ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2005. Вып. 35

УДК 517.9:517.983.27

©2005. **А.Ю. Оболенский**

МЕТОД МОНОТОННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Метод исследования систем, с использованием квазимонотонного оператора, адекватного исследуемой системе, представляет широкие возможности для получения условий устойчивости невозмущенного режима. Показано, что во многих случаях этот метод приводит к необходимым и достаточным условиям устойчивости и может быть использован для изучения широкого класса свойств системы.

Введение. Метод векторных функций Ляпунова, как развитие прямого метода исследования устойчивости движения [1], в объединении с методом дифференциальных неравенств [2, 3] получил достаточно широкое применение при различных предположениях относительно структуры систем [4–7]. Важным аспектом метода является исследование систем, которые сохраняют введенную в пространстве структуру порядка. Свойства линейных отображений, которые сохраняют порядковую структуру в банаховых пространствах, были рассмотрены в работах [6–8].

Монотонные (сохраняющие структуру порядка) динамические системы не только удачно иллюстрируют методы дифференциальной динамики [9–11], в частности, метод интегральных многообразий [12], но широко используются при исследовании экономических, биологических и иной природы систем [13, 14]. Для дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями и монотонных относительно конуса, заданного полуалгебраическими соотношениями, проблема устойчивости алгебраически разрешима. В общем случае эта проблема имеет отрицательное решение [15].

Этот доклад посвящен исследованию монотонных систем относительно произвольного конуса.

1. Общие свойства квазимонотонных систем. Пусть B — компактное метрическое пространство, E — упорядоченное замкнутым конусом K банахово пространство. Декартово произведение $B \times E$ с проекцией $p\colon B \times E \to B$ — фазовое пространство рассматриваемых систем. Конус K — воспроизводящий с непустой внутренностью K^0, то есть для любого $x \in E$ выполнено $x = x_+ - x_-$, где $x_+ \in K^0$, $x_- \in K^0$. Будем считать,

---

Оболенский Анатолий Юрьевич, 23.12.1946—05.09.2005, выпускник математического ф-та НГУ (1970), кандидат физико-математических наук (1980), старший научный сотрудник Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, многие годы преподавал в ВУЗах Новосибирска и Киева, автор двух книг: "Лекции по аналитической геометрии"(Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 216 с.) и "Лекции по качественной теории дифференциальных уравнений"(Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 300 с.). Планируемая третья книга анонсирована в виде настоящей работы, которую А.Ю. Оболенский представил в качестве доклада на Девятую международную конференцию "Устойчивость, управление и динамика твердого тела", Донецк (Украина), 01–06 сентября 2005 г. Эта книга должна была стать развитием одной из первых работ А.Ю. Оболенского "Исследование устойчивости автономных систем сравнения / Препринт 78.28"(Киев: Институт математики АН УССР, 1978. – 24 с.) в соавторстве с А.А. Мартынюком.

С целью сохранения замысла автора в текст были внесены только самые незначительные правки. Список литературы сверен с первоисточниками и приведен в авторской редакции: намерения автора по указанию ссылок на источники [16–21] и [23, 24] остались неосуществленными. (*Ред.*)

что $x_1 \geq x_2$, если $x_1 - x_2 \in K$; $x_1 \gg x_2$, если $x_1 - x_2 \in K^0$, и существуют окрестности точек x_1, x_2 такие, что для всех $x \in U(x_1)$, $y \in U(x_2)$ выполнено $x \geq y$. Обозначим через $\langle x_1, x_2 \rangle = \{x \in K \colon x_1 \leq x \leq x_2\}$ — конусный отрезок. Приведенные условия гарантируют нормальность конуса K и эквивалентность порядковой топологии, топологии, порожденной нормой. Система конусных интервалов $\langle x_1, x_2 \rangle^0$ образует фильтр окрестностей нуля, K^* — сопряженный конус. Предполагается, что упорядоченное пространство E обладает порядковой единицей e.

Рассматриваем динамические системы $\mathbf{H}^t \colon B \times E \to B \times E$ типа расширений, то есть $p\mathbf{H}^t(u) = \mathbf{H}^t(pu) = F^t(\varphi)$ для каждого $u = (\varphi, x) \in B \times E$. Расширение монотонно (равномерно строго монотонно), если для любых $u_1 \neq u_2 \in B \times E$ таких, что $p(u_1) = p(u_2)$, из неравенства $x_1 \geq x_2$ следует, что $\mathbf{H}^t(u_1) \geq \mathbf{H}^t(u_2)$, $(\mathbf{H}^t(u_1) \gg \mathbf{H}^t(u_2))$ для всех $t \in R$, $t > 0$.

