УДК 531.38

©2005. **А.Л. Швыгин**

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой с центром тяжести, расположенным в главной плоскости эллипсоида инерции для неподвижной точки ($y_0 = 0$), допускает маятниковые движения Млодзеевского [1]. Задача об устойчивости маятниковых движений рассматривалась в работах [2 – 6]. Проведено исследование устойчивости колебаний малой амплитуды [2]. Для тела, когда его центр тяжести находится на одной из главных осей инерции ($y_0 = z_0 = 0$), задача для быстрых вращений и вращений, близких к постоянным, решена в [3], результаты для произвольных вращений изложены в [4]. Доказано [5, 6], что маятниковые движения обязательно содержат четыре нулевых характеристических показателя (ХП), из которых два – простые, а остальные образуют жорданову клетку плюс пару ХП противоположного знака. В статье излагаются результаты по вычислению ХП маятниковых колебаний Млодзеевского. Используется метод [7], впервые примененный для прецессий Гриоли. В пространстве параметров задачи строятся области, где выполняются необходимые условия устойчивости, и области неустойчивости. Маятниковые колебания являются наиболее общими симметричными периодическими движениями тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой [6, 8]. Наличие их тесно связано с проблемой неинтегрируемости задачи, решение которой требует знания ХП [6].

**Введение.** Движение тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой $\boldsymbol{O}$ описывается уравнениями Эйлера-Пуассона

$$\begin{aligned} A\dot{p} - (B-C)qr &= P(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), \\ B\dot{q} - (C-A)pr &= P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \\ C\dot{r} - (A-B)qp &= P(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\dot{\gamma}_1 = \gamma_2 r - \gamma_3 q, \qquad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3 p - \gamma_1 r, \qquad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p \ ,$$

где $A,\ B,\ C$ – главные моменты инерции относительно неподвижной точки; $p, q, r$ – проекции мгновенной угловой скорости тела на оси подвижной системы координат $\boldsymbol{O}xyz$, с осями, направленными по главным осям инерции тела для неподвижной точки; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – направляющие косинусы восходящей вертикали $\boldsymbol{\gamma}$ в точке $\boldsymbol{O}$ в системе координат $\boldsymbol{O}xyz$; $P = mg$ – вес тела; $x_0, y_0, z_0$ – координаты центра тяжести в подвижной системе координат.

Система (1) допускает три классических интеграла: энергии, кинетического момента и геометрический

$$\begin{gathered} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = 2h = \mathrm{const}, \\ Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \sigma = \mathrm{const}, \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \end{gathered}$$

Характерной особенностью системы (1) является ее инвариантность относительно замены $G : (p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, t) \to (-p, -q, -r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, -t)$. Значит, система (1) принадлежит [9] к классу обратимых механических систем с неподвижным множеством

$$M = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : p = 0, q = 0, r = 0\}.$$

В случае расположения центра тяжести в главной плоскости эллипсоида инерции ($y_0 = 0$) система (1) инвариантна также относительно замены

$$G_y : (p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, t) \to (p, -q, r, \gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3, -t),$$

т.е. допускает второе неподвижное множество $M_y = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : q = 0, \gamma_2 = 0\}$. В этом случае система (1) допускает семейство решений [1], описываемое системой

$$p = r = 0, \quad \gamma_2 = 0, \tag{2}$$

$$B\dot{q} = P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \quad \dot{\gamma}_1 = -\gamma_3 q, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q. \tag{3}$$

Указанное семейство состоит из симметричных периодических движений обратимой системы (1). Примечательно, что маятниковые колебания одновременно симметричны относительно двух неподвижных множеств: $M$ и $M_y$, в то время как вращения – только относительно множества $M_y$.

Естественные подстановки $q = -\dot{\varphi}$, $\gamma_1 = \sin\varphi$, $\gamma_3 = \cos\varphi$ приводят уравнения (3) к уравнению математического маятника

$$\varphi'' + \sin(\varphi + \varphi_0) = 0, \qquad \left(n^2 = \frac{Pl}{B}, \quad l = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{x_0}{z_0}\right) \tag{4}$$

("штрих"означает производную по новому времени $\tau = nt$).

Цель работы – вычислить ХП для маятниковых колебаний и построить в пространстве параметров задачи (4) области, где выполняются необходимые условия устойчивости, и области неустойчивости.

