УДК 531.383

©2005. **Л.Д. Акуленко, Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко**

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО МОМЕНТА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ УГЛОВ ПРЕЦЕССИИ И НУТАЦИИ

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, когда восстанавливающий момент зависит от углов прецессии и нутации. Предполагается, что угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии тела и две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья одного с ним порядка. Специальным образом вводится малый параметр, применяется метод усреднения. Получена усредненная система уравнений движения для существенно нелинейной двухчастотной системы в нерезонансном случае. Рассмотрены примеры движения тела под действием восстанавливающего момента сил конкретного вида.

Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки O под действием возмущающего момента и восстанавливающего момента, зависящего от углов прецессии и нутации. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C-A)\,qr = k(\theta,\psi)\sin\theta\cos\varphi + M_1,\\
&A\dot{q} + (A-C)\,pr = -k(\theta,\psi)\sin\theta\sin\varphi + M_2,\\
&C\dot{r} = M_3,\ M_i = M_i(p,q,r,\psi,\theta,\varphi),\ (i=1,2,3),\\
&\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta,\\
&\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi,\\
&\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела, проходящие через точку O. Величины M_i $(i=1,2,3)$ – проекции на те же оси вектора возмущающего момента, являющиеся периодическими функциями углов Эйлера ψ, φ, θ с периодами 2π. Здесь A – экваториальный, C – осевой моменты инерции тела относительно точки O, $A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, зависящий от углов нутации и прецессии $k(\theta,\psi)$. При отсутствии возмущений $M_i = 0$ $(i=1,2,3)$ и $k(\theta) = \mathrm{const}$, уравнения (1) отвечают случаю волчка Лагранжа.

В данной работе делаются следующие исходные предположения:

$$(p^2+q^2)^{1/2} \ll r, \quad Cr^2 \gg k, \quad |M_i| \ll k \quad (i=1,2), \quad M_3 \sim k, \tag{2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость осевого вращения достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

Неравенства (2) позволяют ввести следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&p = \varepsilon P, \qquad q = \varepsilon Q, \qquad k = \varepsilon K(\theta, \psi), \\
&M_i = \varepsilon^2 M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi) \ \ (i = 1, 2), \quad M_3 = \varepsilon M_3^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Ранее рассматривались быстрые вращения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием постоянного восстанавливающего момента $k = \mathrm{const}$ [1] и момента, зависящего от угла нутации $k = k(\theta)$ [2]. Исследован [3, 4] случай восстанавливающего момента вида $k = k(\theta)$ и зависимости возмущающего момента также и от медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Рассмотрены возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием восстанавливающего и возмущающего моментов, медленно изменяющихся во времени [5]. В [6–8] исследовался более общий случай зависимости восстанавливающего момента одновременно от угла нутации и медленного времени: $k = k(\tau, \theta)$.

Ниже рассматривается случай, когда восстанавливающий момент зависит от углов нутации и прецессии: $k = k(\theta, \psi)$.

Ставится задача об асимптотическом поведении системы (1) при малом ε; если выполнены условия (2), (3), исследование проведем методом усреднения [9, 10] на интервале времени порядка ε^{-1}.

Рассмотрим систему нулевого приближения (предварительно разделив на ε обе части первых двух уравнений (1) после замены переменных (3)) и положим $\varepsilon = 0$. Тогда решение полученной системы имеет вид

$$
\begin{aligned}
&r = r_0, \qquad \psi = \psi_0, \qquad \theta = \theta_0, \qquad \varphi = \varphi_0 + r_0 t, \\
&P = a\cos\gamma_0 + b\sin\gamma_0 + K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \sin(r_0 t + \varphi_0), \\
&Q = a\sin\gamma_0 - b\cos\gamma_0 + K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \cos(r_0 t + \varphi_0), \\
&a = P_0 - K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \qquad b = -Q_0 + K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \cos\varphi_0, \\
&\gamma_0 = n_0 t, \qquad n_0 = (C - A) A^{-1} r_0, \qquad r_0 \neq 0, \qquad |n_0 / r_0| \leq 1,
\end{aligned} \tag{4}
$$