Общие монотонные расширения порождены системой:

$$\begin{aligned} F^t \colon B \to B, \qquad & \varphi \in B, \\ \dot{x} = g\left(F^t(\varphi), x\right), \qquad & x \in E, \end{aligned} \tag{1}$$

где F^t — динамическая система в B, определяющая также коэффициенты системы $\dot{x} = g\left(F^t(\varphi), x\right)$, $x \in E$, $g(\varphi, 0) = 0$. Система (1) имеет единственное решение, порождающее полугруппу преобразований пространства $B \times E$.

Приведем примеры рассматриваемых систем:

1) Функция вида $g(\varphi, x) = A(\varphi)x$, где $A(\varphi)$ принадлежит алгебре Ли группы преобразований однородного конуса в конечномерном пространстве. В частности, система уравнений, сопряженная уравнению Ляпунова:

$$\begin{aligned} F^t \colon B \to B, \qquad \varphi \in B, \\ \dot{D} = DA^*\left(F^t(\varphi)\right) + A\left(F^t(\varphi)\right) D, \end{aligned}$$

где D — пространство симметрических матриц размерности $n(n+1)/2$, порождает монотонную полугруппу относительно однородного конуса положительно определенных матриц.

Система вида:

$$\begin{aligned} F^t \colon B \to B, \qquad \varphi \in B, \\ \dot{D} = DA^*\left(F^t(\varphi)\right) + A\left(F^t(\varphi)\right) D + \mu \operatorname{tr}(ED)\, E, \end{aligned}$$

где E — единичная матрица, порождает строго монотонную полугруппу.

2) Система уравнений с запаздыванием вида:

$$F^t \colon B \to B, \qquad \varphi \in B, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} = A\left(F^t(\varphi)\right) x + \int_{t-h}^{t} B\left(F^s(\varphi)\right) x\left(F^s(\varphi)\right) d\mu_1(s) + \\ + f\left(F^t(\varphi), x\right) + \int_{t-h}^{t} g\left(F^s(\varphi), x\left(F^s(\varphi)\right)\right) d\mu_2(s), \end{aligned} \tag{3}$$

здесь $A(\varphi)$, $f(\varphi, x)$ — квазимонотонные относительно конуса K в R^n операторы, $B(\varphi)$, $g(\varphi, x)$ — положительные операторы. В частности, $B(\varphi)x$ представляется в виде линейной комбинации операторов вида $(x, e^*(\varphi))\, e(\varphi)$, где $e^*(\varphi) \in K^*$, $e(\varphi) \in K$, а $g(\varphi, x)$ —

линейной комбинацией функций вида $h(\varphi,(x,e^*(\varphi)))\,e(\varphi)$, где $h(\varphi,s)$ строго монотонно возрастающая функция $h\colon B\times R\to R$, $h(\varphi,0)=0$. Если $e(\varphi)\in K^0$ и $e^*(\varphi)\in K^{0^*}$, то система уравнений (2), (3) порождает строго монотонное расширение в пространстве $E=B\times C([-h,0],R^n)$, где $C([-h,0],R^n)$ упорядочено конусом $K=\{x(s)\in \in C([-h,0],R^n):\forall s\in[-h,0]\to x(s)\in K\subset R^n\}$.

3) Рассмотрим гибридную систему:

$$F^t\colon B\to B,\qquad \varphi\in B,$$

$$\dot x = A\left(F^t(\varphi)\right)x + b\left(F^s(\varphi)\right)\int_\Omega u\left(F^t(\varphi),y\right)\,d\mu_y\,, \tag{4}$$

$$\mathbf{D}u=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_{ij}\left(F^t(\varphi),y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y_i\partial y_j}+d\left(F^t(\varphi),y\right)u\left(F^t(\varphi),y\right)+\left(x,e^*\left(F^t(\varphi),y\right)\right), \tag{5}$$

и ее квазилинейные возмущения. Относительно системы (4), (5) предполагается, что:

A. Ω — открытая односвязная область в R^m с границей класса $C^{3+\alpha}(\Omega)$, заданной функцией $H(y)$, $\nabla H(y)\neq 0$ для $y\in\partial\Omega$;

B. D — граничный оператор следующего вида:

$$\mathbf{D}\colon C^{2+\alpha}(\Omega)\to C^0\left(\partial\overline{\Omega}\right),$$

$$\mathbf{D}u(y)=\gamma(y)u(y)\big|_{\partial\Omega}+\beta(y)\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega},$$

где $\gamma(y)\in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$, $\gamma(y)\geq 0$, $\beta(y)\in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$, $\beta(y)>0$, n — вектор единичной нормали к $\partial\overline{\Omega}$.