**1. Уравнения в вариациях.** Геометрический интеграл учтем заменой

$$\gamma_1 = \sin\varphi\cos\theta, \quad \gamma_2 = \sin\theta, \quad \gamma_3 = \cos\varphi\cos\theta$$

($\varphi$, $\theta$ — углы Эйлера). Далее введем новые безразмерные переменные

$$p_1 = \frac{p}{n}, \quad q_1 = \frac{q}{n}, \quad r_1 = \frac{r}{n},$$

тогда система (1) в случае $y_0 = 0$ приводится к следующей системе 5-го порядка [4]:

$$\begin{aligned}
p_1' &= \frac{1-\beta}{\alpha} q_1 r_1 - \frac{1}{\alpha}\cos\varphi_0 \sin\theta, \\
q_1' &= (\beta - \alpha) r_1 p_1 + \sin(\varphi + \varphi_0)\cos\theta, \\
r_1' &= \frac{\alpha - 1}{\beta} p_1 q_1 - \frac{1}{\beta}\sin\varphi_0 \sin\theta, \\
\varphi' &= (p_1 \sin\varphi + r_1\cos\varphi)\operatorname{tg}\theta - q_1, \\
\theta' &= p_1\cos\varphi - r_1\sin\varphi,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\alpha = A/B$, $\beta = C/B$. Отметим, система (5) инвариантна относительно преобразования $(-\tau, \varphi, p_1, -q_1, r_1, -\theta) \longmapsto (\tau, \varphi, p_1, q_1, r_1, \theta)$ и принадлежит к классу обратимых механических систем [9].

Обозначим вариации переменных для возмущенного движения через $\delta p_1, \delta q_1, \delta r_1$, $\delta\varphi, \delta\theta$. Тогда система уравнений в вариациях Пуанкаре для исследуемых маятниковых движений имеет вид

$$\begin{aligned} &\delta q_1' = \cos(\varphi + \varphi_0)\delta\varphi, \\ &\delta\varphi' = -\delta q_1, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\delta p_1' = -a_0 q_1^* \delta r_1 - \frac{1}{\alpha}\cos\varphi_0 \delta\theta, \\ &\delta r_1' = b_0 q_1^* \delta p_1 - \frac{1}{\beta}\sin\varphi_0 \delta\theta, \\ &\delta\theta' = \cos\varphi^* \delta p_1 - \sin\varphi^* \delta r_1, \end{aligned} \tag{7}$$

где $a_0 = (\beta - 1)/\alpha$, $b_0 = (\alpha - 1)/\beta$, и разбивается на две замкнутые системы [2] с периодическими коэффициентами: систему (6) второго порядка и систему (7) третьего порядка. Очевидно, система (6) имеет пару нулевых ХП. Что касается системы (7), она является линейной, периодической обратимой системой. Это видно из ее инвариантности относительно преобразования $(-\tau, \delta p_1, \delta r_1, -\delta\theta) \longmapsto (\tau, \delta p_1, \delta r_1, \delta\theta)$. Так и должно быть, так как уравнения в вариациях составлены для симметричного периодического движения (2), (3) обратимой системы (1). Отметим, что система (7) содержит четыре существенных параметра: $\alpha$, $\beta$, $\varphi_0$, $h_1^* = h^* l/(Bn^2) = h^*/(Pl)$.

**2. Характеристические показатели.** Обратимая линейная система (7) имеет третий порядок. Поэтому (7) обязательно содержит один нулевой ХП. Два остальных ХП имеют противоположные знаки и вычисляются по формуле

$$\lambda = \pm\frac{1}{T}\operatorname{arcch}\delta\theta(T), \quad \text{где} \;\; T = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin(\arccos(-h_1^*)/2)^{2*}\sin^2(\varphi)}}$$

– период колебаний по $\tau$. Здесь $\delta\theta(T)$ – значение $\delta\theta$ в момент времени $\tau = T$ при начальном значении вектора $(\delta p(0),\ \delta r(0),\ \ \delta\theta(0))^T = (0,0,1)^T$.

Для построения численного решения системы (7) необходимо знать функции, отмеченные звездочкой, т.е. в явном виде решение системы (2), (3) – движения Млодзеевского. Решение уравнения математического маятника (4) выписывается с помощью эллиптических функций. Здесь необходимые функции строятся решением задачи Коши с начальным значением $q_1^*(0) = 0$. Таким образом, находится только одно решение системы (6), (7) с известным начальным вектором. Строятся резонансные кривые и области необходимых условий устойчивости. В этих областях имеем $|\delta\theta(T)| < 1$, $\operatorname{arcch}\tau$ превращается в обычный $\arccos\tau$, а показатели $\lambda$ – чисто мнимые. Поэтому кривые задаются формулами