$\theta_0, \varphi_0, P_0, Q_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$, а переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы прецессионных колебаний. Пользуясь соотношениями (3), (4), перейдем в системе (1) от переменных p, q, r, ψ, θ, φ к новым переменным a, b, r, ψ, θ, α, γ, где $\alpha = \gamma + \varphi$. После ряда преобразований получим систему семи уравнений вида:

$$
\begin{aligned}
\dot{a} = \ &\varepsilon A^{-1}(M_1^0 \cos\gamma + M_2^0 \sin\gamma) + \varepsilon K(\theta, \psi) C^{-2} r^{-2} M_3^0 \sin\theta \sin\alpha - \\
&-\varepsilon K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \cos\theta (b - K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \sin\theta \cos\alpha) - \varepsilon C^{-1} r^{-1} \sin\alpha \Big[(a\cos\alpha + \\
&+b\sin\alpha) \sin\theta \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \theta} + (a\sin\alpha - b\cos\alpha + K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \sin\theta) \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \psi}\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot b = \;& \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \sin\gamma - M_2^0\cos\gamma) - \varepsilon K(\theta,\psi)C^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha + \\
& +\varepsilon K(\theta,\psi)C^{-1}r^{-1}\cos\theta\,(a + K(\theta,\psi)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha) + \varepsilon C^{-1}r^{-1}\cos\alpha\Big[(a\cos\alpha + \\
& +b\sin\alpha)\sin\theta\frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\theta} + (a\sin\alpha - b\cos\alpha + K(\theta,\psi)C^{-1}r^{-1}\sin\theta)\frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\psi}\Big],
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$\dot r = \varepsilon C^{-1}M_3^0,$$

$$\dot\psi = \varepsilon\,\mathrm{cosec}\,\theta\;(a\sin\alpha - b\cos\alpha) + \varepsilon K(\theta,\psi)C^{-1}r^{-1}, \quad \dot\theta = \varepsilon\;(a\cos\alpha + b\sin\alpha),$$

$$\dot\alpha = CA^{-1}r - \varepsilon\,\mathrm{ctg}\,\theta\;(a\sin\alpha - b\cos\alpha) - \varepsilon K(\theta,\psi)C^{-1}r^{-1}\cos\theta, \quad \dot\gamma = (C-A)A^{-1}r,$$

$$M_i^0(a,b,r,\psi,\theta,\alpha,\gamma) = M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi) \;\; (i=1,2,3)\,.$$

Рассмотрим систему (5) с точки зрения применения метода усреднения [9, 10]. Зависимость восстанавливающего момента от угла прецессии приводит к появлению в первых двух уравнениях системы (5) слагаемых, содержащих частные производные $\partial K(\theta,\psi)/\partial\psi$. Система (5) содержит медленные переменные a, b, r, ψ, θ и быстрые переменные – φ и фазы α, γ. Проекции M_i^0 возмущающего момента являются периодическими функциями α, γ с периодом 2π. Система (5) содержит две вращающиеся фазы α и γ, а соответствующие им частоты $\omega_1 = CA^{-1}r$ и $\omega_2 = (C-A)A^{-1}r$ переменны.

При усреднении системы (5) имеют место два случая: нерезонансный, когда частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы (C/A – иррациональное число), и резонансный, когда эти частоты соизмеримы ($C/A = i/j$, $i/j \le 2$; i, j – взаимно простые небольшие натуральные числа). В нерезонансном случае ($C/A \ne i/j$) усредненную систему первого приближения получим путем независимого усреднения правых частей системы (5) по обеим быстрым переменным α, γ:

$$
\begin{aligned}
\dot a = \;& \varepsilon A^{-1}\mu_1 - \varepsilon b K(\theta,\psi)C^{-1}r^{-1}\cos\theta + \varepsilon K(\theta,\psi)C^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^c - \\
& -\frac{1}{2}\varepsilon C^{-1}r^{-1}b\sin\theta\,\frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\varepsilon C^{-1}r^{-1}a\,\frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\psi}, \\
\dot b = \;& \varepsilon A^{-1}\mu_2 + \varepsilon a K(\theta,\psi)C^{-1}r^{-1}\cos\theta - \varepsilon K(\theta,\psi)C^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^c + \\
& +\frac{1}{2}\varepsilon C^{-1}r^{-1}a\sin\theta\,\frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\varepsilon C^{-1}r^{-1}b\,\frac{\partial K(\theta,\psi)}{\partial\psi}, \\
\dot r = \;& C^{-1}\mu_3, \quad \dot\psi = K(\theta,\psi)C^{-1}r^{-1}, \quad \dot\theta = 0,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_1\,(a,b,r,\psi,\theta) &= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma\right)\,d\alpha\,d\gamma, \\
\mu_2\,(a,b,r,\psi,\theta) &= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma\right)\,d\alpha\,d\gamma,
\end{aligned}
$$

$$\mu_3\left(a,b,r,\psi,\theta\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}M_3^0 d\alpha\,d\gamma,\mu_3^s\left(a,b,r,\psi,\theta\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}M_3^0\sin\alpha\,d\alpha\,d\gamma,$$
$$\mu_3^c\left(a,b,r,\psi,\theta\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}M_3^0\cos\alpha\,d\alpha\,d\gamma.$$

В результате усреднения частные производные от восстанавливающего момента сохранились. Отметим, что последнее уравнение системы (6) интегрируется и дает $\theta=\theta_0$. Решая усредненную систему (6) для восстанавливающего момента конкретного вида

$$k(\theta,\psi)=k(\theta)\,\sin\psi=\varepsilon K(\theta)\,\sin\psi, \tag{7}$$

определим движение тела в нерезонансном случае с погрешностью порядка ε^{-1}.

