ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2003. Вып. 33

УДК 62-50

©2003. **В.Ф. Щербак**

ЗАДАЧА ОТСЛЕЖИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ДВИЖЕНИИ

Рассматривается задача отслеживания для нелинейных динамических систем вход-выход. В линейном случае эта задача может быть решена с помощью построения асимптотического наблюдателя Луенбергера [1]. Предлагаемый в работе способ основан на использовании динамического расширения исходной системы ее прототипом [4] и нелинейных методах синтеза управлений, стабилизирующих отклонения от заданных инвариантных многообразий системы дифференциальных уравнений. В качестве приложения, для динамических уравнений Эйлера, описывающих вращение твердого тела вокруг неподвижной точки, решена задача отслеживния вектора угловой скорости тела при определенных ограничениях на его моменты инерции.

1. Сведение задачи отслеживания к задаче стабилизации по части переменных. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t) \in R^n, \tag{1}$$

$$y = h(x), \quad y \in R^k, \tag{2}$$

где $y(t)$ – выход системы, значения которого известны на любой траектории системы (1). Предполагается, что функции $f(x), h(x)$ являются дифференцируемыми функциями своих аргументов, а решение $x(t)$ – ограниченная функция времени. Разобъем вектор x на два подвектора $x = (x_1, x_2)^T$, где $x_1 = (x^1, x^2, \ldots, x^k)^T, x_2 = (x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^n)^T$. Без ограничения общности будем считать, что система (1), (2) с помощью замены переменных приведена к виду, при котором измеряются первые k координат, то есть $y(t) = x_1(t)$. Кроме того, ограничим класс рассматриваемых объектов системами, правые части уравнений которых линейны относительно неизмеряемых переменных $x_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x_2} = f_2(x_1) + g_2(x_1)x_2, \\ \ y = x_1. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $g_1(x), g_2(x)$ – матрицы размерностей $k \times (n-k)$ и $(n-k) \times (n-k)$ соответственно.

Наряду с системой (3) рассмотрим уравнения ее управляемого прототипа. Перепишем уравнения (3), предполагая что их правые части могут содержать n произвольных функций $u_1(.) \in R^k, u_2(.) \in R^{n-k}$:

$$\begin{cases} \dot{p_1} = f_1(p_1) + g_1(p_1)p_2 + u_1, \\ \dot{p_2} = f_2(p_1) + g_2(p_1)p_2 + u_2. \end{cases} \tag{4}$$

Задача отслеживания для системы (4) является [1],[5] одним из способов решения задачи управления ее движением с помощью эталонной системы (3). При этом целью управления является обеспечение движения системы (4) вдоль траектории, заданной как некоторое частное решение эталонной системы. Кроме того, должны быть выполнены условия притяжения: функции $u_1(.), u_2(.)$ требуется подобрать так, чтобы решения системы (4) с любыми начальными условиями асимптотически стремились к заданному решению системы (3).

Рассматривая совместно уравнения (3),(4), получаем систему $2n$ дифференциальных уравнений, содержащих n управлений $u_1(.), u_2(.)$. Информация о фазовом векторе $x(t)$ эталонной системы неизвестна, доступны измерению лишь его k координат $x_1(t)$. Для линейных систем и для систем, нелинейные члены которых могут быть представлены как функции выхода

$$\dot{x} = Ax + g(y), \quad y = x_1,$$

решение задачи отслеживания при неполной информации о движении может быть найдено с помощью методов построения линейных наблюдателей [2],[6],[7], траектории которых асимптотичеси стремятся к $x(t)$.

Будем решать задачу синтеза управлений, считая выполненными следующие предположения:

A1) Управления $u_1(.), u_2(.)$ могут зависеть лишь от известных величин $x_1(t)$ и фазового вектора системы (4) – координат $p_1(t), p_2(t)$;

A2) Для замкнутой системы (3),(4), полученной в результате подстановки функций $u_1(x_1, p_1, p_2), u_2(x_1, p_1, p_2)$ в правые части (4), выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши $\forall p(0) \in R^n, t > 0$.