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\arccos\delta\theta(T), \qquad k\varkappa = s \quad (k = 2, 3, 4; s \in Z). \tag{8}$$

Из динамических свойств главных моментов инерции имеем

$$A + B > C, \qquad A + C > B, \qquad B + C > A.$$

Следовательно, $\alpha, \beta$ подчинены условиям

$$1 + \alpha > \beta, \qquad \alpha + \beta > 1, \qquad 1 + \beta > \alpha,$$

а $a_0$, $b_0$ – условиям $|a_0| < 1$, $|b_0| < 1$, которые ограничивают допустимую область в пространстве параметров $\alpha$ и $\beta$ или в пространстве $a_0$ и $b_0$. Кроме того, ХП системы (7) не меняются при сдвиге $\varphi_0$ на $\pi$, при изменении знака $(\varphi_0 - \pi/2)$, а также при замене $(a_0, b_0, (\varphi_0 - \pi/4))$ на $(b_0, a_0, -(\varphi_0 - \pi/4))$, т. е. достаточно вычислить ХП для $0 \leq \varphi_0 < \pi/4$.

Результаты расчетов приведены на рис. 1 – 24 для разных значений параметров $h, \varphi_0$. На этих рисунках в пространстве параметров $a_0, b_0$ ($a_0$ – по оси абсцисс, $b_0$ – по оси ординат) темным обозначены области, где выполняются необходимые условия устойчивости, белым – области неустойчивости и линии параметрического резонанса.

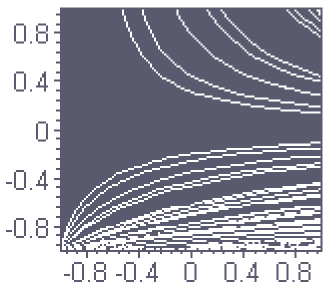


*Рис. 1.* $h = -1, \varphi_0 = 0$.

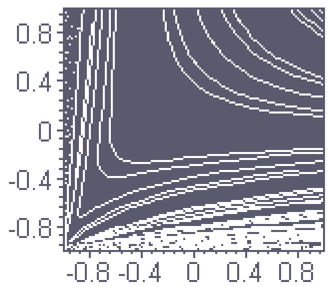


*Рис. 2.* $h = -1, \varphi_0 = \pi/8$.

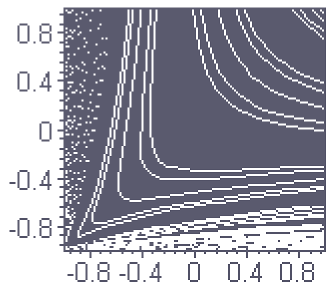


*Рис. 3.* $h = -1, \varphi_0 = \pi/4$.

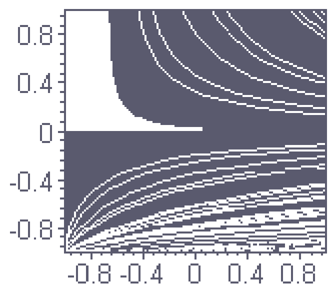


*Рис. 4.* $h = -0.99, \varphi_0 = 0$.

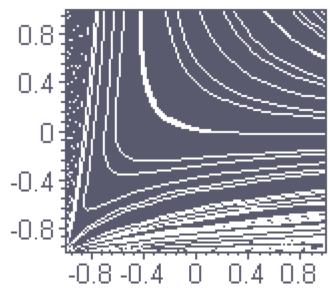


*Рис. 5.* $h = -0.99, \varphi_0 = \pi/8$.

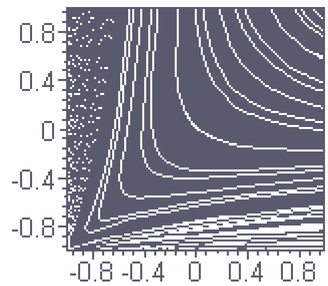


*Рис. 6.* $h = -0.99, \varphi_0 = \pi/4$.

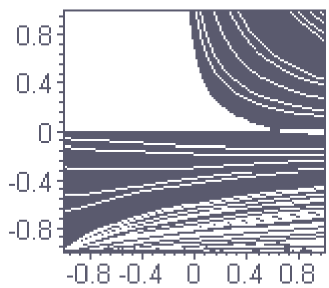


*Рис. 7.* $h = -0.8, \varphi_0 = 0$.