C. Матрица $A(\varphi)\in \mathrm{Lip}(B)$, $\varphi\in B$ и такова, что система $\dot x=A\left(F^t(\varphi)\right)x$ квазимонотонна относительно конуса K_1, $b(\varphi)\in\mathrm{Lip}(B)$, $b(\varphi)\in K_1^0$, $d\mu_y$ — неотрицательная мера с носителем на $\overline{\Omega}$.

D. Коэффициенты $c_{ij}(\varphi,y)$ удовлетворяют равномерному условию эллиптичности $\lambda_1\sum_i\xi_i^2\leq\sum_{ij}c_{ij}(\varphi,y)\xi_i\xi_j\leq\lambda_2\sum_i\xi_i^2$, $\lambda_1,\lambda_2>0$, функции $c_{ij}(\varphi,y),d(\varphi,y),e^*(\varphi,y)\in \in\mathrm{Lip}(B)\times C^{2+\alpha}(\Omega)$, $e^*(\varphi,y)\in K^{0^*}$.

При наложенных условиях система (4), (5) порождает строго монотонную полугруппу в пространстве $B\times E$, где $E=R^n\times C^1_D(\Omega)$. Структура порядка в пространстве R^n задана конусом K_1, в пространстве $C^1_D(\Omega)$ — конусом K_2, с внутренностью $K_2^0=\{u(y)\in C^1_D(\Omega\colon u(y)\gg 0)\}$, где $u(y)\gg 0$, понимается в том смысле, что $u(y)>0$, $\partial u/\partial n<0$, n — вектор единичной нормали к $\partial\overline{\Omega}$. В пространстве E порядок задается конусом $K=K_1\times K_2$.

Квазимонотонные системы естественным образом возникают при исследовании систем, содержащих уравнения нейтрального типа, дискретных систем и систем с импульсным воздействием, сосредоточенным на поверхностях, трансверсальных траекториям динамической системы в $F^t\colon B\to B$, $\varphi\in B$.

Определение 1. Устойчивость (асимптотическая устойчивость) метрического пространства B понимается в смысле порядковой топологии, введенной в E.

2. Устойчивость и асимптотическое поведение систем. Основной инструмент исследования квазимонотонных линейных расширений – это гильбертова метрика, введенная на проективизации пространства E. Рассматривая поведение системы на проективных прямых, пересекающих конус, убеждаемся в том, что условие равномерной строгой монотонности эквивалентно сжимаемости проективного преобразования в метрике отрицательной кривизны, порожденной метрикой Гильберта. Равномерная строгая монотонность линейной системы приводит к теореме.

Теорема 1. Для строго квазимонотонного линейного расширения существует пара инвариантных подпространств $L_1(\varphi)$ и $L_2(\varphi)$ в $B \times E$ таких, что $\dim\left(L_1(\varphi) \bigcap p^{-1}(\varphi)\right) = 1$, где $p^{-1}(\varphi)$ прообраз $p(\varphi)$, $L_1(\varphi) \subset (K^0 \bigcup -K^0) \bigcap p^{-1}(\varphi)$, $L_2(\varphi) \bigcap (K \setminus 0) \bigcap p^{-1}(\varphi) = \varnothing$, и существуют постоянные $c > 0$ и $0 < \sigma < 1$ такие, что:

$$\frac{\|H^t_\varphi(x_2)\|}{\|x_2\|} \Big/ \frac{\|H^t_\varphi(x_1)\|}{\|x_1\|} \leq c\sigma^t$$

при каждом $t > 0$, где $x_i \in L_i(\varphi)$, $i = 1, 2$.

В случае конечномерного пространства, компактности и монотонности преобразования сдвига, существование инвариантного многообразия $L_1(\varphi)$ следует из теоремы Картана [22, с. 90]. Таким образом, для линейных систем с почти периодическими коэффициентами для конуса положительно определенных симметрических матриц доказано обращение теорем Ляпунова о существовании положительно определенной функции, гарантирующей устойчивость системы.

