УДК 531.38

©2003. **А.В.Зыза**

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Продолжено изучение полиномиальных решений класса Горячева-Стеклова-Ковалевского [1-3] уравнений дижения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, начатое в работах [4, 5]. Построено одно новое частное решение класса Стеклова задачи о движении тела в магнитном поле и доказано несуществование решения в случае, когда степень многочлена, задающего инвариантное соотношение для первой компоненты единичного вектора, характеризующего направление магнитного поля, больше единицы.

В динамике твердого тела известно большое количество частных решений уравнений движения [6]. Среди них особое место занимают полиномиальные решения Д.Н.Горячева [1], В.А.Стеклова [2] и Н. Ковалевского [3], поскольку они найдены в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Полиномиальные решения такого класса полностью изучены и в обобщенной задаче динамики [7], которая описывается дифференциальными уравнениями класса Кирхгофа [8]. В задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона в полной мере исследованы полиномиальные решения только в случае изоконических движений [4]. Для общего случая установлены значения максимальных степеней основных полиномов и приведены примеры разрешимости условий на параметры, для которых решения действительны [5]. При этом остались неизученными три варианта значений максимальных степеней полиномов.

Первый вариант относится к задаче о движении гиростата в поле силы тяжести. Второй вариант характеризуется условиями, для которых дифференциальные уравнения движения имеют два квадратичных инвариантных соотношения для компонент вектора угловой скорости p, q, r, а компоненты единичного вектора оси симметрии силового поля ν_1, ν_2, ν_3 являются многочленами второй степени относительно p, q, r. Третий вариант определяется тем, что функции $q^2(p), r^2(p)$ – линейные функции p; $\nu_1(p)$ – квадратичная функция p, $\nu_2 = q\psi(p)$, $\nu_3 = r\varkappa(p)$, где $\psi(p)$ и $\varkappa(p)$ – квадратичные функции p. Данная работа посвящена рассмотрению этих вариантов.

1. Постановка задачи. Первоначально ненамагниченные и сверхпроводящие твердые тела при движении в магнитном поле намагничиваются вдоль оси вращения (эффект Барнетта-Лондона)[9]. То есть возникают силы магнитного воздействия на тело, приводящие к магнитному моменту $B\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}$, где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор, указывающий направление магнитного поля, B – симметричная матрица третьего порядка. Уравнения движения гиростата запишем в векторном виде [10, 11], с учетом момента ньютоновских сил

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Эти уравнения допускают два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \tag{2}$$

где k – произвольная постоянная. Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением

$$\left[\frac{1}{2}(A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})\right]^{\bullet} = (B\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{3}$$

В уравнениях (1) – (3) обозначения таковы: $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел; $\boldsymbol{s}$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; A – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке, C – постоянная симметричная матрица, характеризующая ньютоновское притяжение; точка над переменными и их выражениями обозначает производную по времени t.

Пусть в уравнениях (1) – (3) матрицы A, B, C имеют диагональную структуру, $\boldsymbol{s} = (s, 0, 0)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, 0, 0)$, $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Следуя работам [4, 5], поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (1) решений следующего вида:

$$\begin{gathered}
q^2 = Q(p) = \sum_{k=0}^{n} b_k p^k, \quad r^2 = R(p) = \sum_{i=0}^{m} c_i p^i, \quad \nu_1 = \varphi(p) = \sum_{j=0}^{l} a_j p^j, \\
\nu_2 = q\psi(p), \quad \nu_3 = r\varkappa(p), \quad \psi(p) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \quad \varkappa(p) = \sum_{k=0}^{m_1} f_k p^k,
\end{gathered} \tag{4}$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; b_k, c_i, a_j, g_i, f_k – постоянные, подлежащие определению.

Подставим выражения (4) в скалярные уравнения, вытекающие из (1), интегралы (2) и соотношение (3)

$$\dot{p} = \Phi(p)\sqrt{Q(p)R(p)}, \quad \Phi(p) = (\psi(p) - \varkappa(p))(\varphi'(p))^{-1}, \tag{5}$$