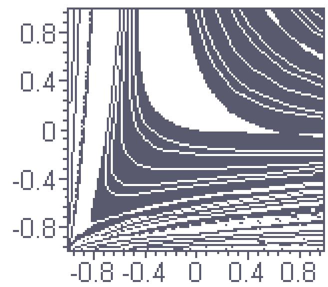


*Рис. 8.* $h = -0.8, \varphi_0 = \pi/8$.

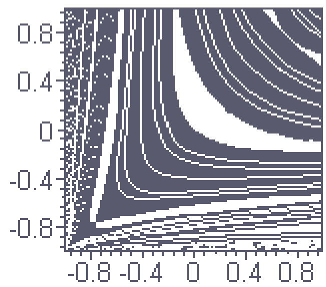


*Рис. 9.* $h = -0.8, \varphi_0 = \pi/4$.

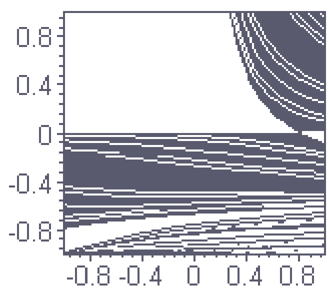


*Рис. 10.* $h = -0.3, \varphi_0 = 0$.

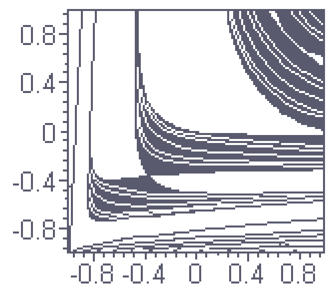


*Рис. 11.* $h = -0.3, \varphi_0 = \pi/8$.

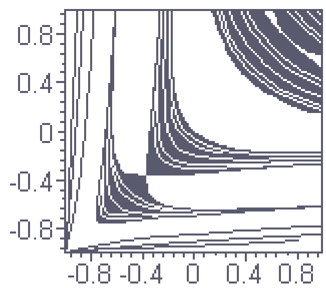


*Рис. 12.* $h = -0.3, \varphi_0 = \pi/4$.

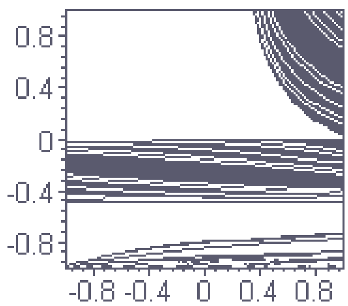


Рис. 13. $h = 0, \varphi_0 = 0$.

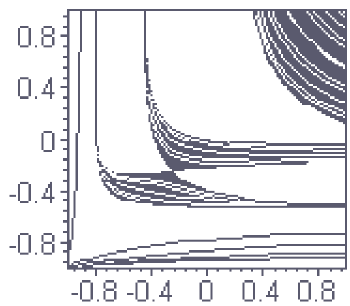


Рис. 14. $h = 0, \varphi_0 = \pi/8$.

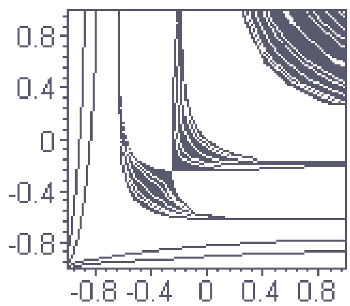


Рис. 15. $h = 0, \varphi_0 = \pi/4$.

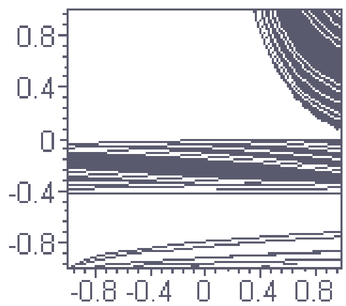


Рис. 16. $h = 0.1, \varphi_0 = 0$.

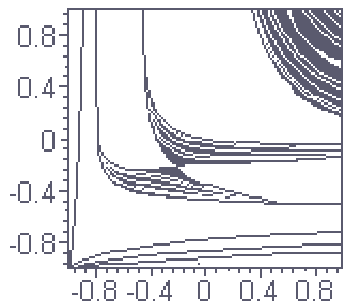


Рис. 17. $h = 0.1, \varphi_0 = \pi/8$.

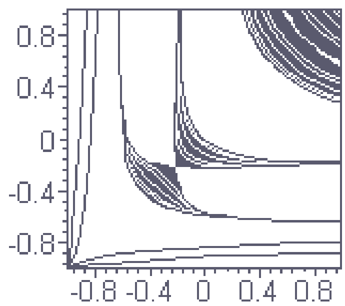


Рис. 18. $h = 0.1, \varphi_0 = \pi/4$.