При помощи изложенной методики рассмотрим некоторые конкретные примеры возмущенного движения твердого тела. Вначале исследуем движение твердого тела в случае Лагранжа под действием малого возмущающего момента, постоянного в связанных осях и приложенного вдоль оси симметрии. Возмущающие моменты M_i $(i=1,2,3)$ в этом случае имеют вид

$$M_1=M_2=0,\quad M_3=\varepsilon M_3^*=\mathrm{const}. \tag{8}$$

После ряда преобразований решение усредненной системы уравнений первого приближения (6) для возмущающего момента (8) и восстанавливающего момента (7) имеет вид

$$\theta=\theta_0,\qquad r=r_0+\varepsilon C^{-1}M_3^*t,\qquad \mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}=\left|1+\varepsilon C^{-1}r_0^{-1}M_3^*t\right|^{K(\theta)/M_3^*}\mathrm{tg}\,\frac{\psi_0}{2},$$
$$a=\frac{F}{F_0}\left[P_0\cos\beta+Q_0\sin\beta-\lambda_0\sin(\beta+\varphi_0)\right],\quad b=\frac{F}{F_0}\left[P_0\sin\beta-Q_0\cos\beta+\lambda_0\cos(\beta+\varphi_0)\right],$$
$$F=\left(\frac{1+\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\psi_0}{2}\left|1+\varepsilon C^{-1}r_0^{-1}M_3^*t\right|^{2m}}{\left|1+\varepsilon C^{-1}r_0^{-1}M_3^*t\right|^{m}}\right)^{1/2},\qquad m=\frac{K(\theta)}{M_3^*}, \tag{9}$$
$$F_0=\left(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\psi_0}{2}\right)^{1/2},\qquad \lambda_0=K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0,$$
$$\beta=\left[\sin\theta K(\theta)\frac{dK(\theta)}{d\theta}+2\cos\theta\right]\left[\mathrm{arctg}\left(\left|1+\varepsilon C^{-1}r_0^{-1}M_3^*t\right|^{2m}\mathrm{tg}\,\frac{\psi_0}{2}\right)-\frac{\psi_0}{2}\right].$$

В результате подстановки в соотношения (3) выражений P,Q,a,b,r из (4), (9) определим

$$\begin{aligned}p=&\frac{F}{F_0}\left[p_0\cos(\gamma-\beta)-q_0\sin(\gamma-\beta)+\lambda_0\sin(\gamma-\beta-\varphi_0)\right]+\\&\quad+k(\theta,\psi)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi,\\q=&\frac{F}{F_0}\left[p_0\sin(\gamma-\beta)+q_0\cos(\gamma-\beta)-\lambda_0\cos(\gamma-\beta-\varphi_0)\right]+\\&\quad+k(\theta,\psi)C^{-1}r^{-1}\,\sin\theta\,\cos\varphi,\\\gamma=&(C-A)A^{-1}r_0t+\frac{1}{2}\varepsilon A^{-1}C^{-1}(C-A)M_3^*t^2.\end{aligned} \tag{10}$$

Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Осевая составляющая r вектора угловой скорости монотонно возрастает или убывает в зависимости от знака возмущающего момента. Угол прецессии 2π-периодическая переменная, для которой выполняется соотношение $\operatorname{tg}\dfrac{\psi}{2} \geq \operatorname{tg}\dfrac{\psi_0}{2}$. Медленные переменные a, b являются произведением осциллирующего сомножителя с частотой, обусловленной видом восстанавливающего момента, и сомножителя, представляющего собой отношение степенных функций.

Составляющие p, q вектора угловой скорости, согласно (10), содержат слагаемое, являющееся произведением степенной функции и осциллирующего сомножителя, а также слагаемое, обусловленное восстанавливающим моментом.

Теперь изучим возмущенное вращательное движение динамически симметричного твердого тела с учетом моментов, действующих на тело со стороны внешней среды. Возмущающие моменты M_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид [11]

$$M_1 = -\varepsilon^2 I_1 P, \quad M_2 = -\varepsilon^2 I_1 Q, \quad M_3 = -\varepsilon I_3 r. \tag{11}$$

Здесь I_1, I_3 – положительные постоянные, зависящие от свойств среды.