$$\Phi(p)(Q(p)\psi^2(p))' = 2\psi(p)(p\varkappa(p) - \varphi(p)), \quad \Phi(p)(R(p)\varkappa^2(p))' = 2\varkappa(p)(\varphi(p) - p\psi(p)), \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_1\Phi(p) = (C_3 - C_2)\psi(p)\varkappa(p) + B_2\varkappa(p) - B_3\psi(p) + A_2 - A_3, \\
&A_2\Phi(p)Q'(p) = 2[(C_1 - C_3)\varkappa(p)\varphi(p) - \varkappa(p)(B_1 p + s) + B_3\varphi(p) - \lambda + (A_3 - A_1)p], \\
&A_3\Phi(p)R'(p) = 2[(C_2 - C_1)\varphi(p)\psi(p) + \psi(p)(B_1 p + s) - B_2\varphi(p) + \lambda + (A_1 - A_2)p];
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\varphi^2(p) - 1 + Q(p)\psi^2(p) + R(p)\varkappa^2(p) = 0, \quad (A_1 p + \lambda)\varphi(p) + A_2 Q(p)\psi(p) + A_3 R(p)\varkappa(p) = k; \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
[Q(p)(A_2 + C_2\psi^2(p)) + R(p)(A_3 + C_3\varkappa^2(p)) + C_1\varphi^2(p) + A_1 p^2 - 2s\varphi(p)]' = \\
= 2[(B_1 - B_3)p\psi(p) + (B_2 - B_1)p\varkappa(p) + (B_3 - B_2)\varphi(p)]\sqrt{Q(p)R(p)}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь A_i, B_i, C_i $(i = \overline{1,3})$ – диагональные элементы матриц A, B, C; штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной p.

В работе [5] при исследовании значений максимальных степеней полиномов из (4) не рассмотрены три случая

$$1.\ l \geq 2,\ B = 0,\ C = 0; \qquad 2.\ l = 2,\ n = m = 2,\ n_1 = m_1 = 1,\ g_1 \neq f_1;$$

$$3.\ l = 2,\ n = m = 1,\ n_1 = m_1 = 2,\ g_2 \neq f_2. \tag{10}$$

Целью настоящей работы является изучение вариантов (10).

2. Оценка максимальных значений полиномов (4) в классической задаче. В работе [5] при рассмотрении первого случая из (10) сделана ссылка на работу П.В. Харламова [12]. Но, поскольку в работе [12] исследованы только квадратичные инвариантные соотношения, то есть случай $n = 2$, то представляет интерес изучение первого случая в общем виде.

Так как левые и правые части уравнений (6), (7) являются многочленами относительно вспомогательной переменной p, то в работе используется алгоритм исследования, который основан на переборе всевозможных вариантов степеней полиномов $\psi(p)$ и $\varkappa(p)$ и оценке максимальных значений степеней для многочленов $Q(p)$ и $R(p)$.

Будем считать, что в равенствах (4) выполнены условия $n_1 = m_1 = 0$, то есть $\nu_2 = g_0 q$, $\nu_3 = f_0 r$. Анализ системы (7) в предположении, что среди главных моментов инерции нет равных приводит к условиям $n = m = 2$, $l = 1$. Этот случай изучен в работе [12]. Поскольку рассмотрение указанного случая проводилось при условии $A_3 \neq A_2$, то при наличии ограничения $A_3 = A_1$ второе уравнение системы (7) приводит к $n = 1$. Следовательно, если функции $\psi(p)$ и $\varkappa(p)$ являются постоянными, то максимальные степени полиномов $Q(p)$ и $R(p)$ не превосходят двух.

Рассмотрим вариант $n_1 > 0$, $m_1 = 0$. Оценивая максимальные степени многочленов из (4) с помощью первого уравнения системы (7), получим следующее значение для l: $l = n_1 + 1$. В силу этого ограничения из первого уравнения системы (6) устанавливаем, что $n = 2$. Следовательно, и этот случай рассмотрен в [12].

Пусть теперь в равенствах (4) степени многочленов $\psi(p)$, $\varkappa(p)$ равны единице. Если при этом предположить, что $g_1 \neq f_1$, то из первого уравнения системы (7) имеем $l = 2$. Используя это в предположении, что $a_2 \neq g_1$ и $a_2 \neq f_1$, из уравнений (6) получим $n = m = 2$. Если же в первом уравнении системы (6) выполняется условие $a_2 = f_1$, то из этого уравнения заключаем $n = 1$.

Допустим, что теперь $g_1 = f_1$. Тогда из анализа уравнений систем (6), (7) будем иметь: $n = m = 2$, $l = 1$. Следовательно, если функции $\psi(p)$ и $\varkappa(p)$ являются линейными, то максимальные степени полиномов $Q(p)$, $R(p)$, $\varphi(p)$ не больше двух.

Перейдем к рассмотрению варианта $n_1 > 1$, $m_1 = 1$. Запишем максимальную степень полинома $\psi(p)$ так: $n_1 = 1 + N$, где $N = 1, 2, ..., n_1 - 1$. Оценивая максимальную степень полинома $\varphi(p)$ из первого уравнения системы (7), получим $l = 2 + N$. На основании этого равенства из первого уравнения системы (6) и третьего уравнения системы (7) можно заключить, что $n = 2$ и $m = 2 + N$. Поэтому в этом случае $m \leq 4$, что и следует из работы [12].

