda_1}{a^2 - a + 1}\ \frac{b + (a+1)^3}{\sqrt{b^2 + a^2(a+1)^2 n^2}}\ . \tag{32}$$

В силу соотношений (30) величина K, определяемая равенством (32), является функцией одного свободного параметра μ. Множество стационарных движений (27) геометрически можно представить на плоскости (K, μ) кривой $\widetilde{\widetilde{Q}}$, определяемой уравнением (32) на соотношениях (30). Между точками кривых $\widetilde{Q}$ и $\widetilde{\widetilde{Q}}$ устанавливается взаимнооднозначное соответствие формулами (31). Из равенств, связывающих $D, \widetilde{D}, K$ и Φ, следует, что в точках бифуркации обращается в нуль производная $\dfrac{dK}{d\mu} = 0$.

Вычислим производную по μ от правой части равенства (32) и запишем уравнение бифуркации

$$\frac{db}{d\mu}\big[(a+1)b - a^2n^2\big] + a^2 n\big[b + (a+1)^3\big]\frac{dn}{d\mu} = 0.$$

Последнее равенство с учетом соотношений (30) дает следующие значения для μ:

$$\mu = \mp\sqrt[3]{\frac{2}{(a-1)}},\ \ \mu = \mp\frac{1}{a}.$$

Вернемся к исходной переменной c. Как следует из (30), при $\mu = \mp 1$ величина c становится мнимой. Поэтому значения $\mu = \mp 1/a$ не могут быть точками бифуркации. Исследуем возможность ветвления при $\mu = \mp\sqrt[3]{2/(a-1)}$.

В этом случае c удовлетворяет равенству $c^2 = (a+1)\left[\dfrac{1-a}{\sqrt[3]{4(a-1)}} + 1\right]\Big/(a-1)$, которое совпадает с первым соотношением п. 4. Ранее было показано, что при этих условиях уравнение $z^2(v) = 0$ имеет трехкратный корень $v = c$. При этом существуют ограничения на параметр a в виде неравенства $2 < a < 3$. Так как решение (10) реализуется в динамике системы твердых тел при условиях (11), которые противоречат неравенствам $2 < a < 3$, то равномерные вращения гиростата Докшевича не разветвляются. Оба условия бифуркации не имеют смысла.

В механике тонкого упругого стержня условия ветвления являются уравнением связи на параметры a и μ, при котором происходит бифуркация стационарных форм равновесия, т. е. при одной и той же величине концевого момента K реализуются следующие винтовые равновесные формы. Первые определяются ограничениями (18). От них ответвляются асимптотические формы равновесия. Вторые реализуются при условиях (20).

Для анализа условий устойчивости равномерных вращений можно использовать получаемые из (28) соотношения

$$D = \frac{1}{2}A_{11}A_{22}A_{33}\omega^4(A_{11} - q)(A_{22} - q)(A_{33} - q)\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}\frac{dK}{dq},$$

$$\omega^4 B_2 = \frac{1}{2}A_{11}A_{22}A_{33}(A_{11} - q)(A_{22} - q)(A_{33} - q)\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}\frac{d\omega}{dq}.$$

Из них также можно получить выражение $D = B_2\omega^8 \dfrac{dK}{dq} \Big/ \dfrac{d\omega}{dq}$, которое с помощью (31) преобразуется к виду $D = B_2\omega^8 \dfrac{dK}{d\mu} \Big/ \dfrac{d\omega}{d\mu}$, где $B_2 = (A_{22} - q)[(A_{22} - q)\gamma_1^2 + +(A_{11} - q)\gamma_2^2]$.

Анализ знака величины D с помощью производных $\dfrac{dK}{d\mu}$ и $\dfrac{d\omega}{d\mu}$ при условиях существования стационарных движений показал, что для всех реализуемых случаев $D < 0$. А значит, не выполняется необходимое условие устойчивости равномерных вращений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ТГПИ (приказ № 96 от 31.08.2005, § 1, п. 1).

1. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. – Киев: Наук. думка, 1984. – 285 с.
2. *Илюхин А.А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. – Киев: Наук. думка, 1979. – 216 с.
3. *Николаи Е.Л.* К задаче об упругой линии двоякой кривизны // Тр. по механике. – М.: ОГИЗ, 1955. – С. 45–277.
4. *Kirchhof G.* Uber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dunen elastishen Stabes // J. für Math. – 1859. – **56**. – S. 254–277.
5. *Илюхин А.А.* Изгиб и кручение изотропного стержня с равными главными жесткостями при изгибе // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 161–164.
6. *Докшевич А.И.* Новое частное решение уравнения движения гиростата, имеющего неподвижную точку // Там же. – 1970. – Вып.2. – С. 12–15.
7. *Харламов П. В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку// Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 158–159.
8. *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела // Там же. – 1974. – **38**, вып. 4. – С. 616–627.
9. *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами // Задачи исслед. устойчивости и стабилизации движения. – 1975. – Вып. 1. – С. 121–200.
10. *Илюхин А.А.* Обобщение условия Е.Л. Николаи в теории тонких стержней // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 99–104.
11. *Ковалев А. М.* О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Математическая физика. – 1968. – Вып. 5. – С. 87–102.
12. *Вайнберг М.М. Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
13. *Келлер Дж., Антман С.* Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. – М.: Мир, 1969. – С. 87–102.
14. *Antman S.* General solutions for plane extensible elasticae hawing nonlinear stress - strain laws // Quart. Appl. Math. – 1968. – **26**. – P. 35–47.

Таганрогский гос. педагогический ин-т, Россия
Получено 11.10.05