При отсутствии компактности семейства преобразований в конечномерном пространстве найдется система инвариантных подпространств $L_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, l$ таких, что $\dim\left(L_i(\varphi) \bigcap p^{-1}(\varphi)\right) = 1$, $L_i(\varphi) \subset \partial K$, и система приводится к верхнему треугольному виду. В этом случае исследование системы сводится к рассмотрению l скалярных уравнений на инвариантных многообразиях $L_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, l$.

Для квазилинейных строго монотонных расширений вида:

$$F^t\colon B \to B, \qquad \varphi \in B, \tag{6}$$

$$\dot{x} = A\left(F^t(\varphi)\right)x + \mu g\left(F^t(\varphi), x\right), \qquad x \in E, \tag{7}$$

при выполнении условия равномерной строгой монотонности на линейную часть и условий Липшица для функции $g(\varphi, x)$ системы (6), (7), справедлива теорема.

Теорема 2. Для строго квазимонотонного квазилинейного расширения найдется такое μ_0, что при всех $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $\mu \in R$ существует и единственно инвариантное подмногообразие $\Gamma_1(\varphi)$ в $B \times E$ такое, что

$$\dim\left(\Gamma_1(\varphi) \bigcap p^{-1}(\varphi)\right) = 1 \quad \text{и} \quad \Gamma_1(\varphi) \subset p^{-1}(\varphi) \bigcap \left(K^0 \bigcup -K^0\right), \quad \forall \varphi \in B.$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на ряде свойств липшицевых отображений и теореме о неподвижной точке. В частности, липшицева близость линейного и квазилинейного отображения сдвига $\mathrm{Lip}\left(H^t_0 - \mathbf{H}^t\right) \leq \varepsilon$ при $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $\mu \in R$ следует из неравенства Гронуолла — Беллмана. Отметим, что для подпространств $L_1(\varphi)$ и $L_2(\varphi)$ в $B \times E$, любая строго монотонная поверхность $\Gamma(\varphi, s)$ индуцирует липшицево отображение $Q\colon L_1 \to L_2$, и существует постоянная c_1 такая, что $\mathrm{Lip}\,(I + Q) \leq c_1$.

Монотонное расширение $\mathbf{H}^t\colon B \times E \to B \times E$ и произвольное липшицево отображение $Q\colon L_1 \to L_2$ определяют отображения $V^t_Q\colon L_1 \to L_2$ и $W^t_Q\colon L_1 \to L_1$ по формулам

$V_Q^t\left(p_1\mathbf{H}_\varphi^t\left(I+Q\right)x\right)=p_2\mathbf{H}_\varphi^t\left(I+Q\right)x$, $x\in L_1$, и $W_Q^t=p_1\mathbf{H}_\varphi^t\left(I+Q\right)x$, $x\in L_1$, здесь p_i — проекции на подпространства L_i параллельно L_j, $i\neq j$.

Пусть $\Gamma=\{\operatorname{gr}Q\colon Q\in M\}$ будет множеством графиков липшицевых отображений $Q\colon L_1\to L_2$ таких, что $I+Q$ монотонно. Монотонное расширение определяет отображение $\widehat{\mathbf{H}}^t\colon\Gamma\to\Gamma$ и определяет отображение $\widetilde{\mathbf{H}}^t\colon M\to M$ по формулам $\widehat{\mathbf{H}}^t\left(\operatorname{gr}Q\right)=:\ \operatorname{gr}V_Q^t$, $\widehat{\mathbf{H}}^t\left(Q\right)=V_Q^t$, $t>0$. Требуемая поверхность может быть построена, как график неподвижной точки отображения $\widetilde{\mathbf{H}}^T\colon M\to M$ при некотором $T>0$. Действительно, существуют такие $\mu_0>0$ и $T>0$, что при $0\leq\mu\leq\mu_0$ отображение $\widetilde{\mathbf{H}}^T\colon M\to M$ — сжимающее в липшицевой метрике

$$r_M\left(Q_1,Q_2\right)=\sup_{z\in L_1}\frac{\|Q_1(z)-Q_2(z)\|}{\|z\|},$$

где $z=(\varphi,x)\in L_1$, $x\neq0$.