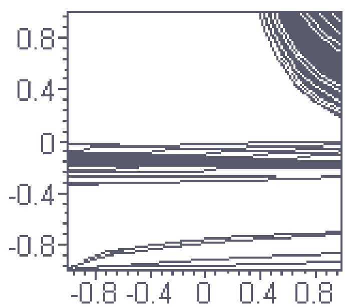


Рис. 19. $h = 0.3, \varphi_0 = 0$.

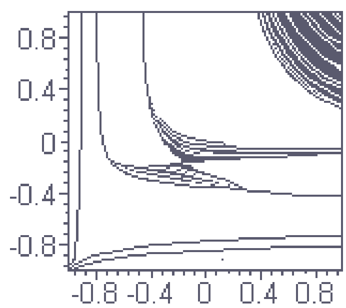


Рис. 20. $h = 0.3, \varphi_0 = \pi/8$.

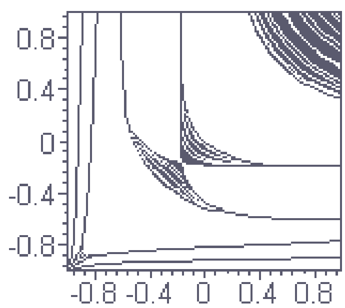


Рис. 21. $h = 0.3, \varphi_0 = \pi/4$.

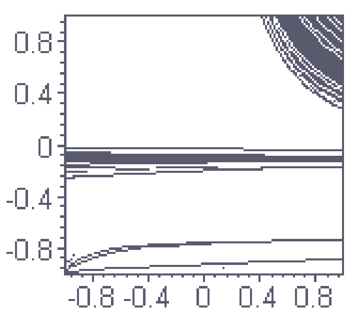


Рис. 22. $h = 0.5, \varphi_0 = 0$.

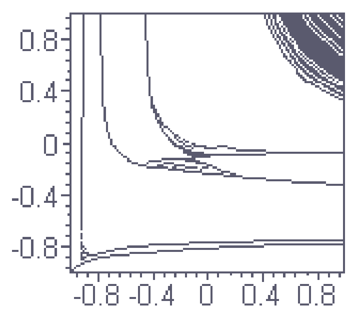


Рис. 23. $h = 0.5, \varphi_0 = \pi/8$.

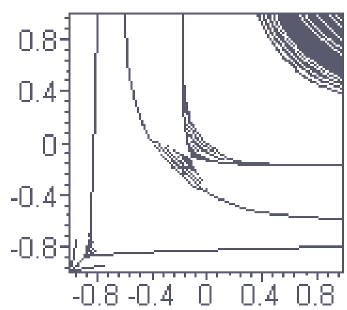


Рис. 24. $h = 0.5, \varphi_0 = \pi/4$.

Рисунки подтверждают все ранее полученные результаты по исследованию устойчивости маятниковых колебаний и являются более общим результатом по сравнению с [4], так как при подсчете ХП и построении областей, где выполняются необходимые условия устойчивости, областей неустойчивости и линий параметрического резонанса, добавляется еще один существенный параметр $\varphi_0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(03-01-00052) и программы НШ-2000.2003.01.


1. *Млодзеевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук о-ва любит. естеств., антропол. и этногр. – М., 1894. – **7**, вып. 1. – С. 46 – 48.
2. *Архангельский Ю.А.* Об устойчивости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в одном частном случае // Прикл. математика и механика. – 1960. – **24**, вып. 2. – С. 294–302.
3. *Маркеев А.П.* О плоских и близких к плоским вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 4. – С. 29–36.
4. *Тхай В.Н., Швыгин А.Л.* Об устойчивости вращений вокруг горизонтальной оси тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. – М.: ВЦ РАН, 2000. – Ч. 2. – С. 149–157.
5. *Брюм А.З., Горр Г.В.* Достаточные условия существования асимптотически маятниковых движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50**, вып. 4. – С. 681–684.
6. *Тхай В.Н.* О характеристических показателях симметричного периодического движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 3–8.
7. *Тхай В.Н.* Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // Прикл. математика и механика. – **64**, вып. 5. – 2000. – С. 848–857.
8. *Тхай В.Н.* Семейства симметричных периодических движений в задаче Эйлера // Докл. РАН. – 2005. – **401**, № 4. – С. 483-485.
9. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // Прикл. математика и механика – 1991. – **55**, вып.4. – С. 578–586.


*Московская гос. академия приборостроения и информатики, Россия*
shvyghin@mtu-net.ru
Получено 09.10.05