Покажем невозможность существования варианта $n_1 > 1$ и $m_1 > 1$. Рассмотрим сначала случай $n_1 > m_1 > 1$. Предположим, что $n_1 = m_1 + N$, где $N = \overline{1, n_1 - m_1}$.

Первые уравнения в системах (6), (7) могут быть тождествами по p только при выполнении равенств $l = m_1 + N + 1$ и $n = 2$. Тогда из анализа интеграла, который вытекает из уравнения (9) при $B_i = 0$ $(i = \overline{1,3})$, заключаем, что $m = l$. При этом из интеграла площадей (8) следует равенство $c_m f_{m_1} = 0$, что невозможно.

Пусть теперь в равенствах (4) выполнены условия $n_1 = m_1 > 1$. Рассмотрим случай $g_{n_1} \neq f_{n_1}$. Анализ первого уравнения системы (7) приводит к следующему значению для l : $l = n_1 + 1$. Предположим еще, что $g_{n_1} \neq a_l$ и $f_{n_1} \neq a_l$. Тогда из уравнений (6) находим, что $n = m = 2$. Следовательно, равенство (9) выполняется только при $l = n_1 + 1 \leq 2$, то есть $n_1 \leq 1$. Полученное значение для n_1 выходит за границы рассматриваемого случая. Если же предположить, что в первом уравнении системы (6) выполняется условие $a_l = f_{n_1}$, то при этом следует, что $n = 1$. Тогда из (9) при $B_i = 0$ $(i = \overline{1,3})$ придем к условию $n_1 \leq 1$, что невозможно.

В дальнейшем исследовании случая $n_1 = m_1 > 1$ будем считать, что $g_{n_1} = f_{n_1}$, $g_{n_1-1} = f_{n_1-1}, \ldots, g_{n_1-n_1^*} \neq f_{n_1-n_1^*}$, где $n_1^* = 1, 2, \ldots, n_1$. Анализ уравнений систем (6), (7) дает значения на максимальные степени полиномов из (4): $l = n_1 + 1 - n_1^*$, $n = 2$, $n = n_1 + 1$. Полученные равенства в рамках рассматриваемого варианта выполняться не могут. Тем самым доказана невозможность существования варианта $n_1 > 1$ и $m_1 > 1$.

Итак, первый случай из (10) изучен в полном объеме и установлено, что в классической задаче для уравнений (6), (7) степени основных полиномов $Q(p), R(p)$ удовлетворяют условиям $n \leq 2$ и $m \leq 4$ (см. [12]).

3. Новое частное решение. Перейдем к рассмотрению второго варианта из (10). Тогда из (4) находим

$$q^2 = Q(p) = b_2 p^2 + b_1 p + b_0, \quad r^2 = R(p) = c_2 p^2 + c_1 p + c_0,$$

$$\nu_1 = \varphi(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad \nu_2 = q\psi(p), \quad \nu_3 = r\varkappa(p), \tag{11}$$

$$\psi(p) = g_1 p + g_0, \quad \varkappa(p) = f_1 p + f_0.$$

Подставим значения для компонент векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ из (11) в уравнения (6), (7). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, стоящих в левых и правых частях каждого уравнения системы (7), заключаем, что матрица $\mathbf{C}$ в уравнения движения (1) не входит. Следовательно, первое уравнение из (7) может быть тождеством по p только при выполнении условия

$$B_2 f_1 = B_3 g_1. \tag{12}$$

С учетом равенства (12) первое динамическое уравнеие из (7) запишем так

$$\Phi(p) = \Phi_0, \quad \text{где} \;\; \Phi_0 = (B_2 f_0 - B_3 g_0 + A_2 - A_3) A_1^{-1}. \tag{13}$$

Исключим из уравнений систем (6), (7) функцию $\Phi(p)$ с помощью (13).

Используя равенство (12) и полагая $f_0 = g_0$, получим

$$f_1 = B_3 B_2^{-1} g_1,\ B_1 = (B_2 - B_3)(2\Phi_0)^{-1},\ a_2 = (B_2 - B_3) g_1 (2B_2\Phi_0)^{-1},\ a_1 = 0,$$

$$a_0 = \frac{g_0\left\{A_2 B_3^2(B_2(1+4\Phi_0) - B_3(1+2\Phi_0)) + A_3 B_2^2(B_2(2\Phi_0 - 1) + B_3(1-4\Phi_0))\right\}}{12(B_3 - B_2)B_2 B_3^2 g_1 \Phi_0};$$

$$b_2 = ((2\Phi_0+1)B_3 - B_2)(4\Phi_0^2 B_2)^{-1},\quad b_1 = g_0(B_2(1+4\Phi_0) - B_3(1+2\Phi_0))(6\Phi_0^2 B_2 g_1)^{-1};$$