Поскольку M — полное метрическое пространство, то существует единственная неподвижная точка $Q\in M$ отображения $\widetilde{\mathbf{H}}^T\colon M\to M$ и Q единственная неподвижная точка отображения $\widehat{\mathbf{H}}^t\colon\Gamma\to\Gamma$ и $\widehat{\mathbf{H}}^t\left(\operatorname{gr}Q\right)=\operatorname{gr}Q$.

Для произвольного $t\geq0$: $\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}^t\left(\operatorname{gr}(Q)\right)\right)=\mathbf{H}^t\left(\mathbf{H}^T\left(\operatorname{gr}(Q)\right)\right)=\mathbf{H}^t\left(\operatorname{gr}(Q)\right)$, и, на основании единственности неподвижной точки, $\mathbf{H}^t\left(\operatorname{gr}(Q)\right)=\operatorname{gr}(Q)$ при всех $t\geq0$. Свойство группы гарантирует, что для всех $t\in R$, $\mathbf{H}^t\left(\operatorname{gr}(Q)\right)=\operatorname{gr}(Q)$. Выбирая в качестве $\Gamma(\varphi,s)$ график отображения Q, получаем доказательство теоремы. □

Наличие инвариантных одномерных подмногообразий позволяет сводить исследование устойчивости метрического пространства B в порядковой топологии к исследованию устойчивости на одномерном многообразии. В частности, для линейных расширений справедлива теорема.

Теорема 3. Пусть для квазимонотонной линейной системы существует инвариантное подпространство $L_1(\varphi)$ такое, что $\dim\left(L_1(\varphi)\bigcap p^{-1}(\varphi)\bigcap K^0\right)=1$ и траектории $p\left(H^t(x)\right)$ экспоненциально устойчивы для $p(x)\in X_+$, где X_+ — минимальный центр притяжения (центр Хильми) динамической системы $F^t(\varphi)$, тогда B экспоненциально устойчиво в $B\times E$ в порядковой топологии.

Доказательство. В связи с непрерывностью L_1 и дифференцируемостью вдоль траекторий линейной системы на L_1, имеем систему уравнений:

$$\begin{gathered}F^t\colon B\to B,\\ \dot{s}=g\left(F^t(\varphi)\right)s,\quad\varphi\in B,\quad s\in R,\end{gathered}$$

с непрерывной функцией $g\colon B\to R$.

Так как B компакт, и система линейна, достаточно доказать, что существует постоянная $\beta<0$ такая, что: $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int\limits_0^t g\left(F^s(\varphi)\right)\,ds\leq\beta$ для всех $\varphi\in B$.

Зададим произвольно $\varphi\in B$ и найдем последовательность $T_l\to\infty$ при $l\to\infty$ такую, что:

$$\frac{1}{T_l}\int\limits_0^{T_l}g\left(F^s(\varphi)\right)\,ds\to\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int\limits_0^t g\left(F^s(\varphi)\right)\,ds.$$

Пусть m_φ — нормированная инвариантная мера, сосредоточенная в точке $\varphi \in B$. Для любой функции $f\colon B \to R$ определим последовательность мер равенством:

$$\int\limits_B f(\psi) m_{\varphi,T_l}(d\psi) = \frac{1}{T_l}\int\limits_0^{T_l} ds \int\limits_B f\left(F^s(\varphi)\right)\, dm_\varphi .$$

По определению m_φ имеем $\int\limits_B f(\psi) m_{\varphi,T_l}(d\psi) = \frac{1}{T_l}\int\limits_0^{T_l} f\left(F(\varphi)\right)\, ds$.

Из последовательности мер m_{φ,T_l} выберем подпоследовательность мер, которая слабо сходится к некоторой предельной мере μ_φ. Для предельной меры μ_φ существует последовательность мер $\{\mu_{\phi_i}\}$, $\mu_{\phi_i} \in \Sigma_\mu$, принадлежащих фундаментальной системе мер, и числа $\lambda_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ такие, что меры $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_{\psi_i}$ слабо сходятся к мере μ_φ при $k \to \infty$, и имеют место равенства:

$$\int\limits_B g(\psi)\mu_\varphi(d\psi) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int\limits_0^t g\left(F^s(\varphi)\right)\, ds = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \int\limits_B g(\psi)\mu_{\psi_i}(d\psi).$$

Существует постоянная $\beta < 0$ такая, что для любой меры $\mu_{\psi_i} \in \Sigma_\mu$, выполнено $\int\limits_B g(\psi)\mu_{\psi_i}(d\psi) \le \beta$. Действительно, предположив противное, найдем последовательность инвариантных, транзитивных, нормированных мер μ_j, $\mu_j \in \Sigma_\mu$ таких, что $\lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_B g(\psi)\mu_j\, ds \ge 0$.