Любые функции $u_1(.), u_2(.)$, удовлетворяющие предположениям A1, A2, будем считать допустимыми управлениями. С учетом этих соглашений далее можем полагать, что решения системы (4), соответствующие выбранным допустимым управлениям, являются известными функциями времени. Обозначим через $e_i = p_i - x_i, i = 1, 2$ рассогласования решений систем (3),(4). Вычитая из уравнений (4) уравнения (3), получим систему дифференциальных уравнений в отклонениях

$$\begin{cases} \dot{e_1} = G_1(x_1, p_1) + g_1(x_1)e_2 + u_1, \\ \dot{e_2} = G_2(x_1, p_1) + g_2(x_1)e_2 + u_2, \end{cases} \tag{5}$$

где слагаемые $G_i(x_1, p_1) = [g_i(p_1) - g_i(x_1)]p_2 + f_i(p_1) - f_i(x_1),\ i = 1, 2$ зависят только лишь от известных величин x_1, p_1, p_2. Поэтому, не нарушая условие A1, введем новые управления v_1, v_2 по формулам $v_i = G_i(x_1, p_1) + u_i, \quad i = 1, 2$. Тогда уравнения для отклонений примут вид

$$\begin{cases} \dot{e_1} = g_1(x_1)e_2 + v_1, \\ \dot{e_2} = g_2(x_1)e_2 + v_2. \end{cases} \tag{6}$$

С учетом сделанных обозначений задача отслеживания может быть рассмотрена как задача подбора управлений $v_1(.), v_2(.)$, стабилизирующих значения переменных e_1, e_2 в расширенной системе (3),(6). При этом условие A1 налагает ограничение: управляющие функции $v_1(.), v_2(.)$ могут зависеть лишь от переменных x_1, p_1, p_2 или, что то же самое, от x_1, e_1, p_2.

Чтобы упростить решение задачи синтеза управлений, сделаем дополнительное предположение,полагая, что траектории системы (3),(6) принадлежат некоторому, пока неопределенному, инвариантному дифференциальному многообразию в пространстве переменных x, e, которое описывается системой $n - k$ равенств

$$e_2 - \Phi(x_1, e_1) = 0, \tag{7}$$

удовлетворяющих граничному условию $\Phi(x_1, 0) = 0$. Тогда для решения задачи отслеживания достаточно подобрать управления $v_1(.), v_2(.)$ и дифференцируемые функции $\Phi(x_1, e_1)$ так, чтобы для траекторий расширенной системы (3),(4) или, что то же самое, системы (3),(5), выполнялись условия:

1) $\lim_{t\to\infty} e_1 = 0$;

2) уравнения (7) описывают инвариантное многообразие, удовлетворяюшее граничным условиям $\Phi(x_1, 0) = 0$;

3) указанное многообразие обладает свойством глобального асимптотического притяжения.

2. Синтез стабилизирующих управлений. Рассмотрим вначале задачу о синтезе управлений, при которых многообразие, определяемое формулами (7), будет инвариантным многообразием расширенной системы (3),(6). Сделаем замену переменных e_2 по формуле $\eta = e_2 - \Phi(x_1, e_1)$, где вектор η характеризует отклонение траекторий системы (3),(6) от многообразия (7). В новых переменных уравнения отклонений таковы

$$\begin{cases} \dot{e_1} = g_1(x_1)(\Phi + \eta) + v_1, \\ \dot{\eta} = [g_2(x_1) + (\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1})g_1(x_1)](\Phi + \eta) - \Phi_{x_1}[f_1(x_1) + g_1(x_1)p_2] + v_2 - \Phi_{e_1}v_1, \end{cases} \tag{8}$$