$$c_2 = ((1-2\Phi_0)B_2 - B_3)(4\Phi_0^2 B_3)^{-1},\quad c_1 = g_0 B_2(B_2(2\Phi_0 - 1) + B_3(1-4\Phi_0))(6\Phi_0^2 B_3^2 g_1)^{-1};$$

$$b_0 = g_0\frac{B_3^2(B_3(1+2\Phi_0) - B_2(1+4\Phi_0))(A_2 + g_0(B_3 - B_2)) + A_3 B_2^2(B_2(1-2\Phi_0) + B_3(4\Phi_0 - 1))}{12(B_3 - B_2)B_2 B_3^2 g_1^2 \Phi_0^2},$$

$$c_0 = g_0\frac{B_2^2(B_2(1-2\Phi_0) + B_3(4\Phi_0 - 1))(g_0(B_3 - B_2) - A_3) + A_2 B_3^2(B_2(1+4\Phi_0) - B_3(1+2\Phi_0))}{12(B_3 - B_2)B_3^3 g_1^2 \Phi_0^2},$$

$$2g_0(B_3 - B_2)\left(B_2(A_1 - A_3) + B_3(A_2 - A_1)\right) = (A_2 - A_3)\left(B_3(2A_2 - A_1) + B_2(A_1 - 2A_3)\right);$$

$$s = \left\{(B_2 - B_3)(A_2 - 2B_2 g_0) + 2\Phi_0(2B_2(A_3 - A_1) - B_3 A_2)\right\}(4\Phi_0 B_3 g_1)^{-1},$$

$$\lambda = (B_3 a_0 - g_0 s) + A_2 g_0(B_3(1+2\Phi_0) - B_2(1+4\Phi_0))(12 B_2 g_1 \Phi_0)^{-1}. \tag{14}$$

При условиях (14) решение уравнений (1), (2) имеет вид

$$q^2 = Q(p) = b_2 p^2 + b_1 p + b_0,\ r^2 = R(p) = c_2 p^2 + c_1 p + c_0,\ \nu_1 = \varphi(p) = a_2 p^2 + a_0,$$

$$\nu_2 = (g_1 p + g_0)(b_2 p^2 + b_1 p + b_0)^{1/2},\ \nu_3 = (f_1 p + g_0)(c_2 p^2 + c_1 p + c_0)^{1/2}, \tag{15}$$

$$\dot p = (2a_2)^{-1}(g_1 - f_1)\left[(b_2 p^2 + b_1 p + b_0)(c_2 p^2 + c_1 p + c_0)\right]^{1/2}.$$

Пример действительности решения (15) таков: $C_1 = C_2 = C_3$, $B_2 = 2B_3 = b$, $A_i = a\ \ (i = \overline{1,3})$, $3bg_0 = -a$, $g_1 = 2\sqrt{3}g_0^2$ $(a > 0, b > 0)$.

В этом случае имеем

$$q^2 = Q(p) = 3(-2p^2 + 9\mu^2),\ r^2 = R(p) = 3(5p^2 + 2\sqrt{3}\mu p - 15\mu^2),\ \nu_1 = \varphi(p) = \sqrt{3}\left(-\frac{p^2}{3\mu^2} + 1\right),$$

$$\nu_2 = \frac{1}{3\mu}(2\mu^{-1}p - \sqrt{3})(-2p^2 + 9\mu^2)^{1/2},\ \nu_3 = \frac{1}{3\mu}(\mu^{-1}p - \sqrt{3})(5p^2 + 2\sqrt{3}\mu p - 15\mu^2)^{1/2},$$

$$\dot p = -\frac{1}{2}((-2p^2 + 9\mu^2)(5p^2 + 2\sqrt{3}\mu p - 15\mu^2))^{1/2};$$

где $\mu = \dfrac{b}{a}$, $-\dfrac{3\sqrt{2}\mu}{2} < p < -\dfrac{\sqrt{3}(1+\sqrt{26})}{5}\mu$ и $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{26}-1)}{5}\mu < p < \dfrac{3\sqrt{2}\mu}{2}$.

В этом решении остался свободный параметр μ, который, вообще говоря, несущественный – его можно устранить переходом к безразмерным величинам.