Слабый предел мер μ_j мера μ_0 нормирована, транзитивна и инвариантна для динамической системы F^t. Выбрав регулярную для меры μ_0 точку $\psi_0 \in X_+$, убеждаемся в том, что:

$$\int\limits_B g(\psi)\mu_0(d\psi) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t g\left(F^s(\psi_0)\right)\, ds \ge 0.$$

Полученное неравенство противоречит экспоненциальной устойчивости X_+. Учитывая монотонность расширения, теорема доказана. □

Для нелинейных квазимонотонных систем для исследования устойчивости достаточно ограничиться множеством неблуждающих точек динамической системы $F^t\colon B \to B$. Все приведенные результаты без труда переносятся на дискретные системы в соответствующих банаховых пространствах.

Метод сравнения с квазимонотонным оператором может быть использован не только для исследования устойчивости процессов, но и при рассмотрении вопросов, связанных со слабой регулярностью динамического расширения, то есть с вопросами, связанными с существованием и единственностью ограниченного инвариантного вложения метрического пространства B в $B \times E$.

3. Синтез управлений в линейных неавтономных системах типа расширений. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений типа управления вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \bar{b}u, \\ u &= \sum_{i=1}^{n} c_i x_i. \end{aligned} \tag{8}$$

Определение 2. Система (8) называется стабилизируемой, если существует такой закон управления объектом, при котором программное движение становится устойчивым (асимптотически устойчивым).

Теорема 4. Автономная строго квазимонотонная относительно конуса K система $\dot{x} = Ax$ стабилизируемая, если $\bar{b} \in K^0$, $A\bar{b} \neq \lambda\bar{b}$.

Рассмотрим квазимонотонную систему вида:

$$\begin{gathered} F^t\colon B \to B, \quad \varphi \in B, \\ \dot{x} = A\left(F^t(\varphi)\right)x + \bar{b}u, \\ u = \sum_{i=1}^{n} c_i(\varphi)x_i, \end{gathered} \tag{9}$$

где B — компактное метрическое пространство, $F^t(\varphi)$, $\varphi \in B$ — динамическая система в B, $\dot{x} = A\left(F^t(\varphi)\right)x$ порождает равномерно строго монотонную систему относительно конуса K.

Определение 3. Система (9) называется стабилизируемой, если существует такой закон управления объектом, при котором инвариантное метрическое пространство B становится устойчивым (асимптотически устойчивым).

Теорема 5. Система (9) стабилизируемая, если $\bar{b} \in K^0$, $\bar{b}(\varphi) \notin \Gamma(\varphi)$ для $\varphi \in X_+$ — минимальному центру притяжения (центру Хильми) системы $F^t(\varphi)$, $\Gamma(\varphi) \in K^0$ — инвариантное одномерное многообразие системы $F^t\colon B \to B$, $\varphi \in B$, $\dot{x} = A\left(F^t(\varphi)\right)x$.

Пример. Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \left(\sin^2(\pi\varphi_1) + \sin^2(\pi\varphi_2)\right)\left(\cos^2(\pi\varphi_1) + \cos^2(\pi\varphi_2)\right), \\ \dot{\varphi}_2 &= \sqrt{2}\left(\sin^2(\pi\varphi_1) + \sin^2(\pi\varphi_2)\right)\left(\cos^2(\pi\varphi_1) + \cos^2(\pi\varphi_2)\right), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(\varphi_1,\varphi_2)\,x_1 + |a_{12}(\varphi_1,\varphi_2)|\,x_2 + b_1(\varphi_1,\varphi_2)\,u, \\ \dot{x}_2 &= |a_{21}(\varphi_1,\varphi_2)|\,x_1 + a_{22}(\varphi_1,\varphi_2)\,x_2 + b_2(\varphi_1,\varphi_2)\,u, \\ u &= c_1(\varphi_1,\varphi_2)\,x_1 + c_2(\varphi_1,\varphi_2)\,x_2, \end{aligned} \tag{11}$$

где $a_{ij}(\varphi_1,\varphi_2)$, $b_i(\varphi_1,\varphi_2)$ $\quad (i,j = 1,2)$ — $\mathbf{1}$–периодические функции, удовлетворяющие условиям: $a_{12}(0,0)\,a_{21}(0,0) \neq 0$, $a_{12}(1/2,1/2)\,a_{21}(1/2,1/2) \neq 0$, $b_1(0,0) > 0$, $b_1(1/2,1/2) > 0$, $b_2(0,0) > 0$, $b_2(1/2,1/2) > 0$.