где через Φ_{x_1}, Φ_{e_1} обозначены якобиевы матрицы

$$\Phi_{x_1} = \frac{\partial\Phi(x_1, e_1)}{\partial x_1}, \quad \Phi_{e_1} = \frac{\partial\Phi(x_1, e_1)}{\partial e_1}.$$

Выберем управление v_2 таким, что

$$v_2 = -[g_2(x_1) + (\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1})g_1(x_1)]\Phi + \Phi_{x_1}(f_1(x_1) + g_1(x_1)p_2) + \Phi_{e_1}v_1.$$

Тогда система (8) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{e_1} = g_1(x_1)(\Phi + \eta) + v_1, \\ \dot{\eta} = [g_2(x_1) + (\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1})g_1(x_1)]\eta. \end{cases} \tag{9}$$

Отсюда следует, что функция $\eta(t) = 0$ удовлетворяет системе (9), следовательно, если в некоторый момент времени равенство (7) выполнено, то оно будет выполнено тождественно для всех t.

Для того чтобы обеспечить свойство глобального притяжение для инвариантного многообразия (7) и устремить отклонения $e_1(t)$ к нулю, в нашем распоряжении имеется выбор вида функции $\Phi(x_1, e_1)$ и управления $v_1(.)$.

Пусть функция $\Phi(x_1, e_1)$ является частным решением следующей системы уравнений в частных производных первого порядка

$$g_2(x_1) + (\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1})g_1(x_1) = -(\lambda, \ldots, \lambda)^T, \quad \Phi(x_1, 0) = 0,$$

где $\lambda > 0$. Тогда, если соответствующее этому решению управление $v_2(x_1, e_1)$ удовлетворяет ограничению A2, то многообразие, определяемое формулами (7), обладает свойством глобального притяжения, а сами эти формулы определяют асимптотическую оценку переменных $x_2(t)$.

Для обеспечения асимптотической устойчивости нулевого решения системы (9) выберем управление $v_1 = -g_1(x_1)\Phi(x_1, e_1) - \Gamma e_1$, где $\Gamma = \mathtt{diag}(\gamma, \ldots, \gamma), \gamma > 0$. В результате система (9) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{e_1} = g_1(x_1)\eta - \Gamma e_1, \\ \dot{\eta} = -\Lambda\eta, \end{cases} \tag{10}$$

где $\Lambda = \mathtt{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$.

Пусть $V(t) = \frac{1}{2}(e_1^T e_1 + \eta^T \eta)$ – функция Ляпунова для системы (10). Ее производная в силу системы (10) равна

$$\dot{V}(t) = -e_1^T \Gamma e_1 + e_1^T g_1(x_1)\eta - \eta^T \Lambda \eta.$$

Согласно сделаному предположению, эталонная траектория $x(t)$ является ограниченной функцией времени. При дополнительном требовании ограниченности значений $g_1(x_1)$ из последнего равенства следует, что значения γ, λ могут быть выбраны таким образом, что производная функции Ляпунова $\dot{V}(t)$ становится определенно отрицательной функцией времени. Таким образом, в результате предложенной схемы синтеза управлений получаем, что

1) траектории системы (3),(6) стремятся к многообразию $e_2 - \Phi(x_1, e_1) = 0$;

2) $\lim_{t\to\infty} e_1 = 0$;

3) из граничного условия $\Phi(x_1, 0) = 0$ для дифференцируемой функции $\Phi(x_1, e_1)$ следует, что $\lim_{t\to\infty} e_2 = 0$.

3. Задача отслеживания по выходу угловой скорости твердого тела. В качестве приложения данного способа решения задачи отслеживания рассмотрим уравнения, описывающие вращение по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром тяжести тела.