4. Случай $\mathbf{n = m = 1,\ n_1 = m_1 = l = 2}$. Рассмотрим третий вариант из (10). Тогда из (4) получим

$$q^2 = Q(p) = b_1 p + b_0, \quad r^2 = R(p) = c_1 p + c_0, \quad \nu_1 = \varphi(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0,$$
$$\nu_2 = q\psi(p), \quad \nu_3 = r\varkappa(p), \quad \psi(p) = g_2 p^2 + g_1 p + g_0, \quad \varkappa(p) = f_2 p^2 + f_1 p + f_0. \tag{16}$$

Подставим (16) и функцию $\Phi(p)$ из (5) в уравнения систем (6), (7). Уравнения (7) могут быть тождествами по p только при выполнении условий $C_1 = C_2 = C_3$, $B_1 = 0$. В силу этих равенств из (5) следует, что $\Phi(p)$ является линейной функцией. Поэтому из первого уравнения (7) заключаем, что

$$B_2 f_2 = B_3 g_2. \tag{17}$$

Учитывая равенство (17), запишем первое уравнение (7) в виде

$$\Phi(p) = D_1 p + D_0, \quad \text{где} \quad D_1 = (B_2 f_1 - B_3 g_1) A_1^{-1}, \quad D_0 = [(B_2 f_0 - B_3 g_0) + A_2 - A_3] A_1^{-1}. \tag{18}$$

Исключим из уравнений (6), (7) функцию $\Phi(p)$ с помощью (18) и потребуем их выполнение для любых p. В результате получим систему условий на параметры задачи

$$s = B_2 a_2 g_2^{-1}; \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} &A_2 b_1 D_1 = 2(B_3 a_1 - f_1 s + A_3 - A_1), \quad A_3 c_1 D_1 = 2(g_1 s - B_2 a_1 + A_1 - A_2), \\ &A_2 b_1 D_0 = 2(B_3 a_0 - (f_0 s + \lambda)), \quad A_3 c_1 D_0 = 2((g_0 s + \lambda) - B_2 a_0); \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$5 b_1 g_2 D_1 = 2 f_2, \quad 5 c_1 f_2 D_1 = -2 g_2; \tag{21}$$

$$(3 b_1 g_1 + 4 b_0 g_2) D_1 + 5 b_1 g_2 D_0 = 2(f_1 - a_2), \ (3 c_1 f_1 + 4 c_0 f_2) D_1 + 5 c_1 f_2 D_0 = 2(a_2 - g_1); \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} &(b_1 g_0 + 2 b_0 g_1) D_1 + (3 b_1 g_1 + 4 b_0 g_2) D_0 = 2(f_0 - a_1), \\ &(c_1 f_0 + 2 c_0 f_1) D_1 + (3 c_1 f_1 + 4 c_0 f_2) D_0 = 2(a_1 - g_0); \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$(b_1 g_0 + 2 b_0 g_1) D_0 = -2 a_0, \quad (c_1 f_0 + 2 c_0 f_1) D_0 = 2 a_0. \tag{24}$$

Значения функции $\Phi(p)$, указанные в равенствах (5), (18), совпадают для любых p при выполнении условий

$$g_2 - f_2 = 2 a_2 D_1, \quad g_1 - f_1 = a_1 D_1 + 2 a_2 D_0, \quad g_0 - f_0 = a_1 D_0. \tag{25}$$

Рассмотрение интеграла площадей из (8) приводит к дополнительному условию $A_1 a_2 + A_2 b_1 g_2 + A_3 c_1 f_2 = 0$, которое с учетом равенств для b_1 и c_1 из (21) и a_2 из (25) примет вид

$$(5A_1 - 4A_3) g_2 = (5A_1 - 4A_2) f_2. \tag{26}$$

Так как $g_2 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ и $g_2 \neq f_2$, то анализ соотношения (26) дает два возможных варианта условий на моменты инерции:

$$1.\ 5A_1 \neq 4A_3,\quad 5A_1 \neq 4A_2,\ A_2 \neq A_3;\quad 2.\ A_2 = A_3,\quad A_1 = 0{,}8A_2. \tag{27}$$

Отметим, что если для функций $Q(p) = b_1 p + b_0$ и $R(p) = c_1 p + c_0$ имеет место соотношение $b_1 + \alpha^2 c_1 = 0$, где $\alpha \in R\backslash\{0\}$, то существование общего промежутка по p, в котором $q^2 = Q(p) > 0$ и $r^2 = R(p) > 0$, определяется условием

$$b_0 + \alpha^2 c_0 > 0. \tag{28}$$

Линейная комбинация уравнеий (24) приводит к соотношению $D_0(b_1 g_0 + c_1 f_0 + 2b_0 g_1 + 2c_0 f_1) = 0$. Пусть в этом равенстве $D_0 \neq 0$ и выполняются условия первого варианта из (27). Тогда равенство (26) запишем в виде

$$f_2 = \alpha_1 g_2, \quad \text{где} \quad \alpha_1 = (5A_1 - 4A_3)(5A_1 - 4A_2)^{-1}. \tag{29}$$