Минимальный центр притяжения (центр Хильми) системы (10) состоит их двух точек $(0,0)$ и $(1/2,1/2)$. Для управляемости системы (10), (11) достаточно, чтобы векторы $\{b_1(0,0), b_2(0,0)\}$ и $\{b_1(1/2,1/2), b_2(1/2,1/2)\}$ не являлись собственными векторами матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}(0,0) & |a_{12}(0,0)| \\ |a_{21}(0,0)| & a_{22}(0,0) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}(1/2,1/2) & |a_{12}(1/2,1/2)| \\ |a_{21}(1/2,1/2)| & a_{22}(1/2,1/2) \end{pmatrix},$$

и было выполнено: $A_1 \ll A_2$. Характеристические показатели системы (10), (11) без управления принадлежат отрезку $[\lambda_{\max}(A_1), \lambda_{\max}(A_2)]$, причем $\forall\beta \in [\lambda_{\max}(A_1), \lambda_{\max}(A_2)]$ найдется всюду плотно лежащая в B траектория $F^t(\varphi)$ такая, что характеристический показатель траектории $\{x_1(F^t(\varphi_1,\varphi_2), \bar{x}_0), x_2(F^t(\varphi_1,\varphi_2), \bar{x}_0)\}$ равен β.

4. Заключение. Метод исследования систем, с использованием квазимонотонного оператора, адекватного исследуемой системе, представляет широкие возможности для получения условий устойчивости невозмущенного режима. Во многих случаях этот метод приводит к необходимым и достаточным условиям устойчивости и может быть использован для изучения широкого класса свойств системы.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч.: В 5-ти т. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – С. 7–263.
2. *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Избр. тр. Механика жидкости и газа. Математика. Общая механика. – М.: Наука, 1976. – С. 307–360.
3. *Ważewski T.* Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications // Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego = Annal. Soc. Polon. Math. – 1950. – **23**. – P. 112–166.
4. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем. – Новосибирск: Наука, 1980. – 481 с.
5. *Bellman R.* Vector Lyapunov functions // J. Soc. industr. and appl. math. Ser. A. On control. – 1962. – **1**, No. 1. – P. 32–34.
6. *Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных возмущениях. – Киев: Наук. думка, 1984. – 307 с.
7. *Šiljak D. D.* Large-scale dynamic systems: stability and structure. – New York: North-Holland, 1978. – xvi + 416 p.
8. *Крейн М.Г., Рутман М.А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 1(23). – С. 3–95.
9. *Hirsch M.W.* Stability and convergence in strongly monotone dynamical systems // J. reine und angew. Math. – 1988. – **383**. – S. 1–53.
10. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975. – 304 с.
11. *Бронштейн И.У., Черний В.Ф.* Линейные расширения, удовлетворяющие условию Перрона. I // Диф. уравнения. – 1978. – **14**, N 10. – С. 1739–1751.
12. *Митропольский Ю. А., Лыкова О.Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
13. *Опойцев В.И.* Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1978. – **36**. – С. 237–273.
14. *Сабаев Е.Ф.* Системы сравнения для нелинейных дифференциальных уравнений и их приложения в динамике реакторов. – М.: Атомиздат, 1980. – 192 с.
15. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
16. *Биркгоф Г.* Теория решеток. – М.: Наука, 1984. – 566 с.
17. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 469 с.
18. *Винберг Э. Б.* Теория однородных выпуклых конусов // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1963. – **12**. – С. 303–358.
19. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
20. *Борисенко С.Д., Косолапов В.И., Оболенский А.Ю.* Устойчивость процессов при непрерывных и дискретных возмущениях. – Киев: Наук. думка, 1988. – 198 с.
21. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 351 с.
22. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. – М: Мир, 1964. – 533 с.
23. *Горин Е.А.* Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, вып. 1(97). – С. 91–118.
24. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Ин-т механики НАН Украины, Киев

Получено 23.10.2005