Обозначив $a_1 = \dfrac{A_2 - A_3}{A_1}$, $a_2 = \dfrac{A_3 - A_1}{A_2}$, $a_3 = \dfrac{A_1 - A_2}{A_3}$, запишем уравнения Эйлера

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_1 x_2 x_3, \\ \dot{x_2} = a_2 x_3 x_1, \\ \dot{x_3} = a_3 x_1 x_2, \end{cases} \tag{11}$$

где A_1, A_2, A_3 – моменты инерции тела относительно главных осей, $x(t)$ – вектор угловой скорости тела. Систему (11) будем рассматривать как эталонную для задачи отслеживания. Предположим, что первые две компоненты $x_1(t), x_2(t)$ вектора угловой скорости $x(t)$ известны.

Составим вспомогательную систему, правые части которой могут содержать произвольные функции $u_i(.), i = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \dot{p_1} = a_1 p_2 p_3 + u_1, \\ \dot{p_2} = a_2 p_1 p_3 + u_2, \\ \dot{p_3} = a_3 p_1 p_2 + u_3. \end{cases} \tag{12}$$

Требуется подобрать управления u_1, u_2, u_3 таким образом, чтобы любое решение системы (12) асимптотически стремилось к заданому решению системы (11). Для этого составим уравнения ошибок, обозначив соответствующие отклонения через $e_i(t) = p_i(t) - x_i(t), \quad i = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \dot{e_1} = a_1(e_1 p_3 + e_3 x_2) + u_1, \\ \dot{e_2} = a_2(e_2 p_3 + e_3 x_1) + u_2, \\ \dot{e_3} = a_3(e_1 p_2 + e_2 p_1) + u_3. \end{cases} \tag{13}$$

Будем решать задачу стабилизации нулевого решения системы (13) в окрестности некоторого одномерного многообразия $e_3 - \Phi(x_1, x_2, e_1, e_2) = 0$. Сделаем замену переменной e_3 по формуле $\eta = e_3 - \Phi(x_1, x_2, e_1, e_2)$ и введем новые управления, зависящие лишь от доступных измерению величин x_1, x_2 и фазового вектора системы (12)

$$v_1 = a_1(e_1 p_3 + x_2 \Phi) + u_1, \quad v_2 = a_2(e_2 p_3 + x_1 \Phi) + u_2, \quad v_3 = a_3(p_1 p_2 - x_1 x_2) + u_3. \tag{14}$$

В новых переменных система (13) запишется так

$$\begin{cases} \dot{e_1} = a_1 x_2 \eta + v_1, \\ \dot{e_2} = a_2 x_1 \eta + v_2, \\ \dot{\eta} = (a_1 x_2 \Phi_{x_1} + a_2 x_1 \Phi_{x_2})(\eta + \Phi - p_3) + v_3. \end{cases} \tag{15}$$

На первом шаге конструирования вспомагательной системы потребуем, чтобы управление v_3 удовлетворяло равенству

$$v_3 = (a_1 x_2 \Phi_{x_1} + a_2 x_1 \Phi_{x_2})(p_3 - \Phi) - \Phi_{e_1} v_1 - \Phi_{e_2} v_2. \tag{16}$$

Правая часть (16) не зависит от переменных x_3, e_3, η и поэтому такое управление является допустимым. В результате система уравнений в отклонениях (15) преобразуется в систему дифференциальных уравнений, для которой многообразие, определяемое формулой $e_3 - \Phi(x_1, x_2, e_1, e_2) = 0$, является инвариантным:

$$\begin{cases} \dot{e_1} = a_1 x_2 \eta + v_1, \\ \dot{e_2} = a_2 x_1 \eta + v_2, \\ \dot{\eta} = [a_1 x_2(\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1}) + a_2 x_1(\Phi_{x_2} - \Phi_{e_2})]\eta. \end{cases} \tag{17}$$

Для сведения задачи отслеживания к задаче частичной стабилизации переменных e_1, e_2 требуется обеспечить, чтобы:

a) указанное многообразие обладало бы свойством глобального асимптотического притяжения;

b) функция $\Phi(x_1, x_2, e_1, e_2)$ в рассматриваемой области была непрерывной функцией своих аргументов и удовлетворяла граничному условию $\Phi(x_1, x_2, 0, 0) = 0$.