Для нерезонансного случая при восстанавливающем моменте (7), с учетом возмущающих моментов (11), усредненная система (6) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\dot{a} = -\varepsilon a\left(A^{-1}I_1 + \frac{1}{2}C^{-1}r^{-1}K(\theta)\cos\psi\right) - \varepsilon C^{-1}r^{-1}b\sin\psi\left(\frac{1}{2}\sin\theta\frac{dK(\theta)}{d\theta} + K(\theta)\cos\theta\right),\\
&\dot{b} = -\varepsilon b(A^{-1}I_1 + \frac{1}{2}C^{-1}r^{-1}K(\theta)\cos\psi) + \varepsilon C^{-1}r^{-1}a\sin\psi\left(\frac{1}{2}\sin\theta\frac{dK(\theta)}{d\theta} + K(\theta)\cos\theta\right),\\
&\dot{r} = -\varepsilon C^{-1}I_3 r, \qquad \dot{\psi} = \varepsilon K(\theta)\sin\psi\, C^{-1}r^{-1}, \qquad \dot{\theta} = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Решая усредненную систему уравнений (12), получим:

$$\begin{aligned}
&r = r_0\exp\left[-\varepsilon C^{-1}I_3 t\right], \quad r_0 \neq 0, \quad \theta = \theta_0,\\
&\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2}\exp(-n),\\
&a = F(t)\cos(\Delta G + \beta),\\
&b = F(t)\sin(\Delta G + \beta),\\
&n = \frac{K(\theta)}{I_3 r_0}\left(1 - \exp(\varepsilon C^{-1}I_3 t)\right), \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a_0}{b_0},\\
&F(t) = \left(\frac{1 + \left(\operatorname{tg}\dfrac{\psi_0}{2}\exp(-n)\right)^2}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\psi_0}{2}}\right)^{1/2}\left(a_0^2 + b_0^2\right)^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}n - \varepsilon A^{-1}I_1 t\right),\\
&\Delta G = \left(K^{-1}(\theta_0)\sin\theta_0\left.\frac{dK(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0} + 2\cos\theta_0\right)\left[\operatorname{arctg}\left(\exp(-n)\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2}\right) - \frac{\psi_0}{2}\right].
\end{aligned} \tag{13}$$

В результате подстановки в соотношения (3) выражений P, Q, a, b из (4), (13) определим

$$p = F(t)\left[p_0 \cos(\gamma - \Delta G) - q_0 \sin(\gamma - \Delta G) + k_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \sin(\gamma - \Delta G - \varphi_0)\right] + \\ + k(\theta,\psi) C^{-1} r^{-1} \sin\theta_0 \sin\varphi,$$

$$q = F(t)\left[p_0 \sin(\gamma - \Delta G) + q_0 \cos(\gamma - \Delta G) - k_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \cos(\gamma - \Delta G - \varphi_0)\right] + \\ + k(\theta,\psi) C^{-1} r^{-1} \sin\theta_0 \cos\varphi.$$

Модуль осевой скорости вращения r уменьшается по экспоненте. Угол прецессии монотонно возрастает и зависит от начального значения. Медленные переменные a, b являются произведением степенной функции и осциллирующего сомножителя, зависящего от вида восстанавливающего момента.

1. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 5. – С. 3-10.
2. *Лещенко Д.Д., Саллам С.Н.* Возмущенные вращения твердого тела относительно неподвижной точки // Там же. – 1990. – № 5. – С. 16-23.
3. *Кушпиль Т.А., Лещенко Д.Д., Тимошенко И.А.* Некоторые задачи эволюции вращений твердого тела под действием возмущающих моментов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 119-125.
4. *Akulenko L. Leshchenko D, Kushpil T. and Timoshenko I.* Problems of Evolution of Rotations of a Rigid Body under the Action of Perturbing Moments // Multibody System Dynamics. – 2001. – **6**, № 1. – P. 3-16.
5. *Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д.* Вращения твердого тела под действием нестационарных восстанавливающего и возмущающего моментов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 2. – С. 3-12.
6. *Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д.* Возмущенные вращательные движения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 57-62.
7. *Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д.* Возмущенные вращательные движения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента // Там же. – 2002. – Вып. 32. – С. 77-84.
8. *Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д.* Эволюция вращений твердого тела под действием восстанавливающего и управляющего моментов // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 6. – С. 32–38.
9. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
10. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. - М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
11. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. - М.: Наука, 1985. – 288 с.

Ин-т проблем механики Российской академии наук, Москва
Одесская гос. академия строительства и архитектуры
leshchenko_d@ukr.net

Получено 01.10.05