На основании (29) соотношение (17) приводит к условию

$$B_3 = \alpha_1 B_2. \tag{30}$$

В результате исследования совместности системы уравнений (19)–(25), (29), (30) относительно параметров A_1, A_2, A_3, B_2, g_1 и f_1, получаем три условия, определяемые равенствами

$$b_0 = (z_1 y_2 - z_2 y_1)(x_1 y_2 - x_2 y_1), \quad c_0 = (x_1 z_2 - x_2 z_1)(x_1 y_2 - x_2 y_1), \tag{31}$$

$$(z_1 y_2 - z_2 y_1)x_3 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)y_3 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)z_3,$$

где

$$x_1 = -2(25 + 2\beta_0\gamma_2)D_1^2 g_1 + 5(\alpha_1 - 1)\gamma_2 D_1 g_1 f_1,$$

$$x_2 = -8\beta_0 D_1^3 + 2(10\alpha_1 g_1 - 5(1+\alpha_1)f_1 + 2(1-\alpha_1)\beta_0\gamma_2 g_1)D_1^2 + (\alpha_1 - 1)\gamma_2 g_1[(5\alpha_1+1)f_1 - 6\alpha_1^2 g_1]D_1,$$

$$x_3 = 4\beta_0\gamma_2 g_1 D_1^2 + (f_1(11\alpha_1 - 1) - 10\alpha_1^2 g_1)\gamma_2 g_1 D_1;$$

$$y_1 = \alpha_1 x_1 f_1 g_1^{-1}, \qquad y_2 = \alpha_1\{-8\beta_0 D_1^3 + 2(10\alpha_1 g_1 - 5(1+\alpha_1)f_1 +$$

$$+2(1-\alpha_1)\beta_0\gamma_2 f_1 D_1^2 + (\alpha_1 - 1)\gamma_2 f_1[(5\alpha_1 + 1)f_1 - 6\alpha_1^2 g_1]D_1\},$$

$$y_3 = -8\alpha_1\beta_0 D_1^3 + 2\alpha_1(10\alpha_1 g_1 - 5(1+\alpha_1)f_1 + 2\beta_0\gamma_2 f_1)D_1^2 + \alpha_1[f_1(11\alpha_1 - 1) - 10\alpha_1^2 g_1]\gamma_2 f_1 D_1;$$

$$z_1 = 2D_1\{2\beta_0\gamma_0 - 5(\beta_1 - \beta_0)(1 - \alpha_1^2)\alpha_1^{-1}\} + 5(1 - \alpha_1)\gamma_1 f_1^2 D_1^{-1} +$$

$$+f_1\{5(1 - \alpha_1)\gamma_0 + 4\beta_0\gamma_1 - 25(\alpha_1 - 1)(1 - \alpha_1^2)(2\alpha_1)^{-1}\},$$

$$z_2 = (\alpha_1 - 1)\{4\beta_0\gamma_0 D_0 + (4\beta_0\gamma_1 - (5\alpha_1+1)\gamma_0)f_1 + 6\alpha_1^2\gamma_0 g_1 + (6\alpha_1^2\gamma_1 g_1 f_1 - (5\alpha_1+1)\gamma_1 f_1^2)D_1^{-1}\},$$

$$z_3 = (2(\alpha_1 - 1) - 4\gamma_0)\beta_0 D_1 + [(1 - 11\alpha_1)\gamma_0 - 2{,}5(1 - \alpha_1^2) - 4\beta_0\gamma_1]f_1 +$$

$$+5\alpha_1(2\alpha_1\gamma_0 + (1 - \alpha))g_1 + \gamma_1 f_1((1 - 11\alpha_1)f_1 + 10\alpha_1^2 g_1)D_1^{-1};$$

$$\gamma_2 = 5B_2A_1^{-1}, \quad \gamma_1 = 5(\alpha_1 - 1)^2 B_2(4\alpha_1 A_1)^{-1},$$
$$\gamma_0 = B_2(\alpha_1 - 1)(\beta_1 - \beta_0)(A_1\alpha_1)^{-1} + (A_2 - A_3)A_1^{-1},$$

$$\beta_1 = (A_3 - \alpha_1^2 A_2)(\alpha_1 - 1)^{-1}B_2^{-1}, \quad \beta_0 = [\alpha_1 A_2 + 5(A_1 - A_3)](2B_2)^{-1}.$$

При этом выражение для D_0 из (18) примет вид

$$D_0 = \gamma_2(g_1 b_0 + \alpha_1 f_1 c_0)D_1 + \gamma_1 f_1 D_1^{-1} + \gamma_0. \tag{32}$$

Третье уравнение из (31) является однородным уравнением шестой степени относительно f_1 и g_1. Положим в нем $f_1 = kg_1$. Тогда, при помощи значения D_1 из (18) и равенства (30), оно запишется так

$$(k - \alpha_1)^4(k - k_1)(k - k_2) = 0,$$

где

$$k_1 = 1 + \frac{2(A_2 - A_3)\{25A_1[17A_1 - 6(A_2 + A_3)] - 32A_2A_3\}}{4A_2[5A_1(15A_2 + A_3) + 16A_2A_3] + 25A_1^2[3(10A_1 - 13A_2) - 5A_3]},$$

$$k_2 = 1 + \frac{2(A_2 - A_3)\{25A_1[3A_1 - 2(A_2 + A_3)] + 32A_2A_3\}}{4A_2[5A_1(11A_3 + 5A_2) - 16A_2A_3] + 25A_1^2(10A_1 - 13A_2 - 7A_3)}.$$

Так как $D_1 \neq 0$, то $k \neq \alpha_1$.