Поскольку управление v_3 уже выбрано по формуле (16), то для выполнения условий *a*) и *b)* будем искать функцию $\Phi(x_1, x_2, e_1, e_2)$ как решение граничной задачи для уравнения в частных производных первого порядка

$$a_1 x_2(\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1}) + a_2 x_1(\Phi_{x_2} - \Phi_{e_2}) = -\lambda, \quad \Phi(x_1, x_2, 0, 0) = 0. \tag{18}$$

Вид решения уравнения (18) существенно зависит от соотношения знаков параметров a_1, a_2.

Рассмотрим задачу отслеживания для систем (11), (12) при определенных ограничениях на распределение масс в твердом теле. А именно, предположим, что параметры a_1, a_2 имеют разные знаки. Это предположение будет выполнено, когда моменты инерции удовлетворяют одному из неравенств: $1) A_1 < A_3, A_2 < A_3; \quad 2) A_3 < A_2, A_3 < A_1$. Тогда краевая задача (18) имеет ограниченные решения. Одним из таких частных решений является

$$\Phi(x_1, x_2, e_1, e_2) = \lambda \frac{\operatorname{sign} a_1}{\sqrt{-a_1 a_2}} \left[\mathtt{arctg} \left(\sqrt{-\frac{a_2}{a_1}} \frac{x_1}{x_2} \right) - \mathtt{arctg} \left(\sqrt{-\frac{a_2}{a_1}} \frac{x_1 + e_1}{x_2 + e_2} \right) \right]. \qquad (19)$$

Полагая

$$v_1 = -\gamma e_1, \quad v_2 = -\gamma e_2, \qquad (20)$$

получаем, что положительно определенная функция $V(t) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + \eta^2)$ выбором постоянных λ, γ может быть сделана определенно отрицательной на траекториях системы (17). Тем самым показано, что функции v_1, v_2, v_3, вычисленые по формулам (20),(16) и определяющие, с учетом преобразований (14) управления u_1, u_2, u_3 , обеспечивают асимптотическое стремление произвольной траектории системы (12) к траектории системы (11), имеющей заданные значения координат $x_1(t), x_2(t)$.

Заключение. В работе предлагается метод решения задачи отслеживания заданной траектории для динамических систем, правые части которых линейны по неизвестным компонентам фазового вектора. Он основан на использовании методов управляемой стабилизации нелинейных систем относительно части переменных. Уравнения исходной системы дополняются уравнениями ее управляемого прототипа. Для полученной расширенной системы решается задача синтеза управлений, при которых многообразие, описываемое системой дополнительных соотношений, становится интегральным многообразием. Вид указаных дополнительных алгебраических соотношений выбираются так, чтобы полученное инвариантное многообразия стало глобально притягивающим и удовлетворяло краевому условию, которое обеспечивает стабилизацию нулевого решения системы уравнений ошибок.

1. *Byrnes C.I. and Isidori A.* New results and examples in nonlinear feedback stabilization // Systems and Control Letters. – 1989. – **24**, № 12. – P. 437-442.
2. *Krener A., Respondek W.* Nonlinear observers with linearizable error dynamics // SIAM J. Control Optim. – 1985. – **23**, № 2. – P. 197 -216.
3. *Jiang Z.-P. and Nijmeijer H.* A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1999. – **44**, № 2. – P. 265-279.
4. *Ковалев А. М., Щербак В. Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 285 с.
5. *Lefeber E., Robertsson A. and Nijmeijer H.* Linear controllers for exponential tracking of systems in chained form // International J. of Robust and Nonlinear Control. – 2000. –**10**, № 4. – P. 243-264.
6. *Luenberger D.* Introduction to observers //IEEE Trans. Aut. Contr. – 1977. – **3**. – P. 47-52.
7. *Hou M., Pugh A.* Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems // Systems and Control Letters. – 1999. – **37**. – P. 1-9.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
shvf@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 10.07.03