Рассмотрение геометрического интеграла из (8) с учетом (29) приводит к уравнению

$$b_1 + \alpha_1^2 c_1 = 0. \tag{33}$$

Исследуем корни третьего уравнения из (31). Если $k = k_1$, то в силу значений для b_0 и c_0 из (31) и соотношения (33) получим равенство, которое при $\alpha = \alpha_1$ противоречит (28). Если же $k = k_2$, то, учитывая значения для b_0 и c_0 из (31), из (32) будем иметь $D_0 = 0$, что невозможно. Поэтому вариант $D_0 \neq 0$ и $A_2 \neq A_3$, $5A_1 \neq 4A_2$, $5A_1 \neq 4A_3$ не имеет места.

Перейдем к рассмотрению второго варианта из (27) при условии $D_0 \neq 0$. Тогда равенство (17) запишем в виде

$$f_2 = \alpha_2 g_2, \quad \text{где} \quad \alpha_2 = B_3 B_2^{-1}. \tag{34}$$

Система уравнений (19)–(25), (34) разрешима относительно параметров A_2, B_2, f_1, α_2:

$$a_2 = \frac{2A_2(g_1 f_0 - g_0 f_1)(1 - \alpha_2)}{5B_2(f_0 - \alpha_2 g_0)^2}, \quad a_1 = \frac{4A_2(g_0 - f_0)}{5B_2(f_0 - \alpha_2 g_0)}, \quad a_0 = \frac{A_2(1 - \alpha_2)(f_0 + \alpha_2 g_0)}{5\alpha_2 B_2(f_1 - \alpha_2 g_0)};$$

$$g_2 = \frac{(f_1 - \alpha_2 g_1)(g_1 f_0 - g_0 f_1)}{(f_0 - \alpha_2 g_0)^2}, \quad f_2 = \frac{\alpha_2(f_1 - \alpha_2 g_1)(g_1 f_0 - g_0 f_1)}{(f_0 - \alpha_2 g_0)^2};$$

$$s = 2A_2(1 - \alpha_2)(5(f_1 - \alpha_2 g_1))^{-1}, \quad \lambda = A_1(\alpha_2 g_0 - f_0)(5(f_1 - \alpha_2 g_1))^{-1};$$

$$b_1 = 8\alpha_2 A_2(25B_2(f_1 - \alpha_2 g_1))^{-1}, \quad c_1 = -8A_2(25\alpha_2 B_2(f_1 - \alpha_2 g_1))^{-1}; \tag{35}$$

$$b_0 = -\frac{4A_2\{A_2(1-\alpha_2)(f_0+\alpha_2 g_0) + \alpha_2^2 B_2(f_0 - \alpha_2 g_0)g_0\}}{25\alpha_2 B_2^2(f_1 - \alpha_2 g_1)(f_0 - \alpha_2 g_0)g_1},$$

$$c_0 = \frac{4A_2\{A_2(1-\alpha_2)(f_0+\alpha_2 g_0) + B_2(f_0 - \alpha_2 g_0)f_0\}}{25\alpha_2 B_2^2(f_1 - \alpha_2 g_1)(f_0 - \alpha_2 g_0)f_1};$$

$$g_0 = -3A_2(\alpha_2+1)(3\alpha_2 - 7)(100\alpha_2^2 B_2)^{-1}, \quad f_0 = 3A_2(\alpha_2+1)(7\alpha_2-3)(100\alpha_2 B_2)^{-1};$$

$$g_1 = (9\alpha_2 + 19)(\alpha_2(19\alpha_2+9))^{-1} f_1.$$

Анализ действительности решения (16) показывает, что при значениях g_1, g_0, f_0 из (35) для параметров b_0 и c_0, указанных в (35), выполняется равенство $b_0 + \alpha_2^2 c_0 = 0$, что противоречит условию (28) при $\alpha = \alpha_2$. Таким образом, рассматриваемый случай невозможен.

Так как рассмотрение вариантов (27) проводилось при условии $D_0 \neq 0$, то изучим теперь случай $D_0 = 0$.

Из анализа соотношения для D_0 в (18) и уравнений (24), (25) заключаем, что

$$a_0 = 0, \quad g_0 = f_0, \quad g_0 = (A_3 - A_2)(B_2 - B_3)^{-1}. \tag{36}$$

Учитывая значения для a_0 и g_0, указанные в (36), из геометрического интеграла (8) получим дополнительное условие $g_0^2(b_0+c_0) = 1$, которое показывает, что в (36) $A_2 \neq A_3$. Поэтому, будем проводить исследование только первого варианта из (27). Тогда имеют место соотношения (29), (30). С учетом равенств (29), (30), (36) анализ уравнений (25) приводит к двум условиям на параметры

$$a_2 = (1-\alpha_1)g_2(2D_1)^{-1}, \quad a_1 = (g_1 - f_1)D_1^{-1}. \tag{37}$$

Приравняем соответственно значения для b_1 и c_1 из (20) и (21) и изучим полученные соотношения с учетом выражений (19), (29), (30) и равенств (37). В результате получим связь между параметрами g_1 и f_1

$$\alpha_1 g_1 = \gamma f_1, \quad \text{где} \quad \gamma = [\alpha_1(2A_2 + 5A_1) + 5(3A_1 - 2A_3)](2(10A_1 + \alpha_1 A_2 - 5A_3))^{-1}. \tag{38}$$

Рассмотрение уравнений (22) с учетом (29) и D_1 из (18), а также соотношений (37) приводит к следующим значениям свободных членов полиномов $Q(p)$ и $R(p)$

$$\begin{gathered} b_0 = (\sigma_1(5f_1 - 3\alpha_1 g_1) + \sigma_2)\sigma_3^{-1}, \quad c_0 = (\sigma_1(3f_1 - 5\alpha_1 g_1) - \alpha_1\sigma_2)(\alpha_1^2\sigma_3)^{-1}, \\ \text{где} \quad \sigma_1 = 2A_1B_2(f_1 - \alpha_1 g_1), \quad \sigma_2 = 5A_1^2(\alpha_1 - 1)g_2, \quad \sigma_3 = 20B_2^2 g_2(f_1 - \alpha_1 g_1)^2. \end{gathered} \tag{39}$$

Перейдем теперь к изучению уравнений системы (23). Их исследование на основании значения для D_1 из (18), равенств (30), (36) – (39), дает два соотношения

$$\begin{gathered} g_2[4(A_3 - A_2)(f_1 - \alpha_1 g_1)(5-\alpha_1) + 5(\alpha_1 - 1)A_1(g_1(\alpha_1+3) - 4f_1)] = \\ = 2(1-\alpha_1)B_2(f_1 - \alpha_1 g_1)(5f_1 - 3\alpha_1 g_1)g_1, \end{gathered} \tag{40}$$

$$(v-1)^4u^3(vu-8\cdot 25^{-1}v+u-2u^2)[(5u-4)(4v-5u)(35uv-50u^2-16v+25u)^3]^{-1}=0, \quad (41)$$

где $u = A_1A_3^{-1}$ и $v = A_2A_3^{-1}$, ($u > 0, v > 0; v \neq 1$ так как, $A_2 \neq A_3$).

Уравнение (41) имеет единственный корень $v = 25u(2u-1)(25u-8)^{-1}$. Найденное условие на моменты инерции вместе с равенствами (38), (39), а также соотношение для g_2 из (40) приводят к равенству, которое противоречит (28) при $\alpha = \alpha_1$. Следовательно, случай $D_0 = 0$ не имеет места.

Тем самым доказана невозможность существования третьего случая из (10), когда $n_1 = m_1 = l = 2$, $n = m = 1$, ($g_2 \neq f_2$), для решений вида (4) уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

1. *Горячев Д.Н.* Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1899. – **10**, №1. – С. 23–24.
2. *Стеклов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Там же. – С. 1–3.
3. *Kowalewsky N.* Eine neue partikulare Lösung der Differenzial Gleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1908. – B.65. – S. 528–537.
4. *Горр Г.В., Суворова Н.Г.* Об одном классе полиномиальных решений в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Прикл. математика и механика . – 1997. – **61**, №5. – С. 781–787.
5. *Миронова Е.Н.* О решении уравнений движения тела в магнитном поле на основе полиномиальных решений // Прикл. механика. – 2001. – **37**, №2. – С. 105–113.
6. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
7. *Горр Г.В., Зыза А.В.* Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – №6. – С. 12–21.
8. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып.31. – С. 3–17.
9. *Китель Ч.* Введение в физику твердого тела. – М.: Физматгиз, 1963. – 696 с.
10. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. – 1985. – №6. – С. 65–69.
11. *Самсонов В.А.* О вращении твердого тела в магнитном поле // Там же. – 1984. – №4. – С. 32–43.
12. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела // Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.

Донецкий национальный ун-т

Получено 